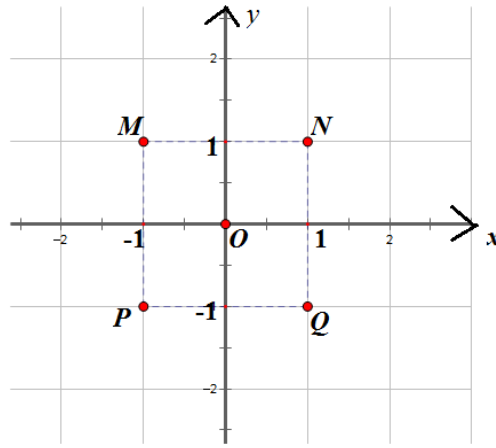


DẠNG 2**Bài toán quy về giải PT, HPT và điểm biểu diễn số phức****1. PHẦN ĐỀ BÀI**

- Câu 1:** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z - (6 + 8i)| = 2$ và $z \cdot \bar{z} = 64$.
A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.
- Câu 2:** Cho số thực x, y thỏa mãn $(2x - y)i + y(1 - 2i) = 3 + 7i$ với i là đơn vị ảo. Giá trị của $x^2 - xy$ bằng
A. 30. **B.** 40. **C.** 10. **D.** 20.
- Câu 3:** Cho số phức z thỏa mãn $3\bar{z} + (1 + i)z = 1 - 5i$. Tìm môđun của z
A. $|z| = 5$. **B.** $|z| = \sqrt{5}$. **C.** $|z| = \sqrt{13}$. **D.** $|z| = \sqrt{10}$.
- Câu 4:** Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $(1 + 2i)^2 z + \bar{z} = 4i - 20$. Tìm $|z|$.
A. $|z| = 25$. **B.** $|z| = 7$. **C.** $|z| = 4$. **D.** $|z| = 5$.
- Câu 5:** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $(1 + i)z + (2 - i)\bar{z} = 13 + 2i$?
A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.
- Câu 6:** Cho số phức z thỏa mãn: $z(1 - 2i) + \bar{z} \cdot i = 15 + i$. Tìm môđun của số phức z ?
A. $|z| = 5$. **B.** $|z| = 4$. **C.** $|z| = 2\sqrt{5}$. **D.** $|z| = 2\sqrt{3}$.
- Câu 7:** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn điều kiện $|z \cdot \bar{z} + z| = 2$ và $|z| = 2$?
A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.
- Câu 8:** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z - 2 + 3i| = |z + 1 - i|$ và $|z|^2 + 2(z + \bar{z}) = 5$?
A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.
- Câu 9:** Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa $(2 + 3i)z + 2\bar{z} = 16 + 3i$. Tính giá trị biểu thức $P = 3a + b$.
A. $P = -11$. **B.** $P = 17$. **C.** $P = -1$. **D.** $P = 1$.
- Câu 10:** Cho số phức z thỏa mãn $(3 + i) \cdot z - i \cdot \bar{z} = 7 - 6i$. Môđun của số phức z bằng
A. 25. **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** 5.
- Câu 11:** Cho số phức z thỏa mãn $z(1 + 2i) - \bar{z}(2 - 3i) = -4 + 12i$. Tìm tọa độ điểm M biểu diễn số phức z .
A. $M(3; 1)$. **B.** $M(3; -1)$. **C.** $M(-1; 3)$. **D.** $M(1; 3)$.
- Câu 12:** Cho số phức z thỏa mãn $(1 + 3i)z - 3\bar{z} = -5 + 7i$. Điểm nào sau đây trong các điểm M, N, P, Q biểu diễn cho số phức z ?



- A. Điểm M . B. Điểm N . C. Điểm P . D. Điểm Q .

Câu 13: Cho số phức z thỏa mãn $(2i+3)z - (1-i)\bar{z} = -2+8i$. Khoảng cách từ điểm biểu diễn cho số phức z trên mặt phẳng tọa độ Oxy đến điểm $M(1;2)$ bằng

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 14: Cho các số thực a, b thỏa mãn $i[2(a-5)-7i] = b + (a+3)i$, với i là đơn vị ảo. Tính $a-b$

- A. 2. B. 6. C. 12. D. 3.

Câu 15: Cho số phức z thỏa mãn $|z| - 2\bar{z} = -7 + 3i + z$. Tính $|z|$.

- A. $|z| = 5$. B. $|z| = 3$. C. $|z| = \frac{13}{4}$. D. $|z| = \frac{25}{4}$.

Câu 16: Tính mô đun của số phức z thỏa mãn $z(1+2i) + \bar{z}(1-i) + 4-i = 0$ với i là đơn vị ảo.

- A. $\sqrt{6}$. B. $\sqrt{5}$. C. $\sqrt{2}$. D. $\sqrt{3}$.

Câu 17: Tìm tập hợp T gồm tất cả các số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $|z| = \sqrt{2}$ và z^2 là số thuần ảo.

- A. $T = \{-1-i; 1-i; -1+i; 1+i\}$. B. $T = \{1-i; 1+i\}$.
C. $T = \{-1+i\}$. D. $T = \{-1-i\}$.

Câu 18: Cho số phức $z = a+bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $(1+i)z + 2\bar{z} = 3+2i$. Tính $P = a+b$.

- A. $P = 1$. B. $P = -\frac{1}{2}$. C. $P = \frac{1}{2}$. D. $P = -1$.

Câu 19: Cho số phức $z = a+bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z + 1 + 3i - |z|i = 0$. Tính $S = 2a + 3b$.

- A. $S = -6$. B. $S = 6$. C. $S = -5$. D. $S = 5$.

Câu 20: Gọi S là tập hợp các số phức z thỏa mãn điều kiện $z^4 = |z|$. Số phần tử của S là

- A. 7. B. 6. C. 5. D. 4.

Câu 21: Cho số phức $z = a+bi$ ($a, b \in \mathbb{R}; a, b \neq 0$) thỏa mãn $z + 4\bar{z} = \left(\frac{5}{3} - 2\sqrt{2}i\right)|z|$. Tính $S = \frac{2a+b}{2a-b}$.

- A. $S = -2\sqrt{2} - 3$. B. $S = 2\sqrt{2} - 2$. C. $S = 2 - 2\sqrt{2}$. D. $S = 2\sqrt{2} + 3$.

Câu 22: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|(z - 2 + 3i) + 4i = (4 + 5i)z$.

- A. 1. B. 2. C. 4. D. 3.

Câu 23: Giả sử z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $|2 + i|z|z - 1 - 2i|z| = |1 + 3i|$ và $|z_1 - z_2| = 1$. Tính $M = |2z_1 + 3z_2|$.

- A. $M = \sqrt{19}$. B. $M = 19$. C. $M = 25$. D. $M = 5$.

Câu 24: Tìm mô đun của số phức số z biết $(2z - 1)(1 + i) + (\bar{z} + 1)(1 - i) = 2 - 2i$.

- A. $\frac{1}{9}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. C. $\frac{2}{9}$. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 25: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|^2 = |z + \bar{z}| + |z - \bar{z}|$ và z^2 là số thuần ảo.

- A. 4. B. 2. C. 3. D. 5.

Câu 26: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $3|z + \bar{z}| + 2|z - \bar{z}| = 12$ và $|z + 2 - 3i| = |\bar{z} - 4 + i|$?

