

MỤC LỤC

◆ CHƯƠNG 1. ĐẠO HÀM VÀ ỨNG DỤNG ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ	4
▶ BÀI 1. SỰ BIẾN THIÊN VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ	4
A. Tóm tắt kiến thức	4
B. Phân dạng toán cơ bản	6
◆ Dạng 1: Đọc đồ thị cho trước để tìm khoảng đơn điệu, cực trị	6
◆ Dạng 2: Tìm khoảng đơn điệu và cực trị của hàm số được cho bởi công thức	8
◆ Dạng 3: Ứng dụng	9
C. Dạng toán rèn luyện	10
◆ Dạng 1: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn	10
◆ Dạng 2: Câu trắc nghiệm đúng, sai	29
◆ Dạng 3: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn	38
▶ BÀI 2. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ	45
A. Tóm tắt kiến thức	45
B. Phân dạng toán cơ bản	46
◆ Dạng 1: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số	46
◆ Dạng 2: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên một đoạn	46
◆ Dạng 3: Ứng dụng thực tế	46
C. Dạng toán rèn luyện	47
◆ Dạng 1: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn	47
◆ Dạng 2: Câu trắc nghiệm đúng, sai	56
◆ Dạng 3: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn	66
▶ BÀI 3. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ	69
A. Tóm tắt kiến thức	70
B. Phân dạng toán cơ bản	71
◆ Dạng 1: Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số	71
◆ Dạng 2: Tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số	72
◆ Dạng 3: Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số	72
◆ Dạng 4: Ứng dụng thực tế	72
C. Dạng toán rèn luyện	72
◆ Dạng 1: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn	72
◆ Dạng 2: Câu trắc nghiệm đúng, sai	78
◆ Dạng 3: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn	84
▶ BÀI 4. KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ MỘT SỐ HÀM SỐ CƠ BẢN	88
A. Tóm tắt kiến thức	88
B. Phân dạng toán cơ bản	89
◆ Dạng 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số	90
◆ Dạng 2: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số phân thức hữu tỉ	90
◆ Dạng 3: Ứng dụng thực tế	90
C. Dạng toán rèn luyện	90
◆ Dạng 1: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn	90
◆ Dạng 2: Câu trắc nghiệm đúng, sai	102

♦ Dạng ③: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn	111
♦ CHƯƠNG 2. VECTO' VÀ HỆ TRỤC TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN	117
► BÀI ①. VECTO' TRONG KHÔNG GIAN.....	117
A. Tóm tắt kiến thức	117
①. VECTO' TRONG KHÔNG GIAN.....	117
B. Phân dạng toán cơ bản.....	122
♦ Dạng ①: Nhận biết vectơ trong không gian.....	122
♦ Dạng ②: Tổng và hiệu của hai vectơ	123
♦ Dạng ③: Tích của một số với một vectơ.....	124
♦ Dạng ④: Tích vô hướng của hai vectơ	125
♦ Dạng ⑤: Ứng dụng thực tế.....	126
C. Dạng toán rèn luyện.....	128
♦ Dạng ①: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.....	128
♦ Dạng ②: Câu trắc nghiệm đúng, sai	138
♦ Dạng ③: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.....	145
► BÀI ②. HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN	164
A. Tóm tắt kiến thức	164
B. Phân dạng toán cơ bản.....	165
♦ Dạng ①: Hệ trục tọa độ trong không gian.....	165
♦ Dạng ②: Tọa độ của điểm và vectơ trong không gian	166
♦ Dạng ③: Ứng dụng thực tế.....	167
C. Dạng toán rèn luyện.....	168
♦ Dạng ①: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.....	168
♦ Dạng ②: Câu trắc nghiệm đúng, sai	172
♦ Dạng ③: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.....	180
► BÀI ③. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTO'	187
A. Tóm tắt kiến thức	187
B. Phân dạng toán cơ bản.....	188
♦ Dạng ①: Biểu thức tọa độ của tổng, hiệu hai vectơ, tích của một số với một vectơ.....	188
♦ Dạng ②: Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng, tọa độ trọng tâm của tam giác.....	188
♦ Dạng ③: Biểu thức tọa độ của tích vô hướng.....	189
♦ Dạng ④: Ứng dụng thực tế.....	190
C. Dạng toán rèn luyện.....	191
♦ Dạng ①: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.....	191
♦ Dạng ②: Câu trắc nghiệm đúng, sai	195
♦ Dạng ③: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.....	204
♦ CHƯƠNG 3. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO MỨC ĐỘ PHÂN TÁN CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM.....	209
► BÀI 1: KHOẢNG BIẾN THIÊN – KHOẢNG TƯ PHÂN VỊ	209
A. Tóm tắt kiến thức	209
B. Phân dạng toán cơ bản.....	210
♦ Dạng ①: Khoảng biến thiên.....	210

• Dạng ②: Khoảng tứ phân vị.....	211
• Dạng ③: Ứng dụng.....	212
©. Dạng toán rèn luyện.....	213
• Dạng ①: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.....	213
• Dạng ②: Câu trắc nghiệm đúng, sai.....	215
• Dạng ③: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.....	223
► BÀI 2: PHƯƠNG SAI VÀ ĐỘ LỆCH CHUẨN	231
Ⓐ. Tóm tắt kiến thức	231
Ⓑ. Phân dạng toán cơ bản.....	232
• Dạng ①: Phương sai và độ lệch chuẩn	232
• Dạng ②: Ứng dụng thực tế.....	232
Ⓒ. Dạng toán rèn luyện.....	234
• Dạng ①: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.....	234
• Dạng ②: Câu trắc nghiệm đúng, sai.....	237
• Dạng ③: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.....	246

A. Tóm tắt kiến thức

1. TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ.

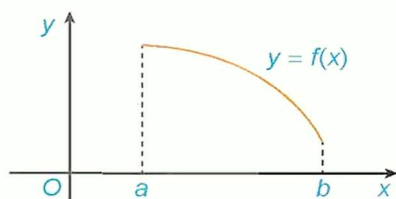
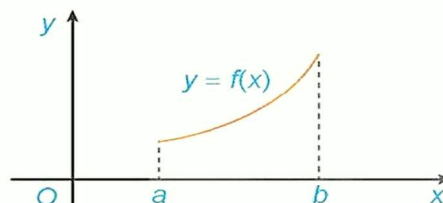
a) Khái niệm tính đơn điệu của hàm số.

✎ Giả sử K là một khoảng, một đoạn hoặc một nửa khoảng và $y = f(x)$ là hàm số xác định trên K .

- ✓ Hàm số $y = f(x)$ được gọi là đồng biến trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- ✓ Hàm số $y = f(x)$ được gọi là nghịch biến trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

✎ Chú ý

- ✓ Nếu hàm số đồng biến trên K thì đồ thị của hàm số đi lên từ trái sang phải
- ✓ Nếu hàm số nghịch biến trên K thì đồ thị của hàm số đi xuống từ trái sang phải

a) Hàm số nghịch biến trên $(a; b)$.b) Hàm số đồng biến trên $(a; b)$.

- ✓ Hàm số đồng biến hay nghịch biến trên K còn được gọi chung là đơn điệu trên K . Việc tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số còn được gọi là tìm các khoảng đơn điệu (hay xét tính đơn điệu) của hàm số.
- ✓ Khi xét tính đơn điệu của hàm số mà không chỉ rõ tập K thì ta hiểu là xét trên tập xác định của hàm số đó.

✎ Định lí.

- ✓ Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K .
 - Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in K$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng K .
 - Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in K$ thì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng K .

✎ Chú ý.

- ✓ Định lí trên vẫn đúng trong trường hợp $f'(x)$ bằng 0 tại một số hữu hạn điểm trong khoảng K .
- ✓ Người ta chứng minh được rằng, nếu $f'(x) = 0$ với mọi $x \in K$ thì hàm số $f(x)$ không đổi trên khoảng K .

b) Sử dụng bảng biến thiên xét tính đơn điệu của hàm số:

✎ Các bước để xét tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$:

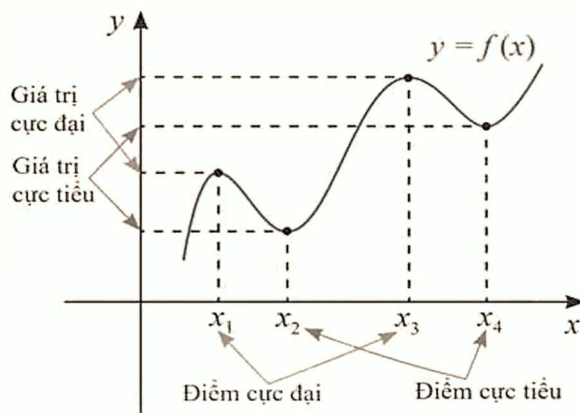
- ①. Tìm tập xác định của hàm số.
- ②. Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm $x_i (i = 1, 2, \dots)$ mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại.
- ③. Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên của hàm số.
- ④. Nêu kết luận về khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

2. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ.

a) Khái niệm cực trị của hàm số:

- ✎ Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a; b)$ (a có thể là $-\infty$, b có thể là $+\infty$) và điểm $x_0 \in (a; b)$.
- ✓ Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h) \subset (a; b)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại x_0 .
 - ✓ Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h) \subset (a; b)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0 .

