

PHẦN D. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 13$ có tâm I . Gọi B là điểm trên tia Oz sao cho B thuộc mặt cầu (S) .

a) Tâm I của mặt cầu (S) có tọa độ là $(2; 0; -1)$.

b) Bán kính của mặt cầu (S) bằng $\sqrt{13}$.

c) Tọa độ của điểm $B(0; 0; -2)$.

d) Phương trình đường thẳng $IB: \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 0 \\ z = 1 + 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
--------	---------	--------	---------

a) Sai.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-2; 0; 1)$.

b) Đúng.

c) Sai.

Gọi $B(0; 0; c)$ với $c > 0$ là điểm trên tia Oz .

B thuộc mặt cầu (S) nên thay tọa độ của B vào phương trình mặt cầu (S) , ta suy ra $B(0; 0; 4)$.

d) Đúng.

Đường thẳng đi qua hai điểm I, B có vector chỉ phương $\vec{IB} = (2; 0; 3)$ nên có phương trình là

$$\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 0 \\ z = 1 + 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Câu 2. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có $AB = 3, AD = 4, AA' = 5$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho đỉnh A trùng với gốc tọa độ O , đỉnh B thuộc tia Ox , đỉnh D thuộc tia Oz . Gọi I là trung điểm của CA' .

a) Tọa độ của đỉnh $B(-3; 0; 0)$.

b) Các đỉnh của hình hộp chữ nhật thuộc mặt cầu tâm I .

c) Tọa độ của điểm $I\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}; 2\right)$.

d) Phương trình mặt cầu tâm I , bán kính IB là $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (x - 2)^2 = \frac{25}{2}$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
--------	---------	---------	---------

a) Sai.

Toạ độ của đỉnh $B(3;0;0)$.

b) Đúng.

c) Đúng.

d) Đúng.

Ta có $IB = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Phương trình mặt cầu tâm I , bán kính IB là $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (x - 2)^2 = \frac{25}{2}$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(6;1;0)$, $B(-1;3;2)$ và $C(1;-1;1)$.

a) Trọng tâm của tam giác ABC là $I(2;1;1)$.

b) Biết rằng C là trọng tâm của tam giác ABE . Toạ độ của điểm E là $(-2;-7;1)$.

c) Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (Oyz) bằng $\sqrt{37}$.

d) Xét điểm M thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho $|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}| = 3\sqrt{5}$. Giá trị lớn nhất của độ dài đoạn thẳng AM bằng $\sqrt{37}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

a) Đúng.

Toạ độ trọng tâm $I(x_I; y_I; z_I)$ của tam giác ABC được tính bởi công thức:

$$x_I = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, y_I = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}, z_I = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \Rightarrow x_I = 2, y_I = 1, z_I = 1.$$

Suy ra $I(2;1;1)$.

b) Đúng.

Ta có

$$x_C = \frac{x_A + x_B + x_E}{3}, y_C = \frac{y_A + y_B + y_E}{3}, z_C = \frac{z_A + z_B + z_E}{3} \Rightarrow x_E = -2, y_E = -7, z_E = 1.$$

Suy ra toạ độ của điểm E là $(-2;-7;1)$.

c) Sai.

$$d(A, (Oyz)) = |x_A| = 6.$$

d) Sai.

$$\text{Ta có } |\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}| = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow 3|\vec{MI}| = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow IM = \sqrt{5}.$$

Khi đó, điểm M thuộc đường tròn đáy của hình nón có:

+ Đỉnh $I(2;1;1)$.

+ Trục là IH với $H(0;1;1)$ là tâm của hình tròn đáy.

+ Bán kính đáy $r = \sqrt{IM^2 - IH^2} = \sqrt{5 - 4} = 1$.

Gọi $A'(0;1;0)$ là hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (Oyz) .

Khi đó, giá trị lớn nhất của độ dài đoạn thẳng AM là

$$d = \sqrt{AA'^2 + A'H^2 + r^2} = \sqrt{36 + 1 + 1} = \sqrt{38}.$$

$$d: \begin{cases} x = t \\ y = -1 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(3;1;9)$, đường thẳng $(\alpha): x + y - z + 3 = 0$ mặt phẳng

a) Một vector pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $n = (1;1;-1)$.

b) Điểm M thuộc đường thẳng d .

c) Một điểm A bất kì thuộc đường thẳng d đều có tọa độ dạng $A(t; -1 - t; 2 + 2t)$.

d) Đường thẳng Δ đi qua điểm M , cắt đường thẳng d và song song với mặt phẳng (α) có

$$\text{phương trình là } \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-4}{5}.$$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------

a) Đúng.

b) Sai.

c) Đúng.

d) Đúng.

Gọi $A = \Delta \cap d \Rightarrow A(t; -1 - t; 2 + 2t); n_\alpha = (1;1;-1)$.

Vì $M \notin d$ nên suy ra $\overrightarrow{MA} = (t - 3; -t - 2; 2t - 7)$ là vector chỉ phương của đường thẳng Δ .

Do $\Delta // (\alpha)$ nên suy ra: $\overrightarrow{MA} \cdot n_\alpha = 0 \Rightarrow t - 3 - t - 2 - 2t + 7 = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow A(1; -2; 4)$.

$$\text{Vậy phương trình đường thẳng } \Delta \text{ là: } \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-4}{5}.$$

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3; -2; 5), B(2; 1; -3)$ và $C(-1; 2; 1)$.

a) Hình chiếu vuông góc của điểm A trên trục Oz là $A'(0;0;5)$.

b) Hình chiếu vuông góc của điểm B trên mặt phẳng (Oyz) là $B'(2;0;-3)$.

c) Biết rằng E là điểm nằm trên trục Ox và F là nằm điểm trên mặt phẳng (Oyz) sao cho C là trung điểm của đoạn thẳng EF . Khi đó $EF > 5$.

d) Gọi $I(a; b; c)$ là trực tâm của tam giác ABC . Khi đó $a + b + c = 2$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------

a) Đúng.

Hình chiếu vuông góc của điểm $A(x_A; y_A; z_A)$ lên trục Oz là $A'(0; 0; z_A)$.

b) Đúng.

Hình chiếu vuông góc của điểm $B(x_B; y_B; z_B)$ trên mặt phẳng (Oyz) là $B'(0; y_B; z_B)$.

c) Sai.

Gọi $E(x_E; 0; 0) \in Ox$ và $F(0; y_F; z_F) \in (Oyz)$ sao cho C là trung điểm của đoạn thẳng EF . Khi đó

$$\begin{cases} \frac{x_E + x_F}{2} = x_C \\ \frac{y_E + y_F}{2} = y_C \\ \frac{z_E + z_F}{2} = z_C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x_E + 0}{2} = -1 \\ \frac{0 + y_F}{2} = 2 \\ \frac{0 + z_F}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_E = -2 \\ y_F = 4 \\ z_F = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E(-2; 0; 0) \\ F(0; 4; 2) \end{cases}$$

Suy ra $EF = 2\sqrt{6} < 5$.

$$\begin{cases} AI \perp BC \\ BI \perp AC \\ I \in (ABC) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AI} = 0 \end{cases}$$

d) Đúng. $I(a; b; c)$ là trực tâm của tam giác ABC nên

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \overrightarrow{AI} &= (a - 3; b + 2; c - 5), \overrightarrow{BI} = (a - 2; b - 1; c + 3), \overrightarrow{BC} = (-3; 1; 4), \\ \overrightarrow{AC} &= (-4; 4; -4), \overrightarrow{AB} = (-1; 3; -8) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} -3(a - 3) + 1(b + 2) + 4(c - 5) = 0 \\ -4(a - 2) + 4(b - 1) - 4(c + 3) = 0 \\ 20(a - 3) + 28(b + 2) + 8(c - 5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - b - 4c = -9 \\ a - b + c = -2 \\ 5a + 7b + 2c = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = 1 \end{cases}$$

Khi đó

Suy ra $I(-1; 2; 1)$.