- A. 1. B. 4. C. 3. D. 2.

Câu 27: Cho số phức z không phải là số thực và $\frac{z^2 - 2z + 4}{z^2 + 2z + 4}$ là số thực. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = |z^2|$?

- A. 0. B. 2. C. 4. D. 8.

Câu 28: Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 5$ và $|z + 3| = |z + 3 - 10i|$. Tìm số phức $w = z - 4 + 3i$.

- A. $w = -3 + 8i$. B. $w = 1 + 3i$. C. $w = -1 + 7i$. D. $w = -4 + 8i$.

Câu 29: Cho các số phức z thỏa mãn hai điều kiện $|z| = \sqrt{2}$ và z^2 là số thuần ảo. Tổng bình phương phần thực của tất cả các số phức z đó bằng

- A. 5. B. 4. C. 2. D. 3.

Câu 30: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z - 1|^2 + |z - \bar{z}|i + (z + \bar{z})i^{2019} = 1$?

- A. 4. B. 2. C. 1. D. 3.

Câu 31: Trong các số phức z thỏa mãn $|z + 4 - 3i| + |z - 8 - 5i| = 2\sqrt{38}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z - 2 - 4i|$.

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{5}{2}$. C. 2. D. 1.

Câu 32: Trong mặt phẳng Oxy , tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $2|z - 1| = |z - \bar{z} + 2|$ là hình gồm:

- A. hai đường thẳng. B. hai đường tròn. C. một đường tròn. D. một đường thẳng.

Câu 33: Cho số phức z thỏa mãn $|3z + i|^2 \leq z\bar{z} + 9$. Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức ω thỏa mãn $\omega = \bar{z} + 1 - i$

- A. Hình tròn $(x - 1)^2 + \left(y + \frac{5}{8}\right)^2 \leq \frac{73}{64}$. B. Đường tròn $(x - 1)^2 + \left(y + \frac{5}{8}\right)^2 \leq \frac{73}{64}$.

C. Đường tròn $(x-1)^2 + (y+3)^2 \leq 9$.

D. Hình tròn $(x-1)^2 + (y+3)^2 \leq 9$.

Câu 34: Biết phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ nhận $z_1 = -1 + i$ và $z_2 = 1 + \sqrt{2}i$ là nghiệm. Tính $a + b + c + d$.

A. 10.

B. 9.

C. -7.

D. 0.

Câu 35: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để có đúng 4 số phức z thỏa mãn đồng thời các điều kiện $|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = |z^2|$ và $|z| = m$.

A. $\{2; 2\sqrt{2}\}$.

B. $[2; 2\sqrt{2}]$.

C. $\{2\}$.

D. $(2; 2\sqrt{2})$.

Câu 36: Cho các số phức z thỏa mãn $|z - 2i^{2020}| = |\bar{z} - 1 + 2i|$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = 2\bar{z} - 1 + 4i$ trên mặt phẳng tọa độ là một đường thẳng. Khoảng cách từ $I(2; -3)$ đến đường thẳng đó bằng

A. $\frac{10\sqrt{3}}{3}$.

B. $\frac{18\sqrt{5}}{5}$.

C. $\frac{10\sqrt{5}}{5}$.

D. $\frac{18\sqrt{13}}{13}$.

Câu 37: Hình phẳng giới hạn bởi tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|z - 3| + |z + 3| = 10$ có diện tích bằng

A. 12π .

B. 20π .

C. 15π .

D. 25π .

Câu 38: Cho số phức z có $|z| = 2$. Biết tập hợp biểu diễn các số phức $w = 3 + i - (3 - 4i)z$ là một đường tròn, bán kính đường tròn đó bằng

A. $5\sqrt{2}$.

B. $5\sqrt{5}$.

C. 10.

D. $2\sqrt{5}$.

Câu 39: Cho số phức z thỏa mãn $(|z| + i)z = \sqrt{2}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$.

B. $\frac{3}{2} < |z| < \frac{5}{2}$.

C. $|z| < \frac{1}{2}$.

D. $\frac{5}{2} < |z| < \frac{7}{2}$.

Câu 40: Cho số phức $z = m + 3 + (m^2 - 1)i$, với m là tham số thực thay đổi. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thuộc đường cong (C) . Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục hoành.

A. $\frac{2}{3}$.

B. $\frac{8}{3}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{4}{3}$.

Câu 41: Cho hai số phức z_1, z_2 khác 0, thỏa mãn $z_1^2 + z_2^2 = z_1 z_2$. M, N lần lượt là hai điểm biểu diễn số phức z_1, z_2 trên mặt phẳng Oxy. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Tam giác OMN nhọn và không đều.B. Tam giác OMN đều.C. Tam giác OMN tù.D. Tam giác OMN vuông.

Câu 42: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 2 + 3i| \leq 3$. Trong mặt phẳng Oxy, tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = 2z + 1 - i$ là hình tròn có diện tích

A. $S = 25\pi$.

B. $S = 16\pi$.

C. $S = 9\pi$.

D. $S = 36\pi$.

Câu 43: Cho số phức z thỏa mãn $(z + 1 - 3i)(\bar{z} + 1 + 3i) = 25$. Biết tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z là một đường tròn có tâm $I(a; b)$ và bán kính c . Tổng $a + b + c$ bằng

A. 9.

B. 3.

C. 2.

D. 7.

Câu 44: Cho các số phức z_1, z_2 thỏa mãn phương trình $|z - 2 - 3i| = 5$ và $|z_1 - z_2| = 6$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = z_1 + z_2$ là một đường tròn. Tính bán kính đường tròn đó.

A. $R = 8$.B. $R = 4$.C. $R = 2\sqrt{2}$.D. $R = 2$.

Câu 45: Cho các số phức z thỏa mãn $|z - 2i^{2020}| = |\bar{z} - 1 + 2i|$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = 2\bar{z} - 1 + 4i$ trên mặt phẳng tọa độ là một đường thẳng. Khoảng cách từ $I(2; -3)$ đến đường thẳng đó bằng

A. $\frac{18\sqrt{5}}{5}$.B. $\frac{18\sqrt{13}}{13}$.C. $\frac{10\sqrt{3}}{3}$.D. $\frac{10\sqrt{5}}{5}$.

Câu 46: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 3 + 4i| \leq 2$. Trong mặt phẳng Oxy tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = 2z + 1 - i$ là hình tròn có diện tích là

A. $S = 25\pi$.B. $S = 9\pi$.C. $S = 12\pi$.D. $S = 16\pi$.

Câu 47: Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại 4 số phức z thỏa mãn $|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = 2$ và $z(\bar{z} + 2) - (z + \bar{z}) - m$ là số thuần ảo. Tổng các phần tử của S là.

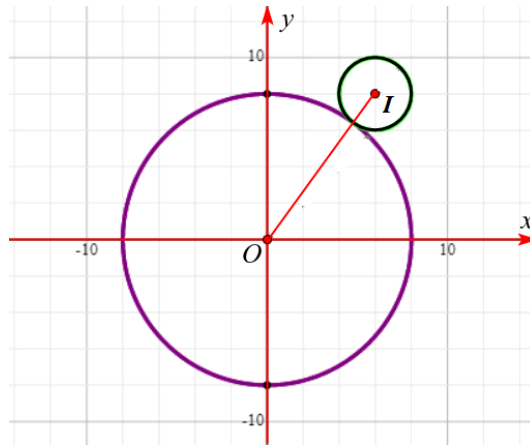
A. $\sqrt{2} + 1$.B. $\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}}$.C. $\frac{3}{2}$.D. $\frac{1}{2}$.