✎ **Chú ý**



- ✓ Nếu hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại x_0 thì x_0 được gọi là điểm cực đại của hàm số $f(x)$. Khi đó, $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực đại của hàm số $f(x)$ và kí hiệu là $f_{CĐ}$ hay $y_{CĐ}$. Điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ được gọi là điểm cực đại của đồ thị hàm số.
- ✓ Nếu hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0 thì x_0 được gọi là điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$. Khi đó, $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực tiểu của hàm số $f(x)$ và kí hiệu là f_{CT} hay y_{CT} .
- ✓ Điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ được gọi là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.
- ✓ Các điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là điểm cực trị. Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là giá trị cực trị (hay cực trị) của hàm số.

b) Cách tìm cực trị của hàm số:

✎ Định lí.

- Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a; x_0)$ và $(x_0; b)$. Khi đó:

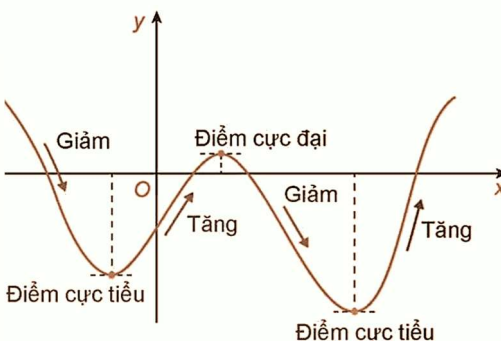
a) Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.

b) Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $f(x)$.

x	a	x_0	b
$f'(x)$		$-$	$+$
$f(x)$		$f(x_0)$ (Cực tiểu)	

x	a	x_0	b
$f'(x)$		$+$	$-$
$f(x)$		$f(x_0)$ (Cực đại)	

✎ Chú ý:

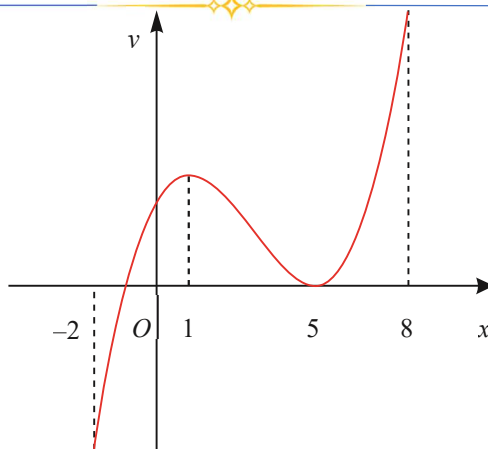


B. Phân dạng toán cơ bản

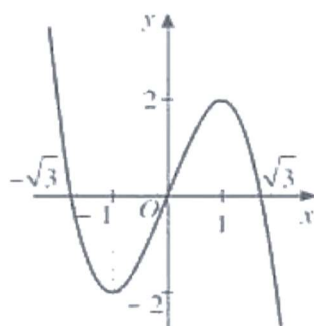
♦ Dạng 1: Đọc đồ thị cho trước để tìm khoảng đơn điệu, cực trị

✎ Các ví dụ minh họa

Câu 1: Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = f(x)$ có đồ thị cho ở Hình vẽ bên dưới.

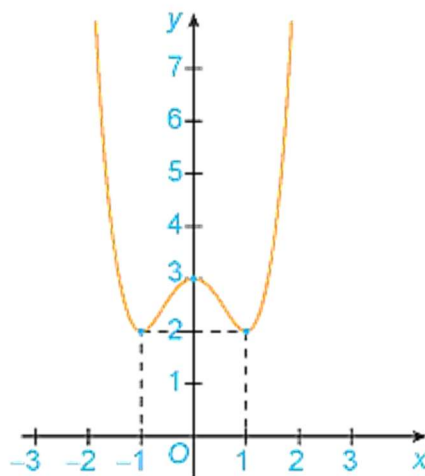


Câu 2: Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x) = -x^3 + 3x$ ở Hình 4, hãy chỉ ra các điểm cực trị của hàm số đó.



Hình 4

Câu 3: Hình 1.8 là đồ thị của hàm số $y = f(x)$. Hãy tìm các cực trị của hàm số.



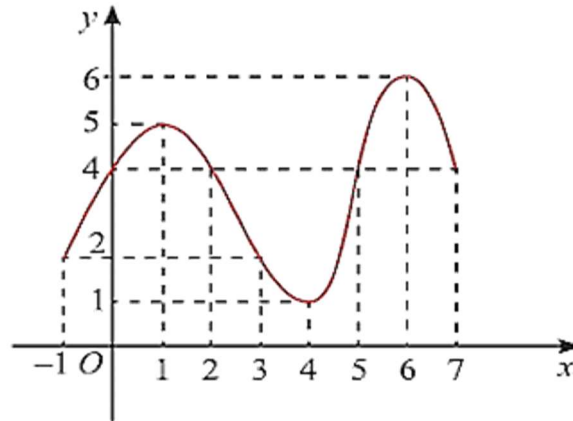
Hình 1.8

Câu 4: Xét hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(-1; 4)$, ta có bảng biến thiên như sau:

x	-1	1	2	3	4
$f'(x)$	-	-	0	+	+
$f(x)$		-1	-5	-1	

$x_0 = 2$ là điểm cực tiểu hay điểm cực đại của hàm số đã cho? Tìm giá trị cực trị tương ứng.

Câu 5: Tìm cực trị của hàm số $y = f(x)$ có đồ thị được cho ở Hình vẽ.



Hình 7

♦ Dạng ②: Tìm khoảng đơn điệu và cực trị của hàm số được cho bởi công thức

▣ Các ví dụ minh họa

Câu 6: Chứng minh rằng hàm số $g(x) = \frac{x}{x-1}$ nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Câu 7: Tìm khoảng đơn điệu của hàm số $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 1$.

Câu 8: Xét tính đơn điệu của các hàm số sau:

a) $f(x) = -x^3 + 3x^2$

b) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

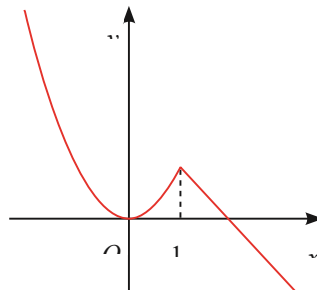
c) $f(x) = x^3$

d) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 9x$

e) $f(x) = \frac{1}{x}$

f) $f(x) = \frac{x^2 + x + 4}{x + 1}$

Câu 9: Đồ thị của hàm số $y = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \leq 1 \\ 2 - x & \text{khi } x > 1 \end{cases}$ được cho ở hình bên.



a) Tìm điểm cực đại và điểm cực tiểu của hàm số.

b) Tại $x = 1$, hàm số có đạo hàm không?

c) Thay mỗi dấu ? bằng kí hiệu (+, -) thích hợp để hoàn thành bảng biến thiên dưới đây. Nhận xét về dấu của y' khi x đi qua điểm cực đại và điểm cực tiểu.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		?	0	?		?	
y	$+\infty$				1		$-\infty$

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$
 0 0 $-\infty$

Câu 10: Tìm cực trị của hàm số $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 1$.

Câu 11: Tìm cực trị của hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 4$.

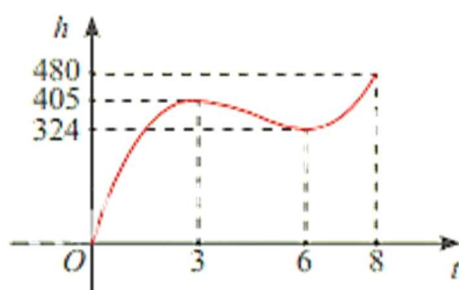
Câu 12: Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = \frac{x^2+4}{x}$.

♦ Dạng ③: Ứng dụng

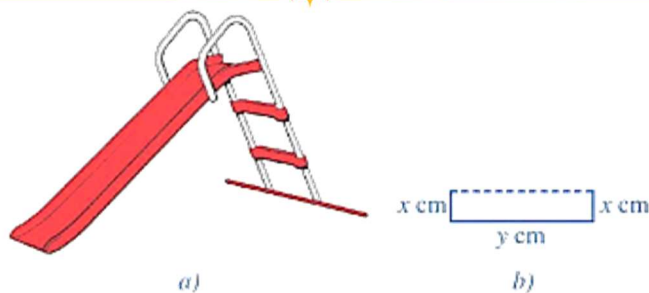
▣ Các ví dụ minh họa

Câu 13: Một vật được phóng thẳng đứng lên trên từ độ cao 2 m với vận tốc ban đầu là 24,5 m/s. Trong Vật lí, ta biết rằng khi bỏ qua sức cản của không khí thì độ cao h (mét) của vật sau t (giây) được cho bởi công thức: $h(t) = 2 + 24,5t - 4,9t^2$. Hỏi tại thời điểm nào thì vật đạt độ cao lớn nhất?