Vậy $a + b + c = -1 + 2 + 1 = 2$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 3), B(0; 1; -6)$ và mặt phẳng $(P): 4x - y + 2z + 13 = 0$.

a) Mặt phẳng (P) đi qua điểm A .

b) Đường thẳng Δ đi qua điểm A và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình tham số là

$$\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 + t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

c) Điểm $C(-3; 3; 1)$ là giao điểm của đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) .

d) Gọi d là một đường thẳng nằm trong (P) và d đi qua B sao cho khoảng cách từ A đến d đạt giá trị nhỏ nhất. Một vector chỉ phương của d có toạ độ là $(a; b; c)$ với l là số nguyên tố. Giá trị của $a + b + c$ bằng 6.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
--------	--------	---------	--------

a) Sai.

Ta có $4 \cdot 1 - 2 + 2 \cdot 3 + 13 = 21 \neq 0$ nên mặt phẳng (P) không đi qua điểm A .

b) Sai.

Đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (P) nên có một vector chỉ phương là $\vec{u} = (4; -1; 2)$.

$$\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

Phương trình tham số của Δ là

c) Đúng.

Gọi C là giao điểm của đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) .

Vì $C \in \Delta$ nên $C(1 + 4t_0; 2 - t_0; 3 + 2t_0)$.

Vì $C \in (P)$ nên $4(1 + 4t_0) - (2 - t_0) + 2(3 + 2t_0) + 13 = 0$, suy ra $t_0 = -1$.

Vậy $C(-3; 3; 1)$.

d) Sai.

Một vector chỉ phương của d là $\vec{CB} = (3; -2; -7)$.

Suy ra $a + b + c = 3 - 2 - 7 = -6$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; 3), B(-2; 1; 1)$ và $C(-3; 3; -2)$.

a) Toạ độ của vector $\vec{AB}$ là $(3; 1; 2)$.

b) Độ dài của đoạn thẳng AC bằng $\sqrt{42}$.

c) Góc $\angle BAC$ là góc tù.

d) Xét các điểm M trên mặt phẳng (Oxz) thoả mãn điều kiện $\angle AMB = 90^\circ$. Khi đó, giá trị lớn nhất của độ dài đoạn thẳng OM lớn hơn hoặc bằng 3.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
--------	---------	--------	---------

a) Sai.

$$\overrightarrow{AB} = (-2 - 1; 1 - 2; 1 - 3) = (-3; -1; -2).$$

b) Đúng.

$$AC = \sqrt{(-3 - 1)^2 + (3 - 2)^2 + (-2 - 3)^2} = \sqrt{42}.$$

c) Sai.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} = (-3; -1; -2), \overrightarrow{AC} = (-4; 1; -5).$$

$$\text{Do đó } \cos \angle BAC = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \cdot AC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \angle BAC = 30^\circ$$

Vậy $\angle BAC$ là góc nhọn.

d) Đúng.

$$\text{Do } \angle AMB = 90^\circ \text{ nên } M \text{ thuộc mặt cầu đường kính } AB \text{ có tâm } I\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 2\right) \text{ và bán kính}$$

$$R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{14}}{2}.$$

Hơn nữa, M thuộc mặt phẳng (Ozx) nên các điểm M thuộc đường tròn (C) là giao của mặt cầu $(I; R)$ với mặt phẳng (Ozx) .

$$\text{Đường tròn } (C) \text{ có tâm } J\left(-\frac{1}{2}; 0; 2\right) \text{ và bán kính } r \text{ là}$$

$$r = \sqrt{R^2 - IJ^2} = \sqrt{\frac{7}{2} - \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Vậy giá trị lớn nhất của } OM \text{ là } OJ + r = \frac{\sqrt{17}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 3,18.$$

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0; 1; 1), B(3; 0; -1), C(0; 2; -19)$ và mặt cầu $(S): (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 1$.

a) Tâm I của mặt cầu (S) có tọa độ là $(-1; -1; -1)$.

b) Tọa độ của điểm D sao cho $3\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \mathbf{0}$ là $(1; 4; -3)$.

c) Đường thẳng Δ đi qua hai điểm I và D có một vectơ chỉ phương là $(0; 3; -4)$.

d) Gọi M là điểm thuộc mặt cầu (S) sao cho biểu thức $T = 3MA^2 + 2MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó, giá trị của T bằng 672.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
--------	---------	---------	--------

a) Sai.

Tâm I của mặt cầu (S) có tọa độ là $(1;1;1)$.

b) Đúng.

Gọi $D(x; y; z)$, ta có $\overrightarrow{3DA} + \overrightarrow{2DB} + \overrightarrow{DC} = (-6x + 6; -6y + 24; -6z - 18)$.

Vì $\overrightarrow{3DA} + \overrightarrow{2DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$ nên $x=1; y=4; z=-3$. Vậy $D(1;4;-3)$.

c) Đúng.

Đường thẳng Δ đi qua hai điểm I và D có một vector chỉ phương là $\overrightarrow{ID} = (0; 3; -4)$.

d) Sai.

$$\begin{aligned} T &= 3MA^2 + 2MB^2 + MC^2 = 3\overrightarrow{MA}^2 + 2\overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 \\ &= 3(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA})^2 + 2(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DB})^2 + (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC})^2 \\ &= 6\overrightarrow{MD}^2 + 2\overrightarrow{MD}(\overrightarrow{3DA} + \overrightarrow{2DB} + \overrightarrow{DC}) + 3\overrightarrow{DA}^2 + 2\overrightarrow{DB}^2 + \overrightarrow{DC}^2 \\ &= 6\overrightarrow{MD}^2 + 3\overrightarrow{DA}^2 + 2\overrightarrow{DB}^2 + \overrightarrow{DC}^2. \end{aligned}$$

Do điểm $D(1;4;-3)$ nằm ngoài mặt cầu (S) nên biểu thức T đạt giá trị nhỏ nhất khi MD ngắn nhất.

Ta có MD ngắn nhất khi và chỉ khi $MD = ID - R = 5 - 1 = 4$.

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức T là

$$T = 6.4^2 + 3.26 + 2.24 + 546 = 768.$$

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+6)^2 + z^2 = 50$ có tâm I và điểm $K(1; -3; 0)$.

a) Mặt cầu (S) có bán kính $R = 5\sqrt{2}$.

b) Điểm K thuộc mặt cầu (S) .

c) Khoảng cách từ tâm I của mặt cầu (S) đến điểm K bằng 10.

d) Xét các điểm M thuộc (S) sao cho $\angle KMI$ lớn nhất. Khi đó, giá trị của MK bằng $2\sqrt{10}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
----------------	---------------	---------------	----------------

a) Đúng.

$$\text{Bán kính } R = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

b) Sai.

Thay tọa độ của điểm K vào phương trình mặt cầu (S) , ta có $(1-2)^2 + (-3+6)^2 + 0^2 = 10 \neq 50$.