II. PHẦN HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT**BẢNG ĐÁP ÁN**

1. D	2. B	3. D	4. D	5. D	6. A	7. C	8. C	9. C	10. C
11. B	12. B	13. A	14. B	15. A	16. B	17. A	18. D	19. A	20. C
21. A	22. A	23. A	24. B	25. D	26. D	27. C	28. C	29. B	30. D
31. D	32. A	33. A	34. B	35. A	36. C	37. B	38. C	39. A	40. C
41. B	42. D	43. D	44. A	45. D	46. D	47. C			

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT**Câu 1: Chọn D**Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} |z - (6 + 8i)| = 2 \\ z \cdot \bar{z} = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-6)^2 + (y-8)^2 = 4 \quad (1) \\ x^2 + y^2 = 64 \quad (2) \end{cases}$$

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy thì:(1) là phương trình của đường tròn (C_1) có tâm $I(6;8)$, bán kính $R_1 = 2$.(2) là phương trình của đường tròn (C_2) có tâm $O(0;0)$, bán kính $R_2 = 8$.Vì $OI = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 = R_1 + R_2$ nên đường tròn (C_1) và (C_2) tiếp xúc ngoài nhau như hình vẽ.

Suy ra hệ phương trình (1), (2) có nghiệm duy nhất.

Vậy có đúng 1 số phức thỏa mãn ycbt.

Chú ý: Ta có thể tìm nghiệm của hệ phương trình (1), (2) như sau:

$$\text{Hệ (1), (2)} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 12x + 96 - 16y = 0 \\ x^2 + y^2 - 64 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4y - 40 = 0 \\ x^2 + y^2 - 64 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{24}{5} \\ y = \frac{32}{5} \end{cases} \Rightarrow z = \frac{24}{5} + \frac{32}{5}i.$$

Câu 2: Chọn B

$$\text{Ta có } (2x - y)i + y(1 - 2i) = 3 + 7i \Leftrightarrow y - 3 + (2x - 3y - 7)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y - 3 = 0 \\ 2x - 3y - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 - xy = 40.$$

Câu 3: Chọn D

Gọi $z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi$

$$3\bar{z} + (1+i)z = 1-5i \Leftrightarrow 3(a-bi) + (1+i)(a+bi) = 1-5i$$

$$\Leftrightarrow 3a - 3bi + a + bi + ai - b = 1 - 5i \Leftrightarrow (4a - b) + (a - 2b)i = 1 - 5i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a - b = 1 \\ a - 2b = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow z = 1 + 3i \Rightarrow |z| = \sqrt{10}$$

Câu 4: Chọn D

Gọi $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } (1+2i)^2 z + \bar{z} = 4i - 20 \Leftrightarrow (1+4i-4)(a+bi) + a-bi = 4i-20$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3a - 4b + a = -20 \\ 4a - 3b - b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow z = 4 + 3i \Rightarrow |z| = 5.$$

Câu 5: Chọn D

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$), khi đó ta có:

$$(1+i)z + (2-i)\bar{z} = 13 + 2i \Leftrightarrow (1+i)(x+yi) + (2-i)(x-yi) = 13 + 2i$$

$$\Leftrightarrow x - y + (x+y)i + 2x - y - (x+2y)i = 13 + 2i \Leftrightarrow 3x - 2y - yi = 13 + 2i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 13 \\ -y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}. \text{ Vậy } z = 3 - 2i.$$

Câu 6: Chọn A

Đặt $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$), ta có:

$$z(1-2i) + \bar{z}.i = 15 + i \Leftrightarrow (a+bi)(1-2i) + (a-bi).i = 15 + i$$

$$\Leftrightarrow a - 2ai + bi + 2b + ai + b = 15 + i \Leftrightarrow (a + 3b) + (b - a)i = 15 + i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 3b = 15 \\ b - a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow z = 3 + 4i \Rightarrow |z| = 5.$$

Câu 7: Chọn C

Cách 1: Lưu ý: $z.\bar{z} = |z|^2$. Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

$$\text{Theo đề ta có } \begin{cases} |x^2 + y^2 + x + yi| = 2 \\ \sqrt{x^2 + y^2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |(x+4) + yi| = 2 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+4)^2 + y^2 = 4 & (C_1) \\ x^2 + y^2 = 4 & (C_2) \end{cases}$$

Số số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán là số giao điểm của hai đường tròn (C_1) và (C_2) .

Đường tròn (C_1) có tâm $I_1(-4;0)$, bán kính $R_1 = 2$, đường tròn (C_2) có tâm $I_2(0;0)$, bán kính $R_2 = 2$.

Kiểm tra thấy $I_1I_2 = R_1 + R_2$. Vậy hai đường tròn tiếp xúc ngoài, số giao điểm là 1.

$$\text{Cách 2: Ta có: } |z.\bar{z} + z| = 2 \Leftrightarrow |z|.|\bar{z} + 1| = 2 \Leftrightarrow |\bar{z} + 1| = 1 \Leftrightarrow |z + 1| = 1$$

Vậy số phức z thỏa mãn 2 phương trình $\begin{cases} |z| = 2 \\ |z + 1| = 1 \end{cases} \Rightarrow$ Gọi A là điểm biểu diễn của số phức z

thì A là giao điểm của đường tròn (C_1) tâm $O(0;0)$, bán kính $R = 2$ và đường tròn (C_2) tâm $I(-1;0)$, bán kính $R' = 1$.

Mặt khác ta có $OI = 1 = R - R' \Rightarrow (C_1)$ và (C_2) tiếp xúc trong, vậy số giao điểm là 1.

Câu 8: Chọn C**Cách 1.**

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Ta có

$$|z - 2 + 3i| = |z + 1 - i| \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = (x + 1)^2 + (y - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow 6x - 8y - 11 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{6x - 11}{8}.$$

$$|z|^2 + 2(z + \bar{z}) = 5 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2(x + yi + x - yi) = 5 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4x - 5 = 0.$$

$$\text{Thay vào, ta được } x^2 + \left(\frac{6x - 11}{8}\right)^2 + 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow 100x^2 + 124x - 199 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-31 + 4\sqrt{371}}{50} \\ x = \frac{-31 - 4\sqrt{371}}{50} \end{cases}.$$

$$\text{Với } x = \frac{-31 + 4\sqrt{371}}{50} \Rightarrow y = \frac{-92 + 3\sqrt{371}}{50} \Rightarrow z = \frac{-31 + 4\sqrt{371}}{50} + \left(\frac{-92 + 3\sqrt{371}}{50}\right)i.$$

$$\text{Với } x = \frac{-31 - 4\sqrt{371}}{50} \Rightarrow y = \frac{-92 - 3\sqrt{371}}{50} \Rightarrow z = \frac{-31 - 4\sqrt{371}}{50} + \left(\frac{-92 - 3\sqrt{371}}{50}\right)i.$$

Vậy có hai số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2.