Câu 14: Hãy trả lời câu hỏi trong Khởi động (trang 6) bằng cách xét dấu đạo hàm của hàm số $h(t) = 6t^3 - 81t^2 + 324t$ với $0 \leq t \leq 8$. Trong 8 phút đầu kể từ khi xuất phát, độ cao h (tính bằng mét) của khinh khí cầu vào thời điểm t phút được cho bởi công thức $h(t) = 6t^3 - 81t^2 + 324t$. Đồ thị của hàm số $h(t)$ được biểu diễn trong hình bên. Trong các khoảng thời gian nào khinh khí cầu tăng dần độ cao, giảm dần độ cao? Độ cao của khinh khí cầu vào các thời điểm 3 phút và 6 phút sau khi xuất phát có gì đặc biệt?



Câu 15: Máng trượt của một cầu trượt cho trẻ em (Hình 5a) được uốn từ một tấm kim loại có bề rộng 80 cm, mặt cắt được mô tả ở Hình 5b. Nhà thiết kế khuyến cáo, diện tích của mặt cắt càng lớn thì càng đảm bảo an toàn cho trẻ em.



Hình 5

- a) Gọi S là diện tích mặt cắt. Tìm điều kiện của x và viết công thức tính S theo x .
 b) Với x đạt giá trị bằng bao nhiêu thì cầu trượt đảm bảo an toàn nhất cho trẻ em?

©. Dạng toán rèn luyện

♦ Dạng 1: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây

- A. $(-\infty; -2)$. B. $(1; +\infty)$. C. $(-2; 1)$. D. $(-2; +\infty)$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-3		-2		-1	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y	$-\infty$		0		$+\infty$		2	$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-3; -1)$. B. $(-\infty; 0)$.
 C. $(-2; -1)$. D. $(-3; -2) \cup (-2; -1)$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$						
	$-\infty$		0		-3	$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trong khoảng nào dưới đây?

- A. $(-2; 1)$. B. $(1; +\infty)$. C. $(-3; 0)$. D. $(-\infty; -2)$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, liên tục trên từng khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	+		-		+
y	$-\infty$	-2	$+\infty$	-1	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên $(0;1)$.
- B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.
- C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.
- D. Hàm số đồng biến trên $(-1;+\infty)$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	5	-27	$+\infty$	

Hàm số đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(-27;+\infty)$.
- B. $(-\infty;5)$.
- C. $(-\infty;-1)$.
- D. $(-1;+\infty)$.

Câu 6: Cho bảng biến thiên như hình vẽ bên. Hỏi đây là bảng biến thiên của hàm số nào trong các hàm số sau?

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	-		-
y	1	$+\infty$	1

- A. $y = \frac{-x+2}{x-1}$.
- B. $y = \frac{x+2}{x-1}$.
- C. $y = \frac{x+2}{x+1}$.
- D. $y = \frac{x-3}{x-1}$.

Câu 7: Bảng biến thiên hình bên là của hàm số nào dưới đây?

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
y'	+		+
y	3	$+\infty$	3

- A. $y = x^4 - 4x^2 + 3$.
- B. $y = -x^3 + 3x - 2$.
- C. $y = \frac{4x-3}{x+1}$.
- D. $y = \frac{3x+4}{x+2}$.

Câu 8: Bảng biến thiên dưới đây là của hàm số nào trong các hàm số được cho ở dưới đây?

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-		
$f(x)$	-2		-2

A. $y = \frac{2x-1}{x+1}$.

B. $y = \frac{-2x+1}{x+1}$.

C. $y = \frac{2x-3}{x-1}$.

D. $y = \frac{-2x+3}{x-1}$.

Câu 9: Bảng biến thiên sau đây là của hàm số

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	-		
y	2		2

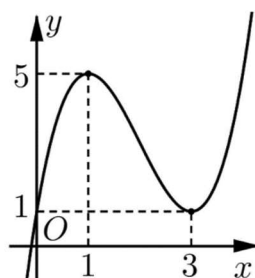
A. $y = \frac{2x-1}{x-1}$.

B. $y = \frac{2x-2}{x+1}$.

C. $y = \frac{2x+3}{x+1}$.

D. $y = \frac{x+2}{2x+2}$.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng

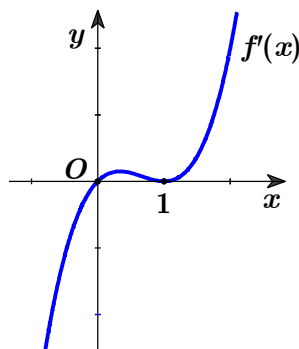
A. $(0;1)$.

B. $(3;+\infty)$.

C. $(1;2)$.

D. $(1;5)$.

Câu 11: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là hàm số $f'(x)$. Biết đồ thị hàm số $f'(x)$ được cho như hình vẽ.



Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng

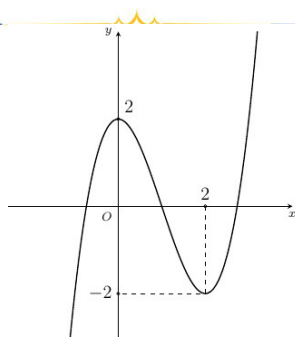
A. $(-\infty;0)$.

B. $(0;+\infty)$.

C. $\left(\frac{1}{3};1\right)$.

D. $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$.

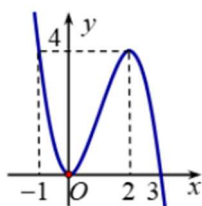
Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên dưới



Tìm khoảng đồng biến của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

- A. $(-2; +\infty)$ B. $(0; 2)$.
C. $(2; +\infty)$. D. $(-\infty; 2)$.

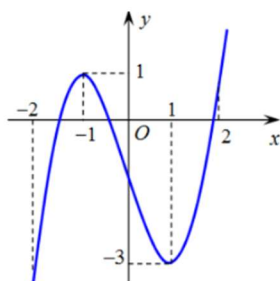
Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau.



Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau đây?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$. B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 1)$. D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 3)$.

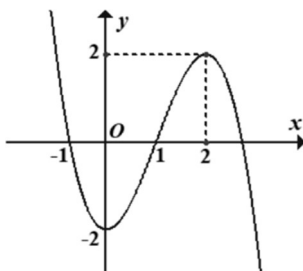
Câu 14: Hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

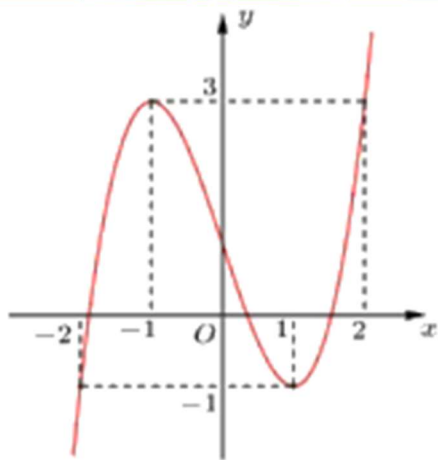
- A. $(-1; 1)$. B. $(-2; 1)$. C. $(-2; -1)$. D. $(-1; 2)$.

Câu 15: Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



- A. $(-1; 0)$. B. $(-2; 2)$. C. $(2; +\infty)$. D. $(0; 2)$.

Câu 16: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Hàm số nghịch biến trên khoảng

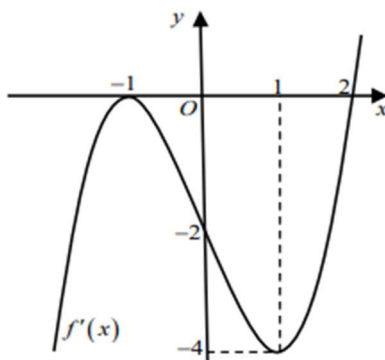
A. $(-1; 2)$.

B. $(-1; 0)$.

C. $(0; 2)$.

D. $(-2; 0)$.

Câu 17: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

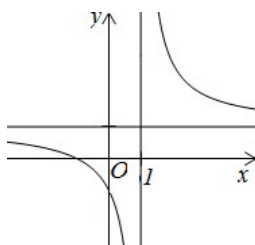
A. $(-1; 1)$.

B. $(-2; +\infty)$.

C. $(1; +\infty)$.

D. $(2; +\infty)$.

Câu 18: Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với a, b, c, d là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



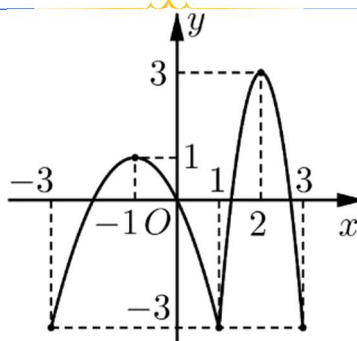
A. $y' < 0, \forall x \neq 1$

B. $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

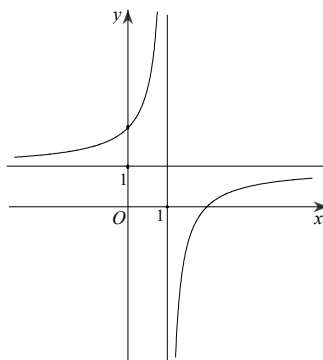
C. $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$

D. $y' > 0, \forall x \neq 1$

Câu 19: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(0; 2)$.B. $(-2; 0)$.C. $(-3; -1)$.D. $(2; 3)$.

Câu 20: Cho hàm số $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình bên dưới.



Xét các mệnh đề sau:

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$.

Hàm số đồng biến trên tập xác định.

Số các mệnh đề đúng là

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. 3.