Do đó, điểm K không thuộc mặt cầu (S) .

c) Sai.

Ta có $\overline{IK} = (1; -3; 0) \Rightarrow IK = \sqrt{10}$.

d) Đúng.

Mặt cầu (S) có tâm $I(2; -6; 0)$, bán kính $R = 5\sqrt{2}$.

Vì M thuộc (S) nên $MI = R = 5\sqrt{2}$.

Ta có $\cos \widehat{KMI} = \frac{MK^2 + MI^2 - KI^2}{2 \cdot MK \cdot MI} = \frac{MK^2 + 50 - 10}{2 \cdot MK \cdot 5\sqrt{2}} = \frac{MK^2 + 40}{10\sqrt{2} \cdot MK}$.

Vì $0^\circ < \widehat{KMI} < 90^\circ$ nên $0 < \cos \widehat{KMI} < 1$.

Đặt $x = MK, x > 0$. Xét hàm số $f(x) = \frac{40}{10\sqrt{2}}$ với $x > 0$.

Hàm số $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $(0; +\infty)$ bằng $\frac{2}{\sqrt{5}}$ tại $x = 2\sqrt{10}$.

Do đó $\cos \widehat{KMI}$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $MK = 2\sqrt{10}$.

Vậy $\widehat{KMI}$ lớn nhất khi giá trị của MK bằng $2\sqrt{10}$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét), một trạm thu phát sóng điện thoại di động được đặt ở vị trí $I(1; 3; 7)$. Trạm thu phát sóng đó được thiết kế với bán kính phủ sóng là 3 km .

a) Phương trình mặt cầu (S) để mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng trong không gian là $(x+1)^2 + (y+3)^2 + (z+7)^2 = 9$.

b) Điểm $A(2; 2; 7)$ nằm ngoài mặt cầu (S) .

c) Nếu người dùng điện thoại ở vị trí có tọa độ $(2; 2; 7)$ thì có thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng đó.

d) Nếu người dùng điện thoại ở vị trí có tọa độ $(5; 6; 7)$ thì không thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng đó.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
--------	--------	---------	---------

Phương trình mặt cầu (S) tâm $I(1; 3; 7)$ bán kính 3 km mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng trong không gian là $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-7)^2 = 9$.

Ta có: $IA = \sqrt{(2-1)^2 + (2-3)^2 + (7-7)^2} = \sqrt{2} < 3$ nên điểm A nằm trong mặt cầu. Vì điểm A nằm trong mặt cầu nên người dùng điện thoại ở vị trí có tọa độ $(2; 2; 7)$ có thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng đó.

Ta có: $IB = \sqrt{(5-1)^2 + (6-3)^2 + (7-7)^2} = 5 > 3$ nên điểm B nằm ngoài mặt cầu. Vậy người dùng điện thoại ở vị trí có tọa độ $(5; 6; 7)$ không thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng đó.

Đáp án: a) S, b) S, c) Đ, d) Đ .

- Câu 11.** Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo mét), một ngọn hải đăng được đặt ở vị trí $I(17; 20; 45)$. Biết rằng ngọn hải đăng đó được thiết kế với bán kính phủ sáng là 4 km .
- a) Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sáng trên biển của hải đăng là: $(x - 17)^2 + (y - 20)^2 + (z - 45)^2 = 4000^2$.
- b) Nếu người đi biển ở vị trí $M(18; 21; 50)$ thì không thể nhìn thấy được ánh sáng từ ngọn hải đăng.
- c) Nếu người đi biển ở vị trí $N(4019; 21; 44)$ thì có thể nhìn thấy được ánh sáng từ ngọn hải đăng.
- d) Nếu hai người đi biển ở vị trí có thể nhìn thấy được ánh sáng từ ngọn hải đăng thì khoảng cách giữa hai người đó không quá 8 km .

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sáng trên biển của hải đăng là: $(x - 17)^2 + (y - 20)^2 + (z - 45)^2 = 4000^2$.

Ta có: $IM = \sqrt{(18 - 17)^2 + (21 - 20)^2 + (50 - 45)^2} = \sqrt{27} < 4000$ nên người đi biển ở vị trí $M(18; 21; 50)$ có thể nhìn thấy được ánh sáng từ ngọn hải đăng.

Ta có: $IN = \sqrt{(4019 - 17)^2 + (21 - 20)^2 + (44 - 45)^2} \approx 4002 > 4000$ nên người đi biển ở vị trí $N(4019; 21; 44)$ không thể nhìn thấy được ánh sáng từ ngọn hải đăng.

Vì đường kính của mặt cầu trên bằng 8000 m hay 8 km nên hai người đi biển ở vị trí có thể nhìn thấy được ánh sáng từ ngọn hải đăng thì khoảng cách giữa hai người đó không quá 8 km .

Đáp án: a) Đ, b) S, c) S, d) Đ.

- Câu 12.** Cho hai điểm $A(1; -2; 3), B(2; 0; 1)$ và mặt cầu (S) tâm A đi qua B .
- a) Mặt cầu (S) có bán kính $R = AB$.

b) $AB = 9$.

c) Phương trình mặt cầu (S) là: $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 81$.

d) Phương trình mặt cầu (S) là: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 5 = 0$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

Mặt cầu (S) tâm A đi qua B nên có bán kính bằng AB .

Ta có: $AB = \sqrt{(2 - 1)^2 + [0 - (-2)]^2 + (1 - 3)^2} = 3$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) là:

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 5 = 0.$$

Câu 13. Cho hai điểm $M(0; -1; 1)$ và $N(4; 1; 5)$.

a) Mặt cầu đường kính MN có tâm là trung điểm của đoạn thẳng MN .

b) Nếu I là trung điểm của MN thì $I(2; 0; 6)$.

c) Bán kính của mặt cầu đường kính MN bằng 3.

d) Phương trình mặt cầu đường kính MN là: $(x-2)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 9$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(3; -2; -1)$ và mặt phẳng $(P): x - 2y - 2z + 3 = 0$.

a) Một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}_P = (1; -2; -2)$

b) Khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng (P) bằng 3

c) Mặt cầu (S) có tâm I và (S) tiếp xúc với (P) có phương trình là $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 16$

d) Phương trình đường thẳng d đi qua I và d vuông góc với (P) là $\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z+1}{-2}$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------

a) $\vec{n}_P = (1; -2; -2)$

b) Ta có: $d(I, (P)) = \frac{|3 + 4 + 2 + 3|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = 4$

c) Bán kính của mặt cầu (S) là $R = d(I, (P)) = 4$.

Phương trình mặt cầu (S) là: $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 16$.

d) Đường thẳng d nhận vector $\vec{n}_P = (1; -2; -2)$ làm vector chỉ phương.

Phương trình đường thẳng d là: $\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z+1}{-2}$.