Từ và suy ra số các số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán bằng số giao điểm của đường thẳng $\Delta: 6x - 8y - 11 = 0$ với đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 4x - 5 = 0$.

Đường tròn (C) có tâm $I(-2; 0)$ và bán kính $R = 3$.

$$\text{Ta có } d(I, \Delta) = \frac{|-12 - 11|}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{23}{10} < R \text{ nên } \Delta \text{ cắt } (C) \text{ tại hai điểm phân biệt.}$$

Do đó, có hai số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 9: Chọn C

$$\text{Ta có: } (2 + 3i)z + 2\bar{z} = 16 + 3i \Leftrightarrow (2 + 3i)(a + bi) + 2(a - bi) = 16 + 3i$$

$$\Leftrightarrow (4a - 3b) + 3ai = 16 + 3i \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \end{cases}. \text{ Vậy } P = 3a + b = -1.$$

Câu 10: Chọn C

$$\text{Đặt } z = x + yi \text{ } (x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow \bar{z} = x - yi.$$

$$\text{Khi đó } (3 + i).z - i.\bar{z} = 7 - 6i \Leftrightarrow (3 + i)(x + yi) - i(x - yi) = 7 - 6i \Leftrightarrow (3x - 2y) + 3yi = 7 - 6i.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 3y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow z = 1 - 2i. \text{ Vậy } |z| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}.$$

Câu 11: Chọn B

$$\text{Giả sử } z = a + bi \text{ } (a, b \in \mathbb{R}). \text{ Suy ra } \bar{z} = a - bi.$$

$$\text{Khi đó: } z(1 + 2i) - \bar{z}(2 - 3i) = -4 + 12i$$

$$\Leftrightarrow (a + bi)(1 + 2i) - (a - bi)(2 - 3i) = -4 + 12i \Leftrightarrow -a + b + (5a + 3b)i = -4 + 12i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a + b = -4 \\ 5a + 3b = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \end{cases}.$$

Do đó điểm M biểu diễn số phức z có tọa độ là $(3; -1)$.

Câu 12: Chọn B

Giả sử $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Suy ra $\bar{z} = a - bi$.

$$\text{Khi đó: } (1 + 3i)z - 3\bar{z} = -5 + 7i \Leftrightarrow (1 + 3i)(a + bi) - 3(a - bi) = -5 + 7i$$

$$\Leftrightarrow -2a - 3b + (3a + 4b)i = -5 + 7i \Leftrightarrow \begin{cases} -2a - 3b = -5 \\ 3a + 4b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}.$$

Do đó điểm biểu diễn cho số phức z có tọa độ là $(1; 1)$ là điểm N trên hình vẽ.

Câu 13: Chọn A

Giả sử $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Suy ra $\bar{z} = a - bi$.

$$\text{Khi đó: } (2i + 3)z - (1 - i)\bar{z} = -2 + 8i \Leftrightarrow (2i + 3)(a + bi) - (1 - i)(a - bi) = -2 + 8i$$

$$\Leftrightarrow 2a - b + (3a + 4b)i = -2 + 8i \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b = -2 \\ 3a + 4b = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \end{cases}.$$

Do đó điểm N biểu diễn cho số phức z có tọa độ là $(0; 2)$.

Ta có khoảng cách cần tìm là $MN = 1$.

Câu 14: Chọn B

$$i[2(a - 5) - 7i] = b + (a + 3)i \Leftrightarrow 7 + 2(a - 5)i = b + (a + 3)i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 7 \\ a + 3 = 2(a - 5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 7 \\ a = 13 \end{cases} \Rightarrow a - b = 13 - 7 = 6.$$

Câu 15: Chọn A

Gọi $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$).

$$|z| - 2\bar{z} = -7 + 3i + z \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} - 2(a - bi) = -7 + 3i + a + bi \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2} - 2a = -7 + a \\ 2b = 3 + b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ \sqrt{a^2 + 9} = 3a - 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ 3a - 7 \geq 0 \\ a^2 + 9 = (3a - 7)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow z = 4 + 3i \Rightarrow |z| = 5.$$

Câu 16: Chọn B

Giả sử: $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có: } z(1 + 2i) + \bar{z}(1 - i) + 4 - i = 0 \Leftrightarrow (x + yi)(1 + 2i) + (x - yi)(1 - i) + 4 - i = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x - 3y + 4) + (x - 1)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y + 4 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow z = 1 + 2i \Rightarrow |z| = \sqrt{5}.$$

Câu 17: Chọn A

$$\text{Đặt } z = x + yi \quad (x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow z^2 = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 - 2xyi.$$

$$\text{Khi đó } |z| = \sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2; \quad z^2 \text{ là số thuần ảo nên ta có } x^2 - y^2 = 0.$$

$$\text{Từ đó ta có hệ } \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, y = 1 \\ x = 1, y = -1 \\ x = -1, y = 1 \\ x = -1, y = -1 \end{cases}.$$

Câu 18: Chọn D

$$\text{Ta có: } (1+i)z + 2\bar{z} = 3+2i \Rightarrow (1+i)(a+bi) + 2(a-bi) = 3+2i$$

$$\Leftrightarrow a+bi+ia-b+2a-2bi = 3+2i \Leftrightarrow \begin{cases} 3a-b=3 \\ a-b=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{3}{2} \end{cases}. \text{ Vậy } P = a+b = -1.$$

Câu 19: Chọn A

$$\text{Ta có } z+1+3i-|z|i=0 \Leftrightarrow (a+1)+(b+3-\sqrt{a^2+b^2})i=0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+1=0 \\ b+3-\sqrt{a^2+b^2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ \sqrt{1+b^2}=b+3 \end{cases} \quad (*)$$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq -3 \\ 1+b^2=(b+3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq -3 \\ b = -\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow b = -\frac{4}{3}. \text{ Vậy } \begin{cases} a=-1 \\ b=-\frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow S = 2a+3b = -6.$$

Câu 20: Chọn C

$$\text{Ta có: } z^4 = |z| \Leftrightarrow |z|^4 = |z| \Leftrightarrow |z|(|z|^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |z|=0 \\ |z|=1 \end{cases}; |z|=0 \Leftrightarrow z=0.$$

$$|z|=1 \Leftrightarrow z^4=1 \Leftrightarrow (z^2-1)(z^2+1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} z=-1 \\ z=1 \\ z=i \\ z=-i \end{cases} \Rightarrow S \text{ có 5 phần tử.}$$

Câu 21: Chọn A

Đặt $z = a+bi$ ($a, b \in \mathbb{R}; a, b \neq 0$), ta có

$$(a+bi) + 4(a-bi) = \left(\frac{5}{3} - 2\sqrt{2}i\right) \cdot \sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow 5a-3bi = \frac{5}{3}\sqrt{a^2+b^2} - 2\sqrt{2(a^2+b^2)}i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5a = \frac{5}{3}\sqrt{a^2+b^2} & (1) \\ -3b = -2\sqrt{2(a^2+b^2)} & (2) \end{cases}. \text{ Từ đó suy ra } a > 0, b > 0.$$

$$\text{Chia cho được } b = 2\sqrt{2}a > 0 \Rightarrow S = \frac{2\sqrt{2}+2}{2-2\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}-3.$$