Câu 21: Các khoảng đồng biến của hàm số $y = x^3 + 3x$ là

A. $(0; +\infty)$.B. $(0; 2)$.C. $\mathbb{R}$.D. $(-\infty; 1)$ và

$(2; +\infty)$.

Câu 22: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{2-x}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số đã cho đồng biến trên từng khoảng xác định của nó.

B. Hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

D. Hàm số đã cho nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.

Câu 23: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 5$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$. B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$. D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.

Câu 24: Tìm tất cả các khoảng đồng biến của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 1$.

A. $(1; 3)$.B. $(-\infty; 1)$ và $(3; +\infty)$.C. $(-\infty; 3)$.D. $(1; +\infty)$.

Câu 25: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
- B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và khoảng $(1; +\infty)$.
- C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
- D. Hàm số đã cho nghịch biến trên tập $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Câu 26: Trong các hàm số sau, hàm số nào luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $y = \sin x - x$.
- B. $y = -x^3 + 3x^2$.
- C. $y = \frac{2x+3}{x+1}$.
- D. $y = x^4 - 3x^2 - 1$.

Câu 27: Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $y = \tan x$.
- B. $y = x^4 + x^2 + 1$.
- C. $y = x^3 + 1$.
- D. $y = \frac{4x+1}{x+2}$.

Câu 28: Hàm số nào sau đây không đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

- A. $y = x^3 + 1$.
- B. $y = x + 1$.
- C. $y = \frac{x-2}{x-1}$.
- D. $y = x^5 + x^3 - 10$.

Câu 29: Cho hàm số $y = x^3 + 3x + 2$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
- B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
- C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
- D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Câu 30: Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- B. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; -\infty)$.
- D. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1) \cup (-1; -\infty)$.

Câu 31: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.
- B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.
- C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
- D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

Câu 32: Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y' = x^2(x-5)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên $(5; +\infty)$.
- B. Hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$.
- C. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- D. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 0)$ và $(5; +\infty)$.

Câu 33: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 + 2, \forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $f(-1) \geq f(1)$.

B. $f(-1) = f(1)$.

C. $f(-1) > f(1)$.

D. $f(-1) < f(1)$.

Câu 34: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x-2)^3(2x+3)$. Tìm số điểm cực trị của $f(x)$

A. 3.

B. 2.

C. 0.

D. 1.

Câu 35: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 - 2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = -2f(x)$ đồng biến trên khoảng

A. $(0; 2)$.

B. $(2; +\infty)$.

C. $(-\infty; -2)$.

D. $(-2; 0)$.

Câu 36: Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = x^2 - 5x + 4$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.

B. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(2; 3)$.

C. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

D. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(1; 4)$.

Câu 37: Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ và có bảng xét dấu của $f'(x)$

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	$ $	$+$	0	$-$

Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.

B. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-3; 2)$.

D. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2)$.

Câu 38: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $y = f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$			
$y = f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 3)$.

Câu 39: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x-1)^3(2-x)$. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng nào, trong các khoảng dưới đây?

A. $(-1; 1)$.

B. $(1; 2)$.

C. $(-\infty; -1)$.

D. $(2; +\infty)$.

Câu 40: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(0; 3)$ có tính chất $f'(x) \geq 0, \forall x \in (0; 3)$ và $f'(x) = 0, \forall x \in (1; 2)$. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.

B. Hàm số $f(x)$ không đổi trên khoảng $(1; 2)$.

C. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; 3)$.

D. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;3)$.

Câu 41: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập $\mathbb{R}$ và có $f'(x) = x^2 - 5x + 4$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(1;4)$.

B. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;3)$.

D. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(1;4)$.

Câu 42: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x-1)^3(2-x)$. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;2)$.

B. $(-\infty;-1)$.

C. $(-1;1)$.

D. $(2;+\infty)$.

Câu 43: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (3-x)(x^2-1) + 2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Hỏi hàm số $g(x) = f(x) - x^2 - 1$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

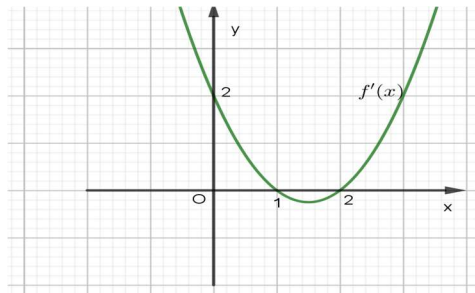
A. $(3;+\infty)$.

B. $(-\infty;1)$.

C. $(1;2)$.

D. $(-1;0)$.

Câu 44: Cho hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Hàm số $y = f(2-x^2)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây

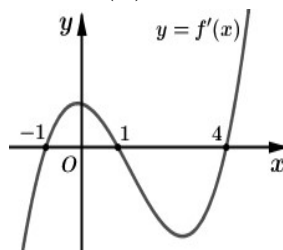
A. $(-\infty;0)$.

B. $(0;1)$.

C. $(1;2)$.

D. $(0;+\infty)$.

Câu 45: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y = f(x^2)$ có ít nhất bao nhiêu khoảng nghịch biến.

A. 2.

B. 4.

C. 3.

D. 5.

Lời giải

Ta có: $y' = 2x \cdot f'(x^2)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -1(l) \\ x^2 = 1 \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

Bảng xét dấu của $y' = 2x.f'(x^2)$:

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
y'	-	0	+	0	-	0	+

Dựa vào BXD chọn đáp án **C.**

Câu 46: Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng xét dấu như sau

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-

Hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.** $(0;1)$. **B.** $(-2;-1)$. **C.** $(-2;1)$. **D.** $(-4;-3)$.

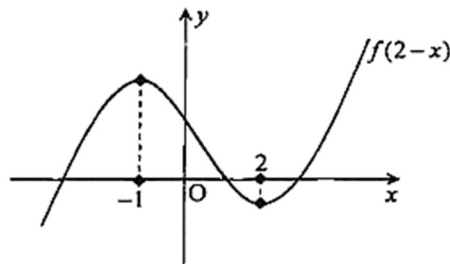
Câu 47: Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	1	2	3	4	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+

Hàm số $y = 3f(x+2) - x^3 + 3x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

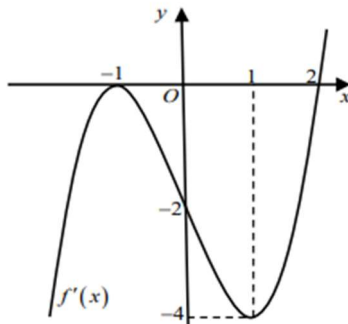
- A.** $(1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(0;2)$.

Câu 48: Cho đồ thị hàm số $y = f(2-x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f(x^2 - 3)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



- A.** $(-1;2)$. **B.** $(0;3)$. **C.** $(-\infty;-1)$. **D.** $(0;1)$.

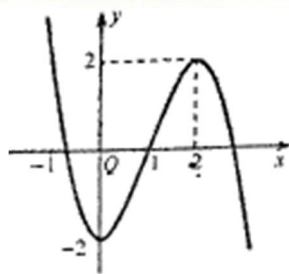
Câu 49: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



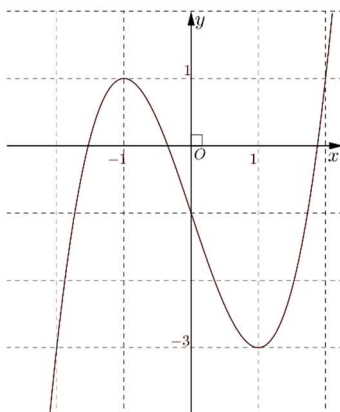
Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.** $(-1;1)$. **B.** $(-2;+\infty)$.
C. $(1;+\infty)$. **D.** $(2;+\infty)$.

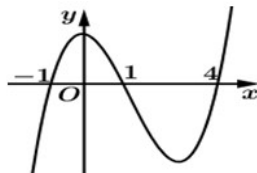
Câu 50: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty; 0)$.B. $(0; 2)$.C. $(-2; 2)$.D. $(2; +\infty)$.

Câu 51: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y = 2019 - f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0; 1)$.B. $(-2; 1)$.C. $(-3; 0)$.D. $(1; 2)$.

Câu 52: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới.

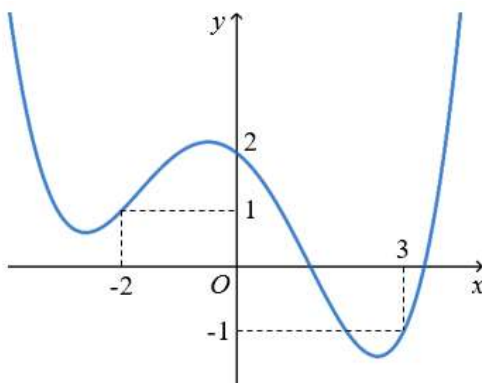


Hàm số $y = f(3 - 2x) + 2020$ nghịch biến trên khoảng nào?

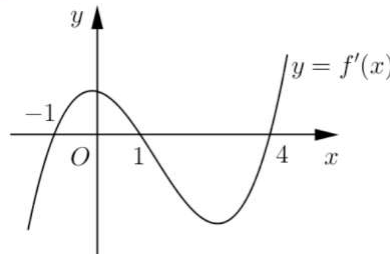
A. $(-1; 1)$.B. $(2; +\infty)$.C. $(1; 2)$.D. $(-\infty; 1)$.