Câu 15. Cho hai điểm $A(0; 2; 0)$ và $B(2; -4; 0)$.

a) Trung điểm I của đoạn thẳng AB có tọa độ là $(1; -1; 0)$.

b) $AB = 40$.

c) Mặt cầu (S) tâm A và đi qua B có bán kính $R = \sqrt{10}$.

d) Phương trình mặt cầu (S) tâm A và đi qua B là: $(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 10$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Sai
---------	--------	--------	--------

- Câu 16.** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 9$ và điểm $A(2; -1; 1)$.
- a) Mặt cầu (S) có tâm $I(2; -1; 3)$
- b) Bán kính mặt cầu (S) bằng 4
- c) Điểm A nằm trong mặt cầu (S) .
- d) Mặt phẳng (P) đi qua điểm A sao cho khoảng cách từ tâm I của mặt cầu (S) đến mặt phẳng (P) lớn nhất có phương trình là: $z - 1 = 0$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------

a) b) Ta có: Mặt cầu có tâm $I(2; -1; 3)$, bán kính $R = 3$.

c) Ta có: $IA = \sqrt{0+0+4} = 2 < 3$ nên điểm A nằm trong mặt cầu (S) .

d) Kẻ IH vuông góc với mặt phẳng (P) thì $IH \leq IA$ nên IH lớn nhất khi H trùng với A hay $\vec{IA} = (0; 0; -2)$ là một vectơ chỉ phương của mặt phẳng (P) .

Phương trình mặt phẳng (P) là: $z - 1 = 0$.

- Câu 17.** Cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = 9$.

- a) (S) có tâm $I(-1; -3; 2)$.
- b) (S) có bán kính $R = 9$.
- c) Điểm $O(0; 0; 0)$ nằm ngoài mặt cầu (S) .
- d) Điểm $M(1; 3; 1)$ nằm trên mặt cầu (S) .

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
--------	--------	---------	---------

- Câu 18.** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + 5 = 0$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 11 = 0$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

- a) Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $(2; -1; 2)$.
- b) Bán kính mặt cầu (S) bằng 3.
- c) Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) .
- d) Mặt phẳng (Q) tiếp xúc với mặt cầu và song song với mặt phẳng thì (Q) đi qua điểm $M(-2; 1; -1)$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
---------	---------	---------	---------

a) Đúng.

b) Đúng. Ta có: $a = -1, b = 2, c = 3, d = 5$ nên bán kính mặt cầu (S) là $R = \sqrt{1+4+9-5} = 3$.

c) Đúng. Mặt cầu (P) có tâm $I(-1; 2; 3)$ và $d(I; (P)) = \frac{|-2 - 2 + 2 \cdot 3 - 11|}{\sqrt{4+1+4}} = 3 = R$ nên mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) .

d) Đúng. Mặt phẳng $(Q): 2x - y + 2z + D = 0$

$$Lạ có \quad d(I; (Q)) = \frac{|2+D|}{3} = R = 3 \Leftrightarrow |D+2| = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} D = 7 \\ D = -11 \end{cases}$$

Suy ra $(Q): 2x - y + 2z + 7 = 0 \Rightarrow 2 \cdot (-2) - 1 - 2 + 7 = 0$ nên (Q) đi qua điểm $M(-2; 1; -1)$

Câu 19. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(2; -1; 1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): 3x + y + z - 17 = 0$ tại điểm H . Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a) Phương trình đường thẳng IH là: $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{1}$.

b) Bán kính mặt cầu (S) bằng 11.

c) Phương trình mặt cầu (S) là $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z - 7 = 0$.

d) Hoành độ điểm H bằng 5.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

a) Phương trình đường thẳng IH là phương trình đường thẳng đi qua H và vuông góc với $(P): 3x + y + z - 17 = 0$.

Do đó phương trình đường thẳng IH là: $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{1}$.

b) Bán kính R của mặt cầu (S) chính là khoảng cách từ tâm I của mặt cầu (S) đến mặt phẳng

$$R = d(I, (P)) = \frac{|3 \cdot 2 - 1 + 1 - 17|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \sqrt{11}$$

bằng

c) Phương trình mặt cầu (S) tâm I có bán kính $R = \sqrt{11}$ là $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 11$ hay $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z - 5 = 0$

d) Lấy $H(3t+2, t-1, t+1) \in IH$.

Mặt khác, $H \in (P) \Rightarrow 3 \cdot (3t+2) + (t-1) + (t+1) - 17 = 0 \Leftrightarrow 11t - 11 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow H(5; 0; 2)$.

Câu 20. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x + y + z - 4 = 0$ và hai điểm $A(-1; 0; 1), B(1; -2; 3)$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a) Phương trình đường thẳng AB là: $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{1}$.

b) Mặt cầu đường kính AB có phương trình là $x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 4z - 2 = 0$.

c) Mặt cầu tâm A tiếp xúc với mặt phẳng (P) có đường kính bằng $\frac{6\sqrt{11}}{11}$.

d) Mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại điểm B và đi qua điểm A có bán kính bằng $\sqrt{11}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

a) Phương trình đường thẳng AB là: $\frac{x+1}{1+1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{3-1} \Leftrightarrow \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{2}$ hay $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{1}$.

b) Mặt cầu đường kính AB có tâm $I(0; -1; 2)$ và bán kính $R = \frac{AB}{2} = \sqrt{3}$ là $x^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 3$ hay $x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 4z + 2 = 0$.

c) Mặt cầu tâm A tiếp xúc với mặt phẳng (P) có bán kính chính là khoảng cách từ tâm I của mặt cầu (S) đến mặt phẳng bằng $d(A, (P)) = \frac{|3(-1) + 0 + 1 - 4|}{\sqrt{3^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{6\sqrt{11}}{11}$.

Vậy đường kính của mặt cầu là $\frac{12\sqrt{11}}{11}$.

d) Gọi tâm của mặt cầu (S) là $M(a, b, c)$.

Khi đó, $\overrightarrow{MB}(1-a, -2-b, 3-c)$.

(P) có vector pháp tuyến $n_{(P)} = (3; 1; 1)$.

Mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại điểm B nên $\overrightarrow{MB} \perp n_{(P)} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} = k \cdot n_{(P)}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-a = k \cdot 3 \\ -2-b = k \cdot (-1) \\ 3-c = k \cdot 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1-3k \\ b = -2-k \\ c = 3-k \end{cases}$$

Mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại điểm B và đi qua điểm A nên $MB = MA \Leftrightarrow MB^2 = MA^2$

$$\Leftrightarrow (1-a)^2 + (-2-b)^2 + (3-c)^2 = (a+1)^2 + b^2 + (c-1)^2 \Leftrightarrow (3k)^2 + (-k)^2 + (k)^2 = (2-3k)^2 + (-2-k)^2 +$$

$$\Leftrightarrow 11k^2 = 11k^2 - 12k + 12 \Leftrightarrow 12k = 12 \Leftrightarrow k = 1 \Rightarrow M(-2; -3; 2)$$

Vậy mặt cầu (S) có tâm $M(-2; -3; 2)$ và bán kính $MB = \sqrt{11}$.

$$d: \begin{cases} x = -t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

Câu 21. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2; 1; -1)$ và đường thẳng d . Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a) Một vectơ chỉ phương của d là $(-1; -1; -3)$.

b) Phương trình mặt phẳng qua A và chứa đường thẳng d là $4x + y + 2z - 7 = 0$.

c) Hình chiếu vuông góc của A trên d có tọa độ là $H(-1; 3; 4)$.

d) Mặt cầu tâm A và tiếp xúc với d có phương trình là $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2z - 8 = 0$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
--------	---------	--------	---------

a) Một vectơ chỉ phương của (d) là $(-1; 2; 1)$.

b) Ta có: $B(0; 1; 3)$ thuộc đường thẳng (d)

Mặt phẳng (Q) qua A và chứa đường thẳng d có vectơ chỉ phương là $\vec{u}_d = (-1; 2; 1); \vec{AB} = (-2; 0; 4)$

Nên $\vec{n}_Q = [\vec{u}_d; \vec{AB}] = (8; 2; 4)$ hay $\vec{n}_Q = (4; 1; 2)$

Phương trình mặt phẳng qua A và chứa đường thẳng d là $4(x - 2) + 1(y - 1) + 2(z + 1) = 0 \Leftrightarrow 4x + y + 2z - 7 = 0$.

c) Gọi H là hình chiếu của A trên d . Vì H thuộc d nên $H(-t; 1 + 2t; 3 + t)$.