Câu 22: Chọn A

$$\text{Đặt } t = |z| (t \geq 0).$$

$$\text{Ta có: } (z - 2 + 3i)t + 4i = (4 + 5i)z \Leftrightarrow z(t - 4 - 5i) = 2t - (3t + 4)i$$

Lấy môđun 2 vế ta được:

$$\begin{aligned} |z(t - 4 - 5i)| &= |2t - (3t + 4)i| \Leftrightarrow t\sqrt{(t - 4)^2 + 25} = \sqrt{4t^2 + (3t + 4)^2} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ t^2((t - 4)^2 + 25) = (4t^2 + (3t + 4)^2) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ t^4 - 8t^3 + 28t^2 - 24t - 16 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ (t - 2)(t^3 - 6t^2 + 16t + 8) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow t = 2 \end{aligned}$$

Với $t = 2$, ta có:

$$\begin{aligned} 2(z - 2 + 3i) + 4i &= (4 + 5i)z \Leftrightarrow 2[x - 2 + (y + 3)i] + 4i = (4 + 5i)(x + yi) \\ \Leftrightarrow 2(x - 2) + (2y + 10)i &= 4x - 5y + (5x + 4y)i \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4y = -4 \\ 5x + 2y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow z = 2 \end{aligned}$$

Vậy có duy nhất 1 số phức z thỏa yêu cầu.

Câu 23: Chọn A

$$\begin{aligned} |2 + i| |z - 1 - 2i| &= |1 + 3i| \Leftrightarrow |z| |2|z| - 1 + |z| + 2i| = \sqrt{10} \\ \Leftrightarrow |z| \sqrt{2|z| - 1}^2 + |z| + 2^2 &= \sqrt{10} \Leftrightarrow 5|z|^4 + 5|z|^2 - 10 = 0 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1 \end{aligned}$$

Gọi $z_1 = a_1 + b_1i$, $z_2 = a_2 + b_2i$.

$$\text{Ta có: } |z_1| = |z_2| = 1 \Rightarrow a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2 = 1$$

$$\text{Ta có: } |z_1 - z_2| = 1 \Rightarrow a_1 - a_2^2 + b_1 - b_2^2 = 1 \Rightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } M = |2z_1 + 3z_2| &= |2a_1 + 3a_2 + 2b_1 + 3b_2i| = \sqrt{2a_1 + 3a_2^2 + 2b_1 + 3b_2^2} \\ &= \sqrt{4a_1^2 + b_1^2 + 12a_1a_2 + b_1b_2 + 9a_2^2 + b_2^2} = \sqrt{19}. \text{ Vậy Chọn A} \end{aligned}$$

Câu 24: Chọn B

$$\text{Ta có } (2z - 1)(1 + i) + (\bar{z} + 1)(1 - i) = 2 - 2i \Leftrightarrow 2z(1 + i) - 1 - i + (1 - i)\bar{z} + 1 - i = 2 - 2i.$$

$$\Leftrightarrow 2z(1 + i) = 2 - (1 - i)\bar{z} \quad (1).$$

Đặt $z = a + bi$ với $a; b \in \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có: } 2z(1 + i) = 2(a + bi)(1 + i) = 2a - 2b + (2a + 2b)i.$$

$$2 - (1 - i)\bar{z} = 2 - (1 - i)(a - bi) = 2 - a + b + (a + b)i.$$

$$\text{Do đó } (1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 2b = 2 - a + b \\ 2a + 2b = a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 3b = 2 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{1}{3} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } z = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}i \Rightarrow |z| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Câu 25: Chọn D

Số phức

Giả sử $z = a + bi$; ($a, b \in \mathbb{R}$), khi đó ta có $z^2 = a^2 - b^2 + 2abi$ là số thuần ảo khi và chỉ khi

$$a^2 = b^2 \Leftrightarrow |a| = |b| \quad (1)$$

Khi đó $\bar{z} = a - bi$ suy ra $|z + \bar{z}| = 2|a|, |z - \bar{z}| = 2|b|$.

Ta có $|z|^2 = |z^2| = 2|ab|$ nên kết hợp với giả thiết suy ra $|ab| = |a| + |b| \quad (2)$

$$\text{Kết hợp (1) và (2) ta được hệ } \begin{cases} |a| = |b| \\ |ab| = |a| + |b| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a|^2 = 2|a| \\ |a| = |b| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a| = |b| = 2 \\ |a| = |b| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 2 \\ a = b = -2 \\ a = -b = 2 \\ a = -b = -2 \\ a = b = 0 \end{cases}$$

Vậy có 5 số phức thỏa mãn.

Câu 26: Chọn D

Đặt $z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi$

$$\text{Từ giả thiết ta có } \begin{cases} 3|z + \bar{z}| + 2|z - \bar{z}| = 12 \\ |z + 2 - 3i| = |\bar{z} - 4 + i| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3|2a| + 2|2bi| = 12 \\ |(a+2) + (b-3)i| = |(a-4) + (1-b)i| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3|a| + 2|b| = 6 \\ \sqrt{(a+2)^2 + (b-3)^2} = \sqrt{(a-4)^2 + (1-b)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3|a| + 2|b| = 6 \\ 3a - b = 1 \end{cases}, (1)$$

$$\text{Trường hợp 1: } a \geq 0, b \geq 0 \text{ thì (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 2b = 6 \\ 3a - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{8}{9} \\ b = \frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow z = \frac{8}{9} + \frac{5}{3}i$$

$$\text{Trường hợp 2: } a \geq 0, b < 0 \text{ thì (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 2b = 6 \\ 3a - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{4}{3} \\ b = -5 \end{cases},$$

$$\text{Trường hợp 3: } a < 0, b \geq 0 \text{ thì (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} -3a + 2b = 6 \\ 3a - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{8}{3} \\ b = 7 \end{cases},$$

$$\text{Trường hợp 4: } a < 0, b < 0 \text{ thì (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} -3a - 2b = 6 \\ 3a - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{4}{9} \\ b = -\frac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow z = -\frac{4}{9} - \frac{7}{3}i$$

Vậy có 2 số phức thỏa mãn

Câu 27: Cho số phức z không phải là số thực và $\frac{z^2 - 2z + 4}{z^2 + 2z + 4}$ là số thực. Có bao nhiêu số phức z thỏa

$$\text{mãn } |z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = |z^2|?$$

A. 0.

B. 2.

C. 4.

D. 8.

Lời giải

Chọn B

Cách 1.

Ta có $\frac{z^2 - 2z + 4}{z^2 + 2z + 4}$ là số thực nên

$$\frac{z^2 - 2z + 4}{z^2 + 2z + 4} = \overline{\frac{z^2 - 2z + 4}{z^2 + 2z + 4}} \Leftrightarrow (z^2 - 2z + 4)(\bar{z}^2 + 2\bar{z} + 4) = (z^2 + 2z + 4)(\bar{z}^2 - 2\bar{z} + 4)$$

$$\Leftrightarrow 4z^2 \cdot \bar{z} - 4z \cdot \bar{z}^2 - 16z + 16\bar{z} = 0 \Leftrightarrow |z|^2(z - \bar{z}) - 4(z - \bar{z}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (|z|^2 - 4)(z - \bar{z}) = 0 \Leftrightarrow |z|^2 = 4 \text{ vì } z - \bar{z} \neq 0 \quad (1)$$

Đặt $z = a + bi$ với $b \neq 0, a \in \mathbb{R}$

$$|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = |z|^2 \Leftrightarrow 2|a| + 2|b| = 4 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có } \begin{cases} a^2 + b^2 = 4 \\ |a| + |b| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a| \cdot |b| = 0 \\ |a| + |b| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a| = 0 \\ |b| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \\ a = 0 \\ b = -2 \end{cases}.$$

Cách 2.