Câu 53: Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số

$g(x) = f(x+1) + \frac{x^3}{3} - 3x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1; 2)$.B. $(-2; 0)$.C. $(0; 4)$.D. $(1; 5)$.

Câu 54: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Hàm số $y = f(|3 - x|)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(4; 7)$. B. $(-\infty; -1)$. C. $(2; 3)$. D. $(-1; 2)$.

Câu 55: Cho hàm số $y = \frac{3x+1}{x-m}$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(4; +\infty)$?

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Câu 56: Gọi S là tập hợp các số nguyên m để hàm số $y = \frac{x+2m-3}{x-3m+2}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -14)$. Tính tổng T của các phần tử trong S .

- A. $T = -6$. B. $T = -5$.
C. $T = -9$. D. $T = -10$.

Câu 57: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = \frac{x+3}{x+4m}$ nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$?

- A. 1. B. 3. C. Vô số. D. 2.

Câu 58: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2mx^2 + 4x - 5$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. 0. B. 2. C. 3. D. 1.

Câu 59: Cho hàm số $y = (m-1)x^3 + (m-1)x^2 - 2x + 5$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

- A. 1. B. 4. C. 2. D. 5.

Câu 60: Giá trị nhỏ nhất của số thực m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 - mx - m$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $m = -2$. B. $m = 1$. C. $m = -1$. D. $m = 0$.

Câu 61: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = mx^3 + mx^2 + m(m-1)x + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $m \leq \frac{4}{3}$. B. $m \leq \frac{4}{3}; m \neq 0$. C. $m = 0, m \geq \frac{4}{3}$. D. $m \geq \frac{4}{3}$.

Câu 62: Với giá trị nào của tham số m thì hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m-3)x - m + 2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $-3 \leq m \leq 1$. B. $m \leq 1$.
C. $\begin{cases} m \leq -3 \\ m \geq 1 \end{cases}$. D. $-3 < m < 1$.

Câu 63: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + 4x + 2$ đồng biến trên tập xác định của nó?

A. 4.

B. 2.

C. 5.

D. 3.

Câu 64: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x^2-2x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên $m < 100$ để hàm số $g(x) = f(x^2 - 8x + m)$ đồng biến trên khoảng $(4; +\infty)$.

A. 83.

B. 18.

C. 82.

D. 84.

Câu 65: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
y'		0	0	
y	$-\infty$	-2	-3	$+\infty$

Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

A. $x = 3$.B. $x = 0$.C. $x = -1$.D. $x = -2$.

Câu 66: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như hình bên. Khẳng định nào sau đây **sai**?

x	$-\infty$		-3		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	+	0	-	0	+	

A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.B. Hàm số đạt cực đại tại $x = -3$.C. $x = 1$ là điểm cực trị của hàm số.

D. Hàm số có hai điểm cực trị.

Câu 67: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$				-3				$+\infty$
			-4			-4			

Hàm số đạt cực đại tại điểm

A. $x = 0$.B. $(0; -3)$.C. $y = -3$.D. $x = -3$.

Câu 68: Hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới. Khẳng định nào sau đây đúng?

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$		
y'	$+$	$\parallel$	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	0	1	-1	0		

A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$.B. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 1 và giá trị nhỏ nhất bằng -1 .

C. Hàm số có đúng hai cực trị.

D. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, $x = 1$ và đạt cực tiểu tại $x = 2$.

Câu 69: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
y'		+	-	+
y				

Diagram showing a function $y = f(x)$ with a local maximum at x_1 and a local minimum at x_2 . The function values approach $-\infty$ as $x \rightarrow x_1^-$ and $+\infty$ as $x \rightarrow x_2^+$. The value at the local minimum is $f(x_2)$.

Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số đã cho có một điểm cực đại và một điểm cực tiểu.
- B. Hàm số đã cho không có cực trị.
- C. Hàm số đã cho có một điểm cực đại và không có điểm cực tiểu.
- D. Hàm số đã cho có một điểm cực tiểu và không có điểm cực đại.

Câu 70: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$			1				$+\infty$
		$\searrow$	0	$\nearrow$	0	$\searrow$	0	$\nearrow$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho là

- A. $y = 1$.
- B. $x = 0$.
- C. $y = 0$.
- D. $x = 1$.

Câu 71: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên dưới. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	5	1	$+\infty$	

- A. Hàm số không có cực trị.
- B. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.
- C. Hàm số đạt cực đại tại $x = 5$.
- D. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Câu 72: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$			3			0		$+\infty$
			0				0		

Mệnh đề nào dưới đây là **sai**?

- A. Hàm số có giá trị cực đại bằng 0.
- B. Hàm số có giá trị cực đại bằng 3.
- C. Hàm số có ba điểm cực trị.
- D. Hàm số có hai điểm cực tiểu.

Câu 73: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây đúng?

x	$-\infty$	2	4	$+\infty$	
y'	-	0	+	0	-
y	$-\infty$	3	-2	$+\infty$	

A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -2$.

B. Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.

C. Hàm số đạt cực đại tại $x = 4$.

D. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$.

Câu 74: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên dưới. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	5	1	$+\infty$	

A. Hàm số không có cực trị.

B. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.

C. Hàm số đạt cực đại tại $x = 5$.

D. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Câu 75: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	+		-	0	+
y	$-\infty$	0	-1	$+\infty$	

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số $y = f(x)$ có giá trị cực tiểu bằng 1.

B. Hàm số $y = f(x)$ có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng 1.

C. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.

D. Hàm số $y = f(x)$ có đúng một cực trị.

Câu 76: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$			2			$+\infty$
		1			1		

Khẳng định nào sau đây **sai**?

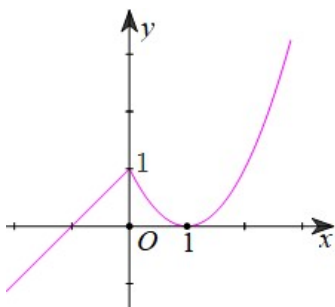
A. $x_0 = 1$ là điểm cực tiểu của hàm số.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

C. $M(0; 2)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.

D. $f(-1)$ là một giá trị cực tiểu của hàm số.

Câu 77: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hỏi hàm số đó có bao nhiêu điểm cực trị?

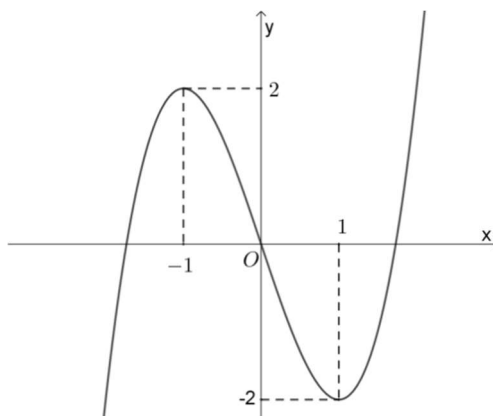


A. 0.

B. 3.

C. 1. D. 2.

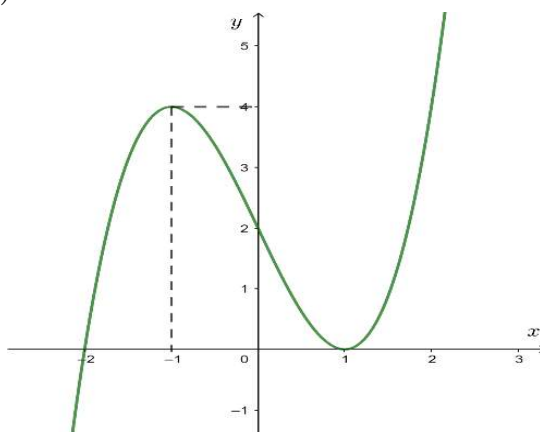
Câu 78: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị



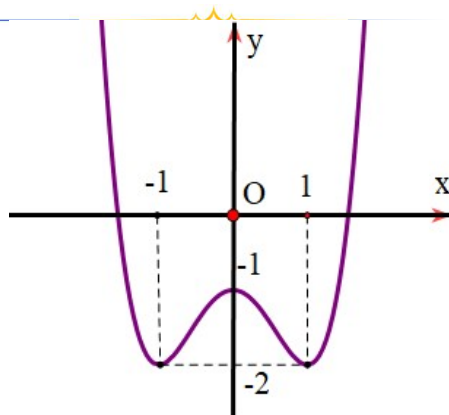
Hàm số đã cho đạt cực đại tại

A. $x = -1$.B. $x = 2$.C. $x = 1$.D. $x = -2$.

Câu 79: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm kết luận đúng?

A. Hàm số $f(x)$ có điểm cực tiểu là $x = 2$.B. Hàm số $f(x)$ có giá trị cực đại là -1 .C. Hàm số $f(x)$ có điểm cực đại là $x = 4$.D. Hàm số $f(x)$ có giá trị cực tiểu là 0 .