Ta có $\vec{AH} = (-t - 2; 2t; 4 + t)$

Đường thẳng AH vuông góc với d nên $\vec{AH} \cdot \vec{u}_d = 0$

$$\Leftrightarrow (-t - 2) \cdot (-1) + 2t \cdot 2 + (4 + t) \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow 6t + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = -1$$

Vậy $H(1; -1; 2)$.

d) Bán kính mặt cầu là $AH = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$.

Mặt cầu tâm A và tiếp xúc với d có phương trình là $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2z - 8 = 0$

Câu 22. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x - 2)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 9$ và mặt phẳng $(P): 2x - y - 2z - 3 = 0$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(2; 0; -1)$ và bán kính bằng 9.

b) Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2; -1; -1)$.

c) Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (P) bằng 3.

d) Mặt cầu (S) cắt (P) theo giao tuyến là đường tròn (C) có bán kính bằng $2\sqrt{2}$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------------	---------------	---------------	----------------

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(2;0;-1)$ và bán kính bằng 3.

b) Mặt phẳng (P) không đi qua điểm $M(2;-1;-1)$.

c) Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (P) bằng $d(O,(P)) = \frac{|2 \cdot 0 - 0 - 2 \cdot 0 - 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = 1$

d) Khoảng cách từ tâm I mặt cầu (S) đến mặt phẳng (P) bằng $d(I,(P)) = \frac{|2 \cdot 2 - 0 + 2 \cdot 1 - 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = 1$

Mặt cầu (S) cắt (P) theo giao tuyến là đường tròn (C) có bán kính bằng $\sqrt{R^2 - [d(I,(Oxy))]^2} = \sqrt{3^2 - 1^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Câu 23. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z - 2 = 0$ cắt mặt phẳng (Oxy) theo giao tuyến là một đường tròn (C) . Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;-3)$.

b) Mặt cầu (S) có bán kính $R = 5$.

c) Đường tròn (C) có tâm $M(1;2;0)$.

d) Đường tròn (C) có bán kính bằng $\sqrt{5}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
----------------	---------------	----------------	---------------

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;-3)$.

b) Mặt cầu (S) có bán kính $R = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2 + 2} = 4$.

c) Gọi tâm của đường tròn (C) là $M \Rightarrow M(1;2;0)$

d) Khoảng cách từ tâm I mặt cầu (S) đến mặt phẳng (Oxy) bằng $d(I,(Oxy)) = \frac{|-3|}{\sqrt{1^2}} = 3$.

Mặt cầu (S) cắt (P) theo giao tuyến là đường tròn (C) có bán kính bằng $\sqrt{R^2 - [d(I,(Oxy))]^2} = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - 2y - z + 9 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 2z - 86 = 0$ cắt nhau theo giao tuyến là một đường tròn (C) . Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(-3;2;-1)$.

b) Mặt cầu (S) có bán kính $R = 10$.

c) Đường tròn (C) có bán kính bằng 6.

d) Đường tròn (C) có tâm $M(-1; 2; 3)$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
--------	---------	--------	---------

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(3; -2; 1)$.

b) Mặt cầu (S) có bán kính $R = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2 + 86} = 10$.

c) Khoảng cách từ tâm I mặt cầu (S) đến mặt phẳng $(P): 2x - 2y - z + 9 = 0$ bằng

$$d(I, (P)) = \frac{|2 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) - 1 + 9|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = 6$$

Mặt cầu (S) cắt (P) theo giao tuyến là đường tròn (C) có bán kính bằng $\sqrt{R^2 - d(I, (P))^2} = 10 - 6 = 4$.

d) Gọi tâm của đường tròn (C) là $M(a, b, c)$.

Khi đó, $\overline{MI}(3 - a, -2 - b, 1 - c)$.

(P) có vectơ pháp tuyến $\overline{n_{(P)}} = (2; -2; -1)$.

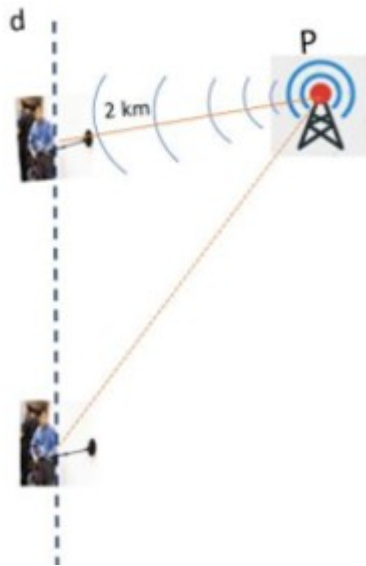
Mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 2z - 86 = 0$ cắt mặt phẳng $(P): 2x - 2y - z + 9 = 0$ theo giao tuyến là một đường tròn (C) nên $\overline{MI} \parallel \overline{n_{(P)}} \Leftrightarrow \overline{MI} = k \cdot \overline{n_{(P)}}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - a = k \cdot 2 \\ -2 - b = k \cdot (-2) \\ 1 - c = k \cdot (-1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 - 2k \\ b = -2 + 2k \\ c = 1 + k \end{cases} \Rightarrow M(3 - 2k; -2 + 2k; 1 + k).$$

Mặt khác, $M \in (P) \Rightarrow 2 \cdot (3 - 2k) - 2 \cdot (-2 + 2k) - (1 + k) + 9 = 0 \Leftrightarrow -9k + 18 = 0 \Leftrightarrow k = 2$
 $\Rightarrow M(-1; 2; 3)$

Câu 25. Một máy phát tín hiệu P được đặt cố định ở một địa điểm và ta có thể nhận được tín hiệu của máy phát này trong phạm vi của một mặt cầu với bán kính R của nó. Một người cầm máy dò tín hiệu A chuyển động trên đường thẳng d (như Hình hình vẽ)



Máy dò tín hiệu A có thể nhận được tín hiệu trong phạm vi của một mặt cầu với bán kính 2 km. Nếu chọn điểm đặt máy phát tín hiệu P là gốc tọa độ O của hệ trục tọa độ $Oxyz$, thì máy dò

A di chuyển theo đường thẳng có phương trình:
$$\begin{cases} x = 5 - t \\ y = 5 - t \\ z = 7 - 2t \end{cases}$$
 (trong đó $t(h)$ là thời gian chuyển động). Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

- a) Tại thời điểm $t = 1(h)$ máy dò tín hiệu A tại vị trí có tọa độ $(4; 4; 5)$.
- b) Tại thời điểm $t = 2, 5(h)$ máy dò tín hiệu A không nhận được tín hiệu từ máy phát P .
- c) Máy dò tín hiệu A gần máy phát tín hiệu P nhất lúc $4(h)$.
- d) Mặt cầu giới hạn phạm vi nhận tín hiệu của máy dò A tại thời điểm nó gần máy phát tín hiệu P nhất là mặt cầu có phương trình $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 4$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------

a) Tại thời điểm $t = 1(h)$ máy dò tín hiệu A tại vị trí có tọa độ $(4; 4; 5)$.

b) Tại thời điểm $t = 2, 5(h)$ máy dò tín hiệu A tại vị trí có tọa độ $(2, 5; 2, 5; 2)$ có khoảng cách đến máy phát tín hiệu P là $\frac{\sqrt{66}}{2} > 2$ nên không nhận được tín hiệu từ máy phát P .

c) Đường thẳng d đi qua điểm $M_0(5; 5; 7)$ và có vectơ chỉ phương $u = (1; 1; 2)$.