Đặt $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Do z là số thực nên $b \neq 0$

$$\frac{z^2 - 2z + 4}{z^2 + 2z + 4} = \frac{(a + bi)^2 - 2(a + bi) + 4}{(a + bi)^2 + 2(a + bi) + 4} = \frac{(a^2 - b^2 - 2a + 4) + (2ab - 2b)i}{(a^2 - b^2 + 2a + 4) + (2ab + 2b)i}$$

$\frac{z^2 - 2z + 4}{z^2 + 2z + 4}$ là số thực nên phần ảo bằng 0

$$\Leftrightarrow -(a^2 - b^2 - 2a + 4)(2ab + 2b) + (2ab - 2b)(a^2 - b^2 + 2a + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4b(a^2 + b^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 4 \text{ do } b \neq 0.$$

$$\text{Mặt khác } |z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = |z|^2 \Leftrightarrow |2a| + |2b| = a^2 + b^2$$

$$\Leftrightarrow 2(|a| + |b|) = a^2 + b^2 \Leftrightarrow 4(a^2 + 2|ab| + b^2) = (a^2 + b^2)^2$$

$$\text{Thay (1) vào (2) ta có } 4(4 + 2|ab|) = 16 \Leftrightarrow |ab| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \text{ mà } b \neq 0 \text{ nên nhận } a = 0$$

Với $a = 0$ ta được $b = \pm 2$ nên $z = \pm 2i$

Câu 28: Chọn D

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

Ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} |z| = 5 \\ |z + 3| = |z + 3 - 10i| \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} |x + yi| = 5 \\ |x + 3 + yi| = |x + 3 + (y - 10)i| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ (x + 3)^2 + y^2 = (x + 3)^2 + (y - 10)^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 20y = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 25 - 5^2 = 0 \\ y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \end{cases}. \text{ Suy ra } z = 5i. \end{aligned}$$

Từ đó ta có $w = z - 4 + 3i = -4 + 3i + 5i = -4 + 8i$.

Câu 29: Chọn B

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

Ta có: $z^2 = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ là số thuần ảo khi $x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm y$.

Mặt khác: $|z| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2$.

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} x = \pm y \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm y \\ y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases} \end{cases}.$$

Vậy tổng bình phương phần thực bằng 4.

Câu 30: Chọn D

Giả sử $z = a + bi$, $(a, b \in \mathbb{R}) \Rightarrow \bar{z} = a - bi$.

Ta có: $z - 1 = a - 1 + bi$, $z - \bar{z} = 2bi$, $z + \bar{z} = 2a$.

$$i^{2019} = (i^2)^{1009} i = (-1)^{1009} i = -i.$$

$$\text{Do đó } |z - 1|^2 + |z - \bar{z}| i + (z + \bar{z}) i^{2019} = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{(a-1)^2 + b^2} \right)^2 + \sqrt{(2b)^2} \cdot i + 2a(-i) = 1$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2 + b^2 + 2|b|i - 2ai = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2 + b^2 = 1 \\ 2|b| - 2a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 2a + b^2 = 0 \\ a = |b| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2|b|^2 - 2|b| = 0 \\ a = |b| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |b| = 0 \\ |b| = 1 \\ a = |b| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \end{cases}. \text{ Vậy có 3 số phức } z \text{ thỏa mãn yêu cầu bài toán.}$$

Câu 31: Chọn D

$$\text{Gọi } \begin{cases} z = x + yi \Rightarrow M(x; y) \\ z_1 = -4 + 3i \Rightarrow F_1(-4; 3) \\ z_2 = 8 + 5i \Rightarrow F_2(8; 5) \\ z_0 = 2 + 4i \Rightarrow A(2; 4) \end{cases}. \text{ Ta thấy: } z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2} \Rightarrow A \text{ là trung điểm của } F_1F_2.$$

$$\text{Theo giả thiết, ta có: } |z + 4 - 3i| + |z - 8 - 5i| = 2\sqrt{38} \Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 2\sqrt{38}.$$

Suy ra, tập hợp điểm M biểu diễn số phức z là Elip (E) có:
$$\begin{cases} a = \frac{2\sqrt{38}}{2} = \sqrt{38} \\ c = \frac{|z_1 - z_2|}{2} = \sqrt{37} \\ b = \sqrt{a^2 - c^2} = 1 \end{cases}$$

Ta có: $|z - 2 - 4i| = MA$. Vì A là tâm Elip và M di chuyển trên Elip nên $\min AM = b = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $|z - 2 - 4i|$ bằng 1.

Câu 32: Chọn A

Đặt $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

Số phức z có điểm biểu diễn $M(x; y)$.

Ta có $2|z - 1| = |z - \bar{z} + 2| \Leftrightarrow 2|x + yi - 1| = |x + yi - (x - yi) + 2| \Leftrightarrow 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{4 + 4y^2}$
 $\Leftrightarrow 4(x-1)^2 + 4y^2 = 4 + 4y^2 \Leftrightarrow 4x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z là hai đường thẳng có phương trình $x = 0$ và $x = 2$.

Câu 33: Chọn A

Gọi $\omega = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$. Theo đề bài ta có $\omega = \bar{z} + 1 - i$

$$\Leftrightarrow \bar{z} = (x-1) + (y+1)i \Leftrightarrow z = (x-1) - (y+1)i$$

Từ đó ta có: $|3z + i|^2 \leq z \cdot \bar{z} + 9$

$$\Leftrightarrow |3[(x-1) - (y+1)i] + i|^2 \leq (x-1)^2 + (y+1)^2 + 9$$

$$\Leftrightarrow |3(x-1) - (3y+2)i|^2 \leq (x-1)^2 + (y+1)^2 + 9 \Leftrightarrow (x-1)^2 + \left(y + \frac{5}{8}\right)^2 \leq \frac{73}{64}$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức ω là hình tròn $(x-1)^2 + \left(y + \frac{5}{8}\right)^2 \leq \frac{73}{64}$.

Câu 34: Chọn B

Xét phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ (1), ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$).

Nhận thấy: Nếu z là nghiệm của (1) thì $\bar{z}$ cũng là nghiệm của (1).

Do đó, (1) có bốn nghiệm $z_1 = -1 + i, z_2 = 1 + \sqrt{2}i, z_3 = \bar{z}_1 = -1 - i, z_4 = \bar{z}_2 = 1 - \sqrt{2}i$.