Câu 80: Cho hàm số có đồ thị như hình vẽ. Giá trị cực đại của hàm số bằng



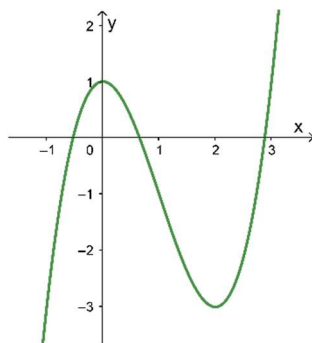
A. -1.

B. -2.

C. 1.

D. 0.

Câu 81: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Điểm cực đại của hàm số đã cho bằng

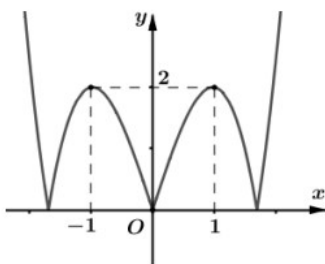
A. -3.

B. 0.

C. 2.

D. 1.

Câu 82: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Hỏi hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?



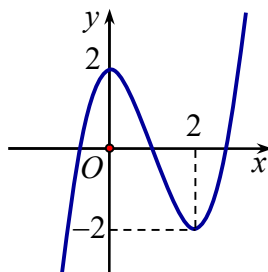
A. 4.

B. 5.

C. 2.

D. 3.

Câu 83: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. Hàm số có ba cực trị.

B. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 2.

C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2 và giá trị nhỏ nhất bằng -2.

D. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 2$.

Câu 84: Hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 0.

Câu 85: Tìm điểm cực đại x_0 của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$.

A. $x_0 = 2$.B. $x_0 = 1$.C. $x_0 = -1$.D. $x_0 = 3$.

Câu 86: Hàm số $y = \frac{1-2x}{-x+2}$ có bao nhiêu cực trị?

A. 3.

B. 0.

C. 2.

D. 1.

Câu 87: Gọi x_1 và x_2 là hai điểm cực trị của hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 - 2x$. Giá trị của $x_1^2 + x_2^2$ bằng

A. 13.

B. 32.

C. 40.

D. 36.

Câu 88: Hàm số $y = 2x^3 - x^2 + 5$ có điểm cực đại là

A. $x = \frac{1}{3}$.B. $x = 5$.C. $x = 3$.D. $x = 0$.

Câu 89: Điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = x^3 - 12x + 12$ là

A. $(-2; 28)$.B. $(-2; 2)$.C. $(2; -4)$.D. $(4; 28)$.

Câu 90: Hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$ đạt cực trị tại x_1 và x_2 thì tích các giá trị cực trị bằng

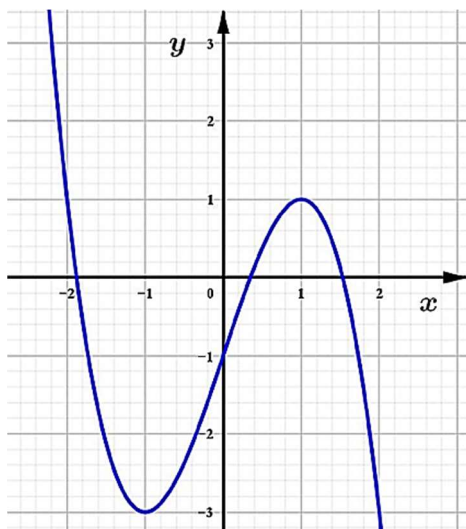
A. -302.

B. -207.

C. 25.

D. -82.

Câu 91: Cho hàm số $y = f(x)$, có đạo hàm là $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình dưới đây.



Hỏi hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu cực trị?

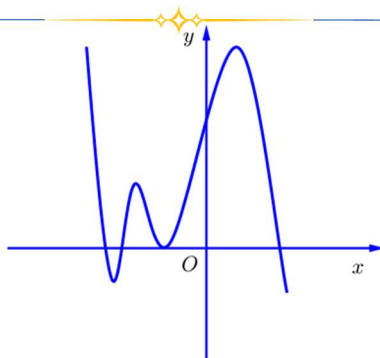
A. 1.

B. 0.

C. 3.

D. 2.

Câu 92: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là đường cong ở hình bên. Hỏi hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



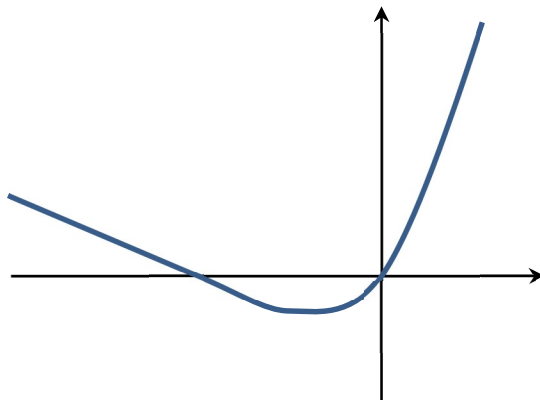
A. 6.

B. 5.

C. 4.

D. 3.

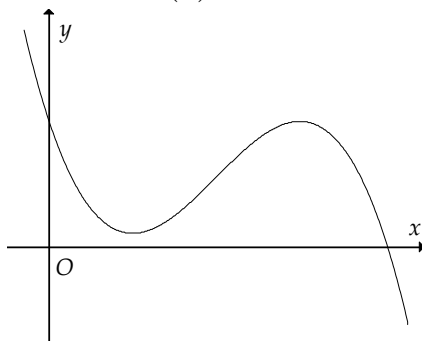
Câu 93: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, đồ thị của đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ sau:



Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. f đạt cực tiểu tại $x = 0$.B. f đạt cực tiểu tại $x = -2$.C. f đạt cực đại tại $x = -2$.D. Cực tiểu của f nhỏ hơn cực đại.

Câu 94: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên.



Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$.

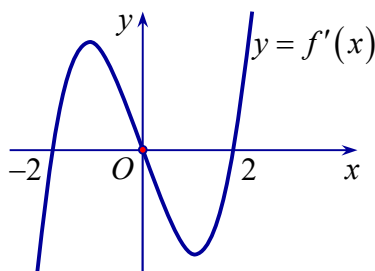
A. 3.

B. 1.

C. 0.

D. 2.

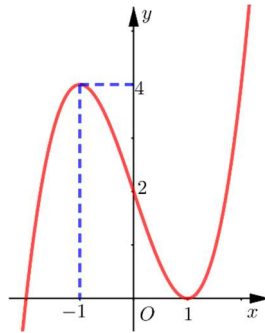
Câu 95: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $f(x)$ đạt cực đại tại $x=1$.B. $f(x)$ đạt cực đại tại $x=0$.C. $f(x)$ đạt cực đại tại $x=-1$.D. $f(x)$ đạt cực đại tại $x=\pm 2$.

Câu 96: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau:



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x) - 5x$ là:

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 1.

Câu 97: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = mx^3 + x^2 + (m^2 - 6)x + 1$ đạt cực tiểu tại $x=1$.

A. $m=1$.B. $m=-4$.C. $m=-2$.D. $m=2$.

Câu 98: Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực tiểu tại $x=3$.

A. $m=1$.B. $m=-1$.C. $m=5$.D. $m=-7$.

Câu 99: Đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có hai điểm cực trị là $A(1; -7)$, $B(2; -8)$. Tính $y(-1)$.

A. $y(-1)=11$.B. $y(-1)=7$.C. $y(-1)=-11$.D. $y(-1)=-35$.

Câu 100: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x$. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại $x_0=1$.

A. $m \neq 0$ và $m \neq 2$.B. $m=2$.C. $m=0$.D. $m=0$ hoặc $m=2$.

Câu 101: Biết điểm $M(0; 4)$ là điểm cực đại của đồ thị hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + a^2$. Tính $f(3)$.

A. $f(3)=17$.B. $f(3)=49$.C. $f(3)=34$.D. $f(3)=13$.

Câu 102: Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực đại tại điểm $x=3$.

A. $m=-7$.B. $m=5$.C. $m=-1$.D. $m=1$.

♦ Dạng 2: Câu trắc nghiệm đúng, sai

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 + 2025, \forall x \in \mathbb{R}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.d) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2025)$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$			3		-1	$+\infty$

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
- Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.
- Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 3)$.
- Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- Nếu phương trình $f'(x) = 0$ vô nghiệm thì hàm số $y = f(x)$ không có cực trị.
- Nếu $f'(x_0) = 0$ thì hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại $x = x_0$.
- Nếu hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại $x = x_0$ thì đạo hàm đổi dấu khi x chạy qua x_0 .
- Nếu hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại $x = x_0$ thì $f''(x_0) \neq 0$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên dưới đây:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$				-3				$+\infty$

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- Hàm số đạt cực đại tại $x=1$.
- Hàm số có hai điểm cực đại.
- Hàm số có ba điểm cực trị.
- Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.

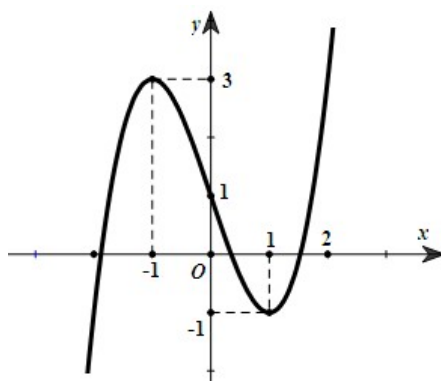
Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
y'		+	-	+
y	$-\infty$		$f(x_2)$	$+\infty$

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Hàm số đã cho có một điểm cực tiểu và không có điểm cực đại.
- b) Hàm số đã cho không có cực trị.
- c) Hàm số đã cho có một điểm cực đại và một điểm cực tiểu.
- d) Hàm số đã cho có một điểm cực đại và không có điểm cực tiểu.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ.