Vì $O(0; 0; 0)$ nên $\overrightarrow{OM} = (5; 5; 7)$ và $[\overrightarrow{OM}, u] = (-3; 3; 0)$.

Máy dò tín hiệu A gần máy phát tín hiệu P nhất lúc khoảng cách từ máy phát tín hiệu vuông góc

với đường thẳng d bằng $d(P, d) = \frac{\sqrt{(-3)^2 + 3^2 + 0^2}}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \sqrt{3}$.

Ta có khoảng cách đến máy phát tín hiệu P là $\sqrt{3}$ khi $\sqrt{(5 - t)^2 + (5 - t)^2 + (7 - 2t)^2} = \sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{6t^2 - 48t + 99} = \sqrt{3} \Leftrightarrow t = 4.$$

Vậy máy do tín hiệu A gần máy phát tín hiệu P nhất lúc $4(h)$.

d) Tại thời điểm $t = 4(h)$ máy dò tín hiệu A tại vị trí có tọa độ $(1; 1; -1)$.

Mặt cầu giới hạn phạm vi nhận tín hiệu của máy dò A tại thời điểm nó gần máy phát tín hiệu P nhất là mặt cầu đi qua $(1; 1; -1)$ và có bán kính bằng $\sqrt{3}$ có phương trình $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 3$.

Câu 26. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+4}{-2}$ và hai điểm $A(1; -3; 2), B(-3; 3; -2)$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a) Phương trình đường thẳng AB là $\frac{x-3}{2} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z-2}{2}$.

b) Phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, B và song song với d là $2x + 6y + 7z + 2 = 0$.

c) Phương trình mặt cầu đường kính AB là $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 13$.

d) Mặt cầu có tâm thuộc d và đi qua A, B có đường kính bằng 10.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------------	----------------	---------------	----------------

a) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-4; 6; -4)$

Đường thẳng AB có vectơ chỉ phương là $\vec{u}_{AB} = (2; -3; 2)$.

Phương trình đường thẳng AB là $\frac{x+3}{2} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z+2}{2}$.

b) Mặt phẳng (P) song song với d nên $\vec{u}_P = \vec{u}_d = (1; 2; -2)$

Vecto pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}_P = [\vec{u}_d; \overrightarrow{AB}] = (-2; -6; -7)$

Phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, B và song song với d là $2x + 6y + 7z + 2 = 0$.

c) Tâm I của mặt cầu là trung điểm AB .

$$\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1-3}{2} = -1 \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-3+3}{2} = 0 \\ z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{2-2}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow I(-1; 0; 0)$$

Nên ta có

$$\text{Bán kính mặt cầu } R = IA = \sqrt{(1+1)^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{17}$$

Vậy phương trình mặt cầu đường kính AB là $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = 17$.

d) Vì tâm I của mặt cầu thuộc đường thẳng d . Nên gọi $I(t+2; 2t+2; -2t-4)$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } IA = IB &\Leftrightarrow \sqrt{((t+2)-1)^2 + ((2t+2)+3)^2 + ((-2t-4)-2)^2} \\ &= \sqrt{((t+2)+3)^2 + ((2t+2)-3)^2 + ((-2t-4)+2)^2} \\ &\Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow I(1; 0; -2) \Rightarrow R = IA = 5 \end{aligned}$$

Vậy mặt cầu có tâm thuộc d và đi qua A, B có đường kính bằng 10.

Câu 27. Trong không gian toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 6z + 10 = 0$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

- a)** Toạ độ tâm I của mặt cầu (S) là $I(1; -2; 3)$.
- b)** Bán kính mặt cầu (S) là $R = 2$.
- c)** Mặt cầu (S) đi qua điểm $A(0; 4; -3)$.
- d)** Điểm $B(1; -2; -5)$ nằm phía bên ngoài mặt cầu.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------------	----------------	---------------	----------------

a) Toạ độ tâm I của mặt cầu (S) là $I(-1; 2; -3)$.

b) Bán kính mặt cầu là $R = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-3)^2 - 10} = 2$.

c) Thay $x=0; y=4; z=-3$ vào phương trình mặt cầu ta được $0^2 + (4)^2 + (-3)^2 + 2 \cdot 0 - 4 \cdot (4) + 6 \cdot (-3) + 10 = 1$. Vậy (S) không đi qua điểm $A(0; 4; -3)$.

d) $BI = \sqrt{(-1-1)^2 + (2+2)^2 + (-3+5)^2} = 2\sqrt{6} > 2 \Rightarrow BI > R$

Vậy $B(5; -2; -3)$ nằm phía bên ngoài mặt cầu.

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét), một trạm thu phát sóng điện thoại di động được đặt ở vị trí $I(1; 3; 7)$. Trạm thu phát sóng đó được thiết kế với bán kính phủ sóng là 3 km. Các mệnh đề sau đúng hay sai.

- a)** Phương trình mặt cầu (S) để mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng trong không gian là $(x+1)^2 + (y+3)^2 + (z+7)^2 = 9$
- b)** Điểm $A(2; 2; 7)$ nằm ngoài mặt cầu (S) .
- c)** Nếu người dùng điện thoại ở vị trí có toạ độ $(2; 2; 7)$ thì có thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng đó.
- d)** Nếu người dùng điện thoại ở vị trí có toạ độ $(5; 6; 7)$ thì không thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng đó.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------------	---------------	----------------	----------------

a) Sai. Phương trình mặt cầu (S) tâm $I(1;3;7)$ bán kính 3 km mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng trong không gian là $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-7)^2 = 9$.

b) Sai. Ta có: $IA = \sqrt{(2-1)^2 + (2-3)^2 + (7-7)^2} = \sqrt{2} < 3$ nên điểm A nằm trong mặt cầu.

c) Đúng. Vì điểm A nằm trong mặt cầu nên người dùng điện thoại ở vị trí có tọa độ $(2, 2, 7)$ có thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng đó.

d) Đúng. Ta có: $IB = \sqrt{(5-1)^2 + (6-3)^2 + (7-7)^2} = 5 > 3$ nên điểm B nằm ngoài mặt cầu. Vậy người dùng điện thoại ở vị trí có tọa độ $(5, 6, 7)$ không thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng đó.