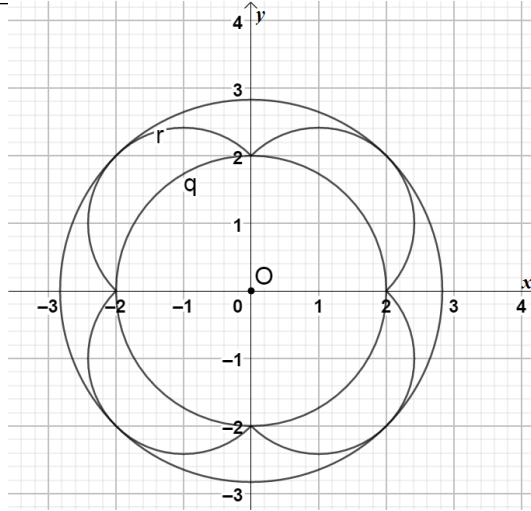
Mà $\begin{cases} z_1 + z_3 = -2 \\ z_1 z_3 = 2 \end{cases}$ và $\begin{cases} z_2 + z_4 = 2 \\ z_2 z_4 = 3 \end{cases}$.

$$\text{Do đó } x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 3)$$

$$\Leftrightarrow x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = x^4 + x^2 + 2x + 6.$$

Suy ra $a = 0, b = 1, c = 2, d = 6$ hay $a + b + c + d = 9$.

Câu 35: Chọn A



Giả sử $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Khi đó

$$|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = |z|^2 \Leftrightarrow 2|x| + 2|y| = x^2 + y^2 \Leftrightarrow (|x| - 1)^2 + (|y| - 1)^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2 & \text{khi } x \geq 0, y \geq 0 \\ (x+1)^2 + (y+1)^2 = 2 & \text{khi } x \leq 0, y \leq 0 \\ (x-1)^2 + (y+1)^2 = 2 & \text{khi } x \geq 0, y \leq 0 \\ (x+1)^2 + (y-1)^2 = 2 & \text{khi } x \leq 0, y \geq 0 \end{cases}.$$

$$|z| = m \Leftrightarrow x^2 + y^2 = m^2, (m \geq 0).$$

Điều kiện cần và đủ để có đúng 4 số phức z thỏa mãn đồng thời các điều kiện $|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = |z|^2$ và $|z| = m$ là đường tròn $(C): x^2 + y^2 = m^2$ có đúng 4 điểm chung với cả 4 phần đường tròn trên.

Dựa vào đồ thị ta thấy có hai trường hợp thỏa mãn đó là $m = 2$ hoặc $m = 2\sqrt{2}$.

Câu 36: Chọn C

Đặt $w = a + bi$; $a, b \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow a + bi = 2\bar{z} - 1 + 4i \Rightarrow \bar{z} = \frac{a+1}{2} + \frac{b-4}{2}i$$

$$|z - 2i^{2020}| = |\bar{z} - 1 + 2i| \text{ hay}$$

$$|z - 2| = |\bar{z} - 1 + 2i| \Rightarrow \left(\frac{a+1}{2} - 2\right)^2 + \left(\frac{b-4}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+1}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{b-4}{2} + 2\right)^2$$

$$\Leftrightarrow (a-3)^2 + (b-4)^2 = (a-1)^2 + b^2 \Leftrightarrow a + 2b - 6 = 0$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường thẳng $(d): x + 2y - 6 = 0$

$$\text{Khoảng cách từ } I(2; -3) \text{ đến } (d) \text{ là: } \frac{|2 - 2 \cdot (-3) - 6|}{\sqrt{1+4}} = \frac{10\sqrt{5}}{5}.$$

Câu 37: Chọn B

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$).

Gọi $A(3; 0)$, $B(-3; 0)$ lần lượt là điểm biểu diễn cho các số phức $z_1 = 3$ và $z_2 = -3$. Khi đó $AB = 6$.

$$|z-3|+|z+3|=10 \Leftrightarrow MA+MB=10>AB.$$

Do đó quỹ tích của điểm M là đường Elip có bán trục lớn $a=5$, nửa tiêu cự $c=3$ và bán trục nhỏ là $b=4$.

Vậy diện tích hình Elip là $S=\pi ab=20\pi$.

Câu 38: Chọn C

Gọi số phức $w=x+yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

Ta có: $w=3+i-(3-4i)z \Leftrightarrow w-3-i=(-3+4i)z \Rightarrow |w-3-i|=|(-3+4i)z| \Rightarrow |w-3-i|=10$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}=10 \Rightarrow (x-3)^2+(y-1)^2=100.$$

Vậy tập hợp biểu diễn các số phức w là một đường tròn có bán kính bằng 10.

Câu 39: Chọn A

Gọi $|z|=m \geq 0$. Khi đó $(|z|+i)z=\sqrt{2}$ được viết lại thành $(m+i)z=\sqrt{2}$.

Lấy module 2 vế ta có

$$|m+i| \cdot |z| = |\sqrt{2}| \Leftrightarrow m\sqrt{m^2+1} = \sqrt{2} \Leftrightarrow m^2(m^2+1)=2 \Leftrightarrow m^4+m^2-2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2=1 \Leftrightarrow m=\pm 1 \\ m^2=-2 \text{ (VN)} \end{cases}$$

Do $m \geq 0$ nên ta có $m=1$, suy ra $|z|=1$. Vậy $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$.

Câu 40: Chọn D

Xét $z=x+yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\text{Mà } z=m+3+(m^2-1)i \Rightarrow \begin{cases} x=m+3 \\ y=m^2-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-3=m \\ y=(x-3)^2-1=x^2-6x+8 \end{cases}$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thuộc đường cong $(C): y=x^2-6x+8$

$$\text{Xét phương trình hoành độ giao điểm của } (C) \text{ và trục } Ox. \quad x^2-6x+8=0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=4 \end{cases}$$

Diện tích giới hạn bởi (C) và trục hoành là:

$$S = \int_2^4 |x^2-6x+8| dx = -\int_2^4 (x^2-6x+8) dx = -\left(\frac{x^3}{3}-3x^2+8x\right)\Big|_2^4 = \frac{4}{3}$$

Câu 41: Chọn B

Cách 1

$$z_1^2+z_2^2=z_1z_2 \Leftrightarrow (z_1-z_2)^2=-z_1z_2 \Rightarrow |z_1-z_2|^2=|z_1| \cdot |z_2| \Leftrightarrow MN^2=OM \cdot ON \quad (1)$$

$$\text{Lại có: } z_1^2+z_2^2=z_1z_2 \Leftrightarrow z_1^2=z_2(z_1-z_2) \Rightarrow |z_1|^2=|z_2| \cdot |z_1-z_2| \Leftrightarrow OM^2=ON \cdot MN \quad (2)$$

$$\text{Tương tự ta có: } ON^2=OM \cdot MN \quad (3)$$

$$\text{Từ (2) và (3) ta có: } \frac{OM^2}{ON^2} = \frac{ON}{OM} \Leftrightarrow OM=ON. \quad (4)$$

Từ (1) và (4) ta có: $MN^2 = OM^2 \Leftrightarrow MN = OM$.

Từ đó suy ra: $OM = ON = MN$. Vậy $\triangle OMN$ đều.

Cách 2

Ta có $z_1^2 + z_2^2 = z_1 z_2 \Leftrightarrow z_1^2 - z_1 z_2 + z_2^2 = 0 \Leftrightarrow \left(z_1 - \frac{1}{2}z_2\right)^2 + \frac{3}{4}z_2^2 = 0$.

$$\Leftrightarrow \left(z_1 - \frac{1}{2}z_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}iz_2\right)\left(z_1 - \frac{1}{2}z_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}iz_2\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z_2 \\ z_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z_2 \end{cases} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_1 - z_2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z_2 \\ z_1 - z_2 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z_2 \end{cases} \Leftrightarrow |z_1 - z_2| = |z_2| \Leftrightarrow MN = ON. \quad (2)$$

Cũng từ (1) ta suy ra $|z_1| = |z_2| \Leftrightarrow OM = ON$. (3)

Từ (2) và (3) suy ra $\triangle OMN$ đều.