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Đồ thị hàm số có điểm cực đại là $(-1; 3)$.
- b) Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu là $(-1; 1)$.
- c) Đồ thị hàm số có điểm cực đại là $(1; -1)$.
- d) Đồ thị hàm số có điểm cực đại là $(3; -1)$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$							$+\infty$

<

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Hàm số đạt cực tiểu tại $x=3$.
- b) Giá trị cực tiểu của hàm số bằng 3.
- c) Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.

d) Hàm số chỉ có 1 điểm cực tiểu.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$				
y'		$-$	$ $	$+$	$ $	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$			2			0		$+\infty$

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- Hàm số có 1 điểm cực trị.
- Hàm số không có điểm cực trị.
- Hàm số có 2 điểm cực trị.
- Hàm số có 3 điểm cực trị.

Câu 9: Cho hàm số $y = \frac{-x+2}{x-1}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.
- Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.
- Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- Hàm số nghịch biến với mọi $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	2	5	-6	2	

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

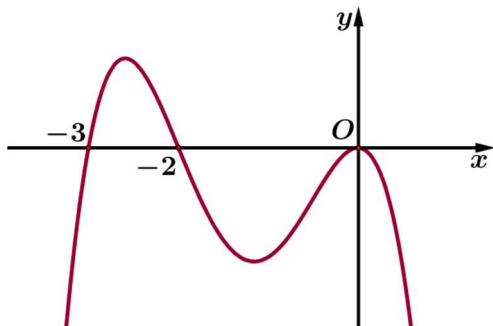
- Hàm số có điểm cực đại là $(-1; 5)$.
- Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -6$.
- Hàm số có bốn điểm cực trị.
- Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$.

Câu 11: Cho hàm số $y = x^4 + 2025$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
- Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
- Hàm số đồng biến trên khoảng $(2025; +\infty)$.

d) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 12: Hàm số $y = f(x)$ xác định, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-3; -2)$.
- b) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.
- c) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.
- d) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$.

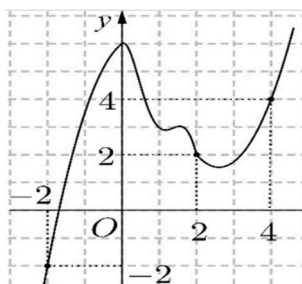
Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	5	-2	$+\infty$	

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Giá trị cực đại của hàm số là 5.
- b) Giá trị cực đại của hàm số là -2 .
- c) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -2$.
- d) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $h(x) = f(x) - x$.

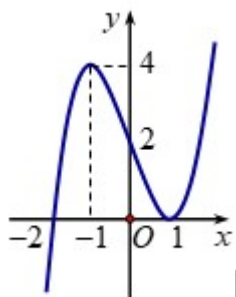


Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) $h(1) + 1 = h(4) < h(2)$.
- b) $h(0) = h(4) + 2 < h(2)$
- c) $h(-1) < h(0) < h(2)$.

d) $h(2) < h(4) < h(0)$.

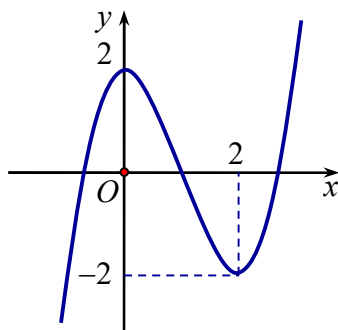
Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ($y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$). Xét hàm số $g(x) = f(x^2 - 3)$.



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(-1; 0)$.
- b) Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; -1)$.
- c) Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(1; 2)$.
- d) Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(2; +\infty)$.

Câu 16: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên.



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu là $x = 2$.
- b) Hàm số có điểm cực đại là 2.
- c) Hàm số có cực tiểu là 2.
- d) Hàm số có tổng cực đại và cực tiểu là 0.

Câu 17: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-6	0	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$
y	$+\infty$			$+\infty$

-427

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Hàm số có 1 điểm cực trị.
- b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -6)$.
- c) Điểm cực tiểu của hàm số là $x = -6$.
- d) Hàm số có 2 điểm cực trị.

Câu 18: Cho hàm số $y = \left(\frac{3}{4}\right)^{x^2-2x+2}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Hàm số không có cực trị
- b) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$
- c) Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$
- d) Hàm số có 2 cực trị.

Câu 19: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	
y	$+\infty$			3			$+\infty$

```

graph LR
    y_inf1[" $+\infty$ "] --> y_0[" $0$ "]
    y_0 --> y_3[" $3$ "]
    y_3 --> y_0
    y_0 --> y_inf2[" $+\infty$ "]

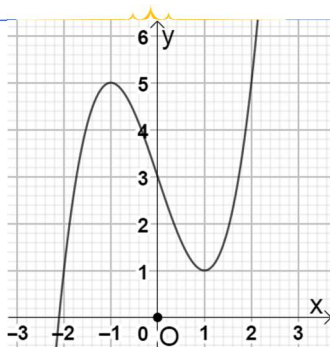
```

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 0$.
- b) Hàm số có hai điểm cực đại.
- c) Hàm số có hai điểm cực trị.
- d) Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 3$.

Câu 20: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Xét hàm số

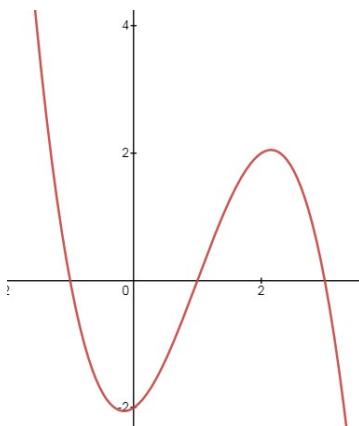
$$g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^2 - 3x.$$



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) $g(0) \leq g(2)$.
- b) $g(-2) > g(0)$.
- c) $g(2) < g(4)$.
- d) $g(-4) = g(-2)$.

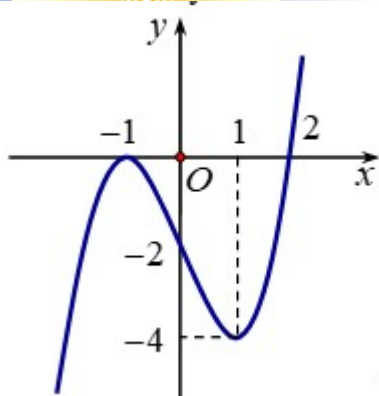
Câu 21: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Xét hàm số $g(x) = f(x) + x$.



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Hàm số có 2 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu.
- b) Hàm số không có điểm cực tiểu.
- c) Hàm số có 2 điểm cực tiểu và 1 điểm cực đại.
- d) Hàm số không có điểm cực đại.

Câu 22: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị hàm số $y = f'(x)$, ($y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$). Xét hàm số $g(x) = f(x^2 - 2)$.



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.
- b) Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.
- c) Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 0)$.
- d) Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

Câu 23: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	$ $	$+$	0	$+$	$-$
$f(x)$	$+\infty$	3	0	4	0	

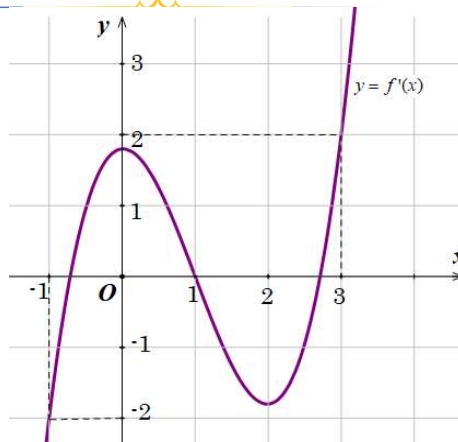
Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng.
- b) Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang.
- c) Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 2$.
- d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên khoảng $(2; +\infty)$ bằng 0 .

Câu 24: Cho hàm số $y = f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Hàm số $y = f(x)$ là hàm số lẻ trên tập xác định.
- b) Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.
- c) Hàm số $y = f(x)$ là hàm số chẵn trên tập xác định.
- d) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên tập xác định.

Câu 25: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên tập số thực $\mathbb{R}$ và hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^2 + x + 1$. Biết đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây



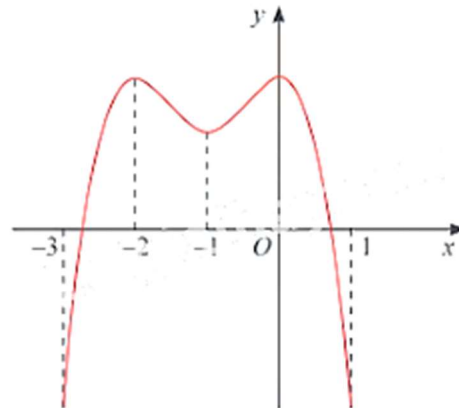
Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 2 điểm cực tiểu và 1 điểm cực đại.
- b) Đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 2 điểm cực tiểu và không có điểm cực đại.
- c) Đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 1 điểm cực tiểu và 2 điểm cực đại.
- d) Đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 3 điểm cực tiểu và 1 điểm cực đại.