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo mét), một ngọn hải đăng được đặt ở vị trí $I(17; 20; 45)$. Biết rằng ngọn hải đăng đó được thiết kế với bán kính phủ sóng là 4 km.

a) Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng trên biển của hải đăng là: $(x-17)^2 + (y-20)^2 + (z-45)^2 = 4000^2$.

b) Nếu người đi biển ở vị trí $M(18; 21; 50)$ thì không thể nhìn thấy được ánh sáng từ ngọn hải đăng.

c) Nếu người đi biển ở vị trí $N(4019; 21; 44)$ thì có thể nhìn thấy được ánh sáng từ ngọn hải đăng.

d) Nếu hai người đi biển ở vị trí có thể nhìn thấy được ánh sáng từ ngọn hải đăng thì khoảng cách giữa hai người đó không quá 8

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
--------	--------	---------	---------

a) Đúng. Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng trên biển của hải đăng là: $(x-17)^2 + (y-20)^2 + (z-45)^2 = 4000^2$

b) Sai. Ta có: $IM = \sqrt{(18-17)^2 + (21-20)^2 + (50-45)^2} = \sqrt{27} < 4000$ nên người đi biển ở vị trí $M(18; 21; 50)$ có thể nhìn thấy được ánh sáng từ ngọn hải đăng.

c) Sai. Ta có: $IN = \sqrt{(4019-17)^2 + (21-20)^2 + (44-45)^2} \approx 4002 > 4000$ nên người đi biển ở vị trí $N(4019; 21; 44)$ không thể nhìn thấy được ánh sáng từ ngọn hải đăng.

d) Đúng. Vì đường kính của mặt cầu trên bằng 8000 m hay 8 km nên hai người đi biển ở vị trí có thể nhìn thấy được ánh sáng từ ngọn hải đăng thì khoảng cách giữa hai người đó không quá 8 km.

Câu 30. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; -5), B(-3; 0; 1)$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a) Trung điểm của AB là $I(-1; 1; -2)$.

b) Phương trình mặt cầu đường kính AB là $(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 14$.

c) Phương trình mặt cầu tâm A và đi qua điểm B là $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 10z - 14 = 0$.

d) Mặt cầu (S) có tâm thuộc trục Ox và đi qua A, B có bán kính bằng $5\sqrt{5}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

$$\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1-3}{2} = -1 \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2+0}{2} = 1 \\ z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{-5+1}{2} = -2 \end{cases}$$

a) Tọa độ trung điểm I của AB là

Vậy trung điểm của AB là $I(-1; 1; -2)$.

b) Tâm của mặt cầu đường kính AB là trung điểm $I(-1; 1; -2)$.

Bán kính $R = IA = \sqrt{(1+1)^2 + (2-1)^2 + (-5+2)^2} = \sqrt{14}$.

Phương trình mặt cầu đường kính AB là $(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 14$.

c) Bán kính $AB = \sqrt{(-3-1)^2 + (0-2)^2 + (1+5)^2} = 2\sqrt{14}$

Phương trình mặt cầu tâm A và đi qua B là $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 10z - 26 = 0$

d) Vì tâm I của mặt cầu thuộc trục Ox . Nên gọi $I(a; 0; 0)$

Ta có: $IA = IB \Leftrightarrow \sqrt{(1-a)^2 + 2^2 + (-5)^2} = \sqrt{(-3-a)^2 + 1^2} \Leftrightarrow a = \frac{5}{2} \Rightarrow I\left(\frac{5}{2}; 0; 0\right)$

Vậy mặt cầu có tâm thuộc Oy và đi qua A, B có bán kính bằng $\frac{5\sqrt{5}}{2}$.

Câu 31. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 3)$ và $B(-1; 3; 5)$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a) Mặt cầu tâm O và đi qua điểm A có phương trình là: $x^2 + y^2 + z^2 = 14$.

b) Phương trình đường thẳng AB là $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{3}$.

c) Phương trình mặt cầu đường kính AB là: $x^2 + y^2 + z^2 - 5y - 8z + 20 = 0$.

d) Mặt cầu (S) có tâm I thuộc trục Oy và đi qua A, B có bán kính bằng 9.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

a) Bán kính mặt cầu là $R = OA = \sqrt{14}$ Mặt cầu tâm O và đi qua điểm A có phương trình là: $x^2 + y^2 + z^2 = 14$.

b) Vector chỉ phương của đường thẳng AB là $\vec{AB} = (-2; 1; 2)$

Phương trình đường thẳng AB là $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{2}$

c) Tâm I của mặt cầu là trung điểm AB . Nên ta có

$$\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-1+1}{2} = 1 \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2} \\ z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{3+5}{2} = 4 \end{cases} \Rightarrow I\left(1; \frac{5}{2}; 4\right)$$

Bán

kính mặt cầu $R = IA = \sqrt{(0-1)^2 + \left(\frac{5}{2}-2\right)^2 + (4-3)^2} = \frac{3}{2}$

Vậy phương trình mặt cầu đường kính AB là $x^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 + (z-4)^2 = \frac{9}{4}$.
 $\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 5y - 8z + 20 = 0$

d) Vì tâm I của mặt cầu thuộc trục Oy . Nên gọi $I(0; b; 0)$

Ta có: $IA = IB \Leftrightarrow \sqrt{1^2 + (2-b)^2 + 3^2} = \sqrt{(-1)^2 + (3-b)^2 + 5^2}$

$\Leftrightarrow b = \frac{21}{2} \Rightarrow I\left(0; \frac{21}{2}; 0\right)$

Vậy mặt cầu có tâm thuộc Oy và đi qua A, B có bán kính bằng $\frac{\sqrt{329}}{2}$.

Câu 32. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(6; -2; 3), B(2; 0; -1), C(0; 1; 6), D(4; 1; 0)$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a) Đường thẳng BC có phương trình là: $\frac{x-2}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{7}$.

b) Mặt cầu đường kính AB có phương trình là $(x+4)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 9$.

c) Phương trình mặt phẳng (ABC) là: $x + 2y - 2 = 0$.

d) Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ có bán kính bằng $\sqrt{17}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
----------------	---------------	---------------	----------------

a) $BC = (-2; 1; 7)$

Đường thẳng BC có phương trình là: $\frac{x-2}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{7}$.

b) Tâm I của mặt cầu là trung điểm AB .

$$\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{6+2}{2} = 4 \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-2+0}{2} = -1 \Rightarrow I(4; -1; 1) \\ z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{3-1}{2} = 1 \end{cases}$$

Nên ta có

$$\text{Bán kính mặt cầu } R = IA = \sqrt{(4-6)^2 + (-1+2)^2 + (1-3)^2} = 3$$

Vậy phương trình mặt cầu đường kính AB là $(x-4)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 9$.

c) Mặt phẳng (ABC) có vectơ chỉ phương là $\vec{AB}; \vec{AC}$.

$$\text{Nên } \vec{n}_{(ABC)} = [\vec{AB}; \vec{AC}] = (18; 36; 0) \text{ hay } \vec{n}_{(ABC)} = (1; 2; 0)$$

Phương trình mặt phẳng (ABC) là: $1(x-2) + 2(y-0) + 0(z+1) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 2 = 0$.

d) Gọi $I(x; y; z)$ là tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD \Rightarrow IA = IB = IC = ID$

$$\Rightarrow IA^2 = IB^2 = IC^2 = ID^2$$

$$\Rightarrow (x-6)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = x^2 + (y-1)^2 + (z-6)^2$$

$$\text{Và } (x-6)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = (x-4)^2 + (y-1)^2 + z^2$$

$$\Rightarrow 2x - y - z = 2, 2x - y + 2z = 11, 2x - 3y + 3z = 16 \Rightarrow x = 2, y = -1, z = 3$$

Vậy tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là $I(2; -1; 3) \Rightarrow R = IA = \sqrt{17}$.