Cách 3

Chọn $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$ và $z_2 = -1 + \sqrt{3}i$.

Ta có $z_1^2 + z_2^2 = (1 + \sqrt{3}i)^2 + (-1 + \sqrt{3}i)^2 = 4$ và $z_1 z_2 = (1 + \sqrt{3}i)(-1 + \sqrt{3}i) = 4$

Suy ra $z_1^2 + z_2^2 = z_1 z_2$ nên hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Khi đó $M(1; \sqrt{3})$ và $N(-1; \sqrt{3})$, ta có $OM = ON = MN = 2$. Vậy $\triangle OMN$ đều.

Câu 42: Chọn D

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn cho số phức w .

Ta có $w = 2(z - 2 + 3i) + 4 - 6i + 1 - i \Leftrightarrow w - 5 + 7i = 2(z - 2 + 3i)$.

Khi đó $|w - 5 + 7i| = 2|z - 2 + 3i| \leq 6 \Leftrightarrow (x - 5)^2 + (y + 7)^2 \leq 36$.

$\Rightarrow$ tập hợp các điểm M trên mặt phẳng Oxy là hình tròn tâm $I(5; -7)$ bán kính $R = 6$.

Vậy diện tích hình tròn là $S = \pi R^2 = 36\pi$.

Câu 43: Chọn D

Giả sử $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có $(z + 1 - 3i)(\bar{z} + 1 + 3i) = 25 \Leftrightarrow [(x + 1) + (y - 3)i][(x + 1) - (y - 3)i] = 25$

$\Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 25$.

Tập các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(-1; 3)$, bán kính bằng 5.

Vậy $a + b + c = -1 + 3 + 5 = 7$.

Câu 44: Chọn A

Giả sử A, B lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z_1, z_2 trên mặt phẳng tọa độ Oxy . Theo giả thiết ta có

A, B thuộc đường tròn tâm $I(2; 3)$, bán kính $r = 5$ và $AB = 6$.

Gọi M là trung điểm của AB khi đó M cũng là điểm biểu diễn số phức $u = \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{w}{2}$.

$$\text{Lại có } IM^2 = IA^2 - AM^2 = r^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = 16 \Rightarrow IM = 4.$$

Vậy M thuộc đường tròn tâm $I(2;3)$ bán kính $r' = 4$.

Suy ra các điểm biểu diễn số phức $w = z_1 + z_2 = 2u$ là một đường tròn bán kính $R = 2r' = 8$

Câu 45: Chọn D

Giả sử $z = a + bi$ ($a; b \in \mathbb{R}$) và $w = x + yi$ ($x; y \in \mathbb{R}$).

$$\text{Ta có } |z - 2i^{2020}| = |\bar{z} - 1 + 2i| \Leftrightarrow |a + bi - 2(i^2)^{1010}| = |a - bi - 1 + 2i|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a-2)^2 + b^2} = \sqrt{(a-1)^2 + (2-b)^2} \Leftrightarrow 2a - 4b + 1 = 0(1).$$

$$\text{Theo giả thiết: } w = 2\bar{z} - 1 + 4i \Leftrightarrow x + yi = 2(a - bi) - 1 + 4i \Leftrightarrow x + yi = 2a - 1 + (4 - 2b)i.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2a - 1 \\ y = 4 - 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{x+1}{2} \\ b = \frac{4-y}{2} \end{cases} (2).$$

$$\text{Thay (2) vào (1) ta được: } 2 \cdot \frac{x+1}{2} - 4 \cdot \frac{4-y}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 6 = 0(\Delta).$$

$$\text{Vậy: } d(I, \Delta) = \frac{10\sqrt{5}}{5}.$$

Câu 46: Chọn D

$$w = 2z + 1 - i \Leftrightarrow \frac{w - (1-i)}{2} = z \Leftrightarrow \frac{w - (1-i)}{2} - 3 + 4i = z - 3 + 4i \Leftrightarrow \frac{w - 7 + 9i}{2} = z - 3 + 4i$$

$$\Rightarrow \left| \frac{w - 7 + 9i}{2} \right| = |z - 3 + 4i|$$

$$\text{Ta được } \frac{|w - (7 - 9i)|}{2} = |z - 3 + 4i| \leq 2 \Leftrightarrow |w - (7 - 9i)| \leq 4.$$

Do đó tập hợp điểm biểu diễn số phức w là hình tròn tâm $I(7; -9)$, bán kính bằng 4.

Vậy diện tích hình tròn là $S = 16\pi$.

Câu 47: Chọn C

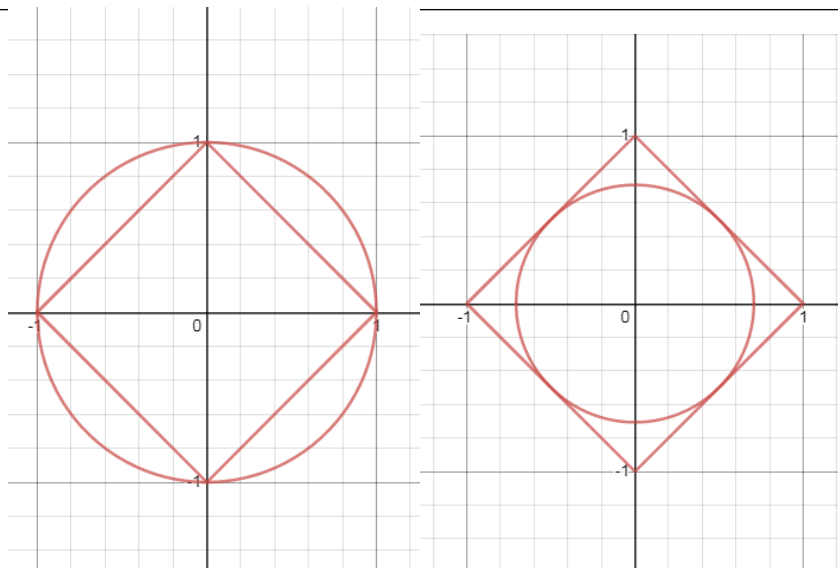
Đặt $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$).

$$|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = 2 \Leftrightarrow |2x| + |2yi| = 2 \Leftrightarrow |x| + |y| = 1.$$

$$\text{Đặt } z' = z(\bar{z} + 2) - (z + \bar{z}) - m = |z|^2 + z - \bar{z} - m.$$

z' là số thuần ảo nên có phần thực bằng 0. Tức là: $x^2 + y^2 = m$.

Tập hợp các điểm $M(x; y)$ thỏa mãn là hình vuông tâm là gốc tọa



Để có 4 cặp số $(x; y)$ thỏa mãn đồng thời và thì phải là một đường tròn nội tiếp hoặc ngoại tiếp hình vuông nói trên. Tức là $m > 0$ và $\sqrt{m} = 1$ hoặc $\sqrt{m} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow m = 1$ hoặc $m = \frac{1}{2}$

Vậy tổng các phần tử của S là $\frac{3}{2}$.