Câu 33. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(3; 0; 5), B(1; 4; 3), C(-1; 2; -1), D(3; 2; 3)$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a) Đường thẳng AB có phương trình là: $\frac{x-3}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-5}{1}$.

b) Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (BCD) là $n(1; -1; 1)$.

c) Mặt cầu tâm A tiếp xúc với mặt phẳng (BCD) có bán kính là $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

d) Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ có bán kính bằng $\sqrt{5}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

a) Đúng.

Đường thẳng AB đi qua điểm A và có vectơ chỉ phương $\vec{AB}(-2; 4; -2)$ có phương trình là $\frac{x-3}{-2} = \frac{y}{4} = \frac{z-5}{-2} \Leftrightarrow \frac{x-3}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-5}{1}$

b) Sai.

Mặt phẳng (BCD) có 2 vectơ chỉ phương là $\vec{BC}(-2; -2; -4), \vec{BD}(2; -2; 0)$

$\Rightarrow$ Một vector pháp tuyến của mặt phẳng (BCD) là $\vec{n} = [\vec{BC}, \vec{BD}] = (-8; -8; 8) = -8 \cdot (1; 1; -1)$.

c) Đúng.

Mặt phẳng (BCD) đi qua điểm $D(3; 2; 3)$ và có vector pháp tuyến $\vec{n}(1; 1; -1)$ có phương trình là $1(x-3) + 1(y-2) - 1(z-3) = 0 \Leftrightarrow x + y - z - 2 = 0$

Vì mặt cầu tâm A tiếp xúc với mặt phẳng (BCD) nên ta có

$$R = d(A, (P)) = \frac{|3+0-5-2|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

d) Sai.

$$\begin{cases} \vec{AB} \cdot \vec{OI} = \frac{OB^2 - OA^2}{2} \\ \vec{AC} \cdot \vec{OI} = \frac{OC^2 - OA^2}{2} \\ \vec{AD} \cdot \vec{OI} = \frac{OD^2 - OA^2}{2} \end{cases}$$

Giải hệ phương trình

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-2; 4; -2) \cdot (x; y; z) = -4 \\ (-4; 2; -6) \cdot (x; y; z) = -14 \\ (0; 2; -2) \cdot (x; y; z) = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 3 \end{cases}$$

Suy ra $I(-1; 0; 3)$ và bán kính mặt cầu là $R = IA = 2\sqrt{5}$.

Câu 34. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; 0; 1), B(1; 0; 0), C(1; 1; 1)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 2 = 0$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a) Độ dài đoạn thẳng AB bằng 2.

b) Phương trình mặt phẳng (ABC) là: $x + y - z - 1 = 0$.

c) Mặt cầu tâm A và tiếp xúc với mặt phẳng (P) có bán kính bằng $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

d) Gọi (S) mặt cầu đi qua A, B, C và có tâm $I \in (P)$ thì bán kính mặt cầu (S) bằng 2.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

a) Sai. $\vec{AB}(-1; 0; -1) \Rightarrow AB = \sqrt{2}$

b) Đúng.

Mặt phẳng (ABC) có 2 vector chỉ phương là $\vec{AB}(-1; 0; -1), \vec{AC}(-1; 1; 0)$

$\Rightarrow$ Một vector pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là $\vec{n} = [\vec{AB}, \vec{AC}] = (1; 1; -1)$

Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $B(1; 0; 0)$ và có vector pháp tuyến $\vec{n}(1; 1; -1)$ có phương trình là $x - 1 + y - z = 0 \Leftrightarrow x + y - z - 1 = 0$

c) Đúng.

Vì mặt cầu tâm tâm A và tiếp xúc với mặt phẳng (P) nên ta có

$$R = d(A, (P)) = \frac{|2+0+1-2|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

d) Sai.

$$\begin{cases} \vec{AB} \cdot \vec{OI} = \frac{OB^2 - OA^2}{2} \\ \vec{AC} \cdot \vec{OI} = \frac{OC^2 - OA^2}{2} \\ x + y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-1; 0; -1)(x; y; z) = -2 \\ (-1; 1; 0)(x; y; z) = -1 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}.$$

Suy ra $I(1; 0; 1)$, bán kính mặt cầu $R = IA = 1$.

Khi đó phương trình mặt cầu là $(S): (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$.

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2; 4; 1), B(3; 1; -3), C(-5; 0; 0)$ và mặt phẳng $(P): 2x + y - z + 3 = 0$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a) Một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}_{(P)} = (2; 1; 3)$.

b) Phương trình đường thẳng BC là: $\frac{x-5}{8} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-3}$.

c) Phương trình mặt cầu đường kính AB là: $x^2 + y^2 + z^2 - x - 5y + 2z - 5 = 0$.

d) Gọi (S) mặt cầu đi qua A, B, C và có tâm $I \in (P)$ thì bán kính mặt cầu (S) bằng 7.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------------	---------------	----------------	----------------

a) Sai.

Một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}_{(P)} = (2; 1; -1)$.

b) Sai.

Ta có $\vec{BC} = (-8; -1; 3) = -1(8; 1; -3)$.

Phương trình đường thẳng BC đi qua điểm C và có vector chỉ phương $\vec{u}_{BC}(8; 1; -3)$ là

$$\frac{x+5}{8} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-3}.$$

c) Đúng.

Mặt cầu đường kính AB có

+) Tâm $I\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}; -1\right)$

+) Bán kính $R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{5^2 + (-3)^2 + (-4)^2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow R^2 = \frac{25}{2}$

Suy ra phương trình mặt cầu đường kính AB là: $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 + (z + 1)^2 = \frac{25}{2}$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - x - 5y + 2z - 5 = 0$

d) Đúng.

$$\begin{cases} \vec{AB} \cdot \vec{OI} = \frac{OB^2 - OA^2}{2} \\ \vec{AC} \cdot \vec{OI} = \frac{OC^2 - OA^2}{2} \\ 2x + y - z + 3 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình

$\Leftrightarrow \begin{cases} (5; -3; -4)(x; y; z) = -1 \\ (-3; -4; -1)(x; y; z) = 2 \\ 2x + y - z = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{cases}$

Suy ra $I(1; -2; 3)$, bán kính mặt cầu $R = IA = 7$.

Câu 36. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - 2y + z + 3 = 0$ và mặt cầu $(S): (x - 1)^2 + (y + 3)^2 + z^2 = 9$ và đường thẳng $d: \frac{x}{-2} = \frac{y + 2}{1} = \frac{z + 1}{2}$.

a) Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại 2 điểm phân biệt.

b) Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) .

c) Mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) không có điểm chung.

d) Đường thẳng d cắt mặt phẳng (P) tại một điểm.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -3; 0)$, bán kính $R = 3$.

Phương trình tham số của đường thẳng $d: \begin{cases} x = -2t \\ y = -2 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$.

Xét hệ phương trình $\begin{cases} x = -2t \\ y = -2 + t \\ z = -1 + 2t \\ (x-1)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow 9t^2 + 2t - 6 = 0 \quad (1)$.

Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt nên d cắt (S) tại 2 điểm phân biệt.

$d(I, (P)) = \frac{|2 \cdot 1 - 2 \cdot (-3) + 0 + 3|}{3} = \frac{11}{3} > R \Rightarrow (P)$ và (S) không có điểm chung.

Xét hệ phương trình $\begin{cases} x = -2t \\ y = -2 + t \\ z = -1 + 2t \\ 2x - 2y + z + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow t = \frac{3}{2}$. d cắt (P) tại một điểm.