♦ Dạng ③: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

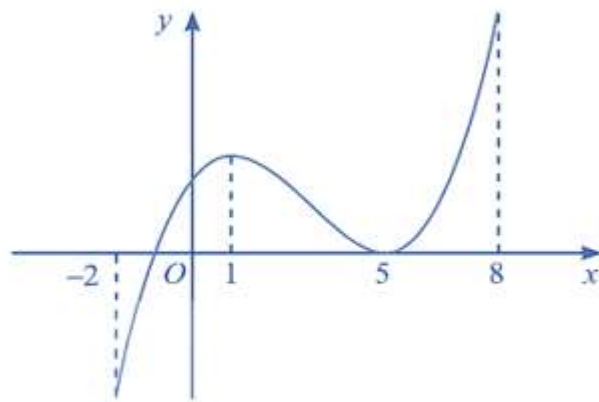
Câu 1: Tìm các khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của hàm số $y = -x^2 + 2x + 3$.

Câu 2: Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = f(x)$ có đồ thị cho ở Hình 3.



Hình 3

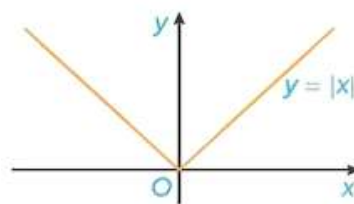
Câu 3: Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = f(x)$ có đồ thị cho ở Hình 2.



Hình 2

Câu 4: Chứng minh rằng hàm số $g(x) = \frac{x}{x-1}$ nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

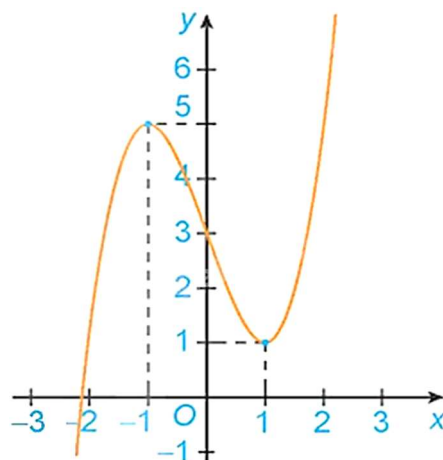
Câu 5: Hình 1.4 là đồ thị của hàm số $y = f(x) = |x|$. Hãy tìm các khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của hàm số.



Hình 1.4

Câu 6: Xét dấu y' rồi tìm khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + x - 1$.

Câu 8: Hình 1.9 là đồ thị của hàm số $y = f(x)$. Hãy tìm các cực trị của hàm số.



Hình 1.9

Câu 9: Lập bảng biến thiên và xác định các khoảng đơn điệu của hàm số:

$$y = f(x) = 2x^3 + 6x^2 + 6x - 9$$

Câu 12: Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - x + 5$.

Câu 13: Tìm điểm cực trị của hàm số $y = \frac{x^2+x+1}{x+1}$.

Câu 14: Quan sát bảng biến thiên dưới đây và cho biết:

a) x_0 có là điểm cực đại của hàm số $f(x)$ hay không.

b) x_1 có là điểm cực tiểu của hàm số $h(x)$ hay không.

x	a	x_0	b
$f'(x)$	+	-	
$f(x)$		$f(x_0)$	

x	a	x_1	b
$h'(x)$	-	+	
$h(x)$		$h(x_1)$	

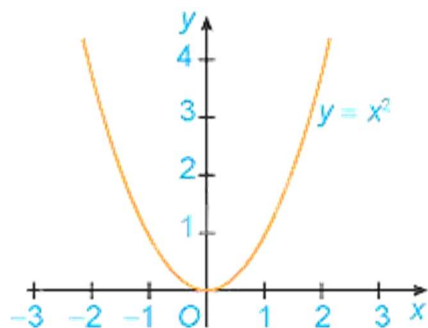
Câu 15: Tìm cực trị của hàm số $y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{1}{3}$.

Câu 16: Tìm cực trị của hàm số $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 1$.

Câu 17: Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = x^4 + 2x^2 - 3$.

Câu 18: Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số sau $y = \frac{2x-1}{x+2}$.

Câu 19: Quan sát đồ thị của hàm số $y = x^2$ (H.1.2)

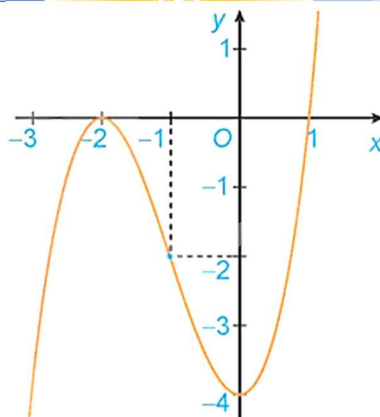


Hình 1.2

a) Hàm số đồng biến trên khoảng nào?

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng nào?

Câu 20: Quan sát đồ thị của hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 4$ (H.1.7). Xét dấu đạo hàm của hàm số đã cho và hoàn thành các bảng sau vào vở:

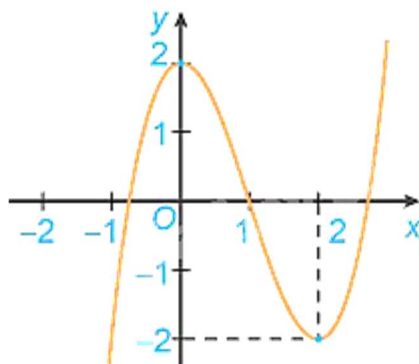


Hình 1.7

x	-3	-2	-1
y'	?	0	?
y	-4	?	-2

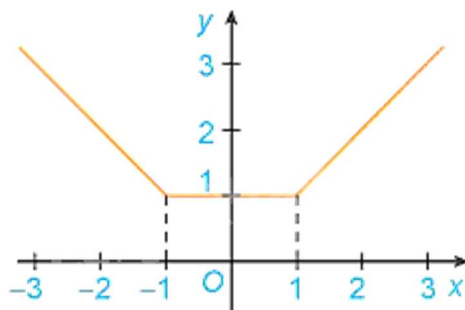
x	-1	0	1
y'	?	0	?
y	-2	?	0

Câu 21: Hình 1.5 là đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Hãy tìm các khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của hàm số.



Hình 1.5

Câu 22:



Hình 1.6

a) Xét dấu đạo hàm của hàm số trên các khoảng $(-\infty; -1)$, $(1; +\infty)$. Nêu nhận xét về mối quan hệ giữa tính đồng biến, nghịch biến và dấu của đạo hàm trên mỗi khoảng này.

b) Có nhận xét gì về đạo hàm y' của hàm số y trên khoảng $(-1; 1)$?

Câu 23: Chứng minh rằng hàm số $y = \sqrt{x^2 + 1}$ nghịch biến trên nửa khoảng $(-\infty; 0]$ và đồng biến trên nửa khoảng $[0; +\infty)$.

Câu 24: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$.

a) Tính đạo hàm $f'(x)$ và tìm các điểm x mà $f'(x) = 0$.

b) Lập bảng biến thiên của hàm số, tức là lập bảng thể hiện dấu của đạo hàm và sự đồng biến, nghịch biến của hàm số trên các khoảng tương ứng.

c) Nếu kết luận về khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

Câu 25: Tìm các khoảng đơn điệu của các hàm số sau:

a) $y = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 5x + 2$; b) $y = \frac{-x^2 + 5x - 7}{x - 2}$.

Câu 26: Giải bài toán trong tình huống mở đầu bằng cách thực hiện lần lượt các yêu cầu sau:

a) Theo ý nghĩa cơ học của đạo hàm, vận tốc $v(t)$ là đạo hàm của $s(t)$. Hãy tìm vận tốc $v(t)$.

b) Xét dấu của hàm $v(t)$, từ đó suy ra câu trả lời.

Bài toán mở đầu:

Xét một chất điểm chuyển động trên một trục số nằm ngang, chiều dương từ trái sang phải (H.1.1). Giả sử vị trí $s(t)$ (mét) của chất điểm trên trục số đã chọn tại thời điểm t (giây) được cho bởi công thức $s(t) = t^3 - 9t^2 + 15t$, $t \geq 0$. Hỏi trong khoảng thời gian nào thì chất điểm chuyển động sang phải, trong khoảng thời gian nào thì chất điểm chuyển động sang trái?



Hình 1.1

Câu 27: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x + 1$.

a) Tính đạo hàm $f'(x)$ và tìm các điểm mà tại đó đạo hàm $f'(x)$ bằng 0.

b) Lập bảng biến thiên của hàm số.

c) Từ bảng biến thiên suy ra các điểm cực trị của hàm số.

Câu 28: Giải thích vì sao nếu $f'(x)$ không đổi dấu qua x_0 thì x_0 không phải là điểm cực trị của hàm số $f(x)$?

Câu 29: Tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = x^4 - 3x^2 + 1$; b) $y = \frac{-x^2 + 2x - 1}{x + 2}$.

Câu 30: Cho hàm số $y = f(x) = x^2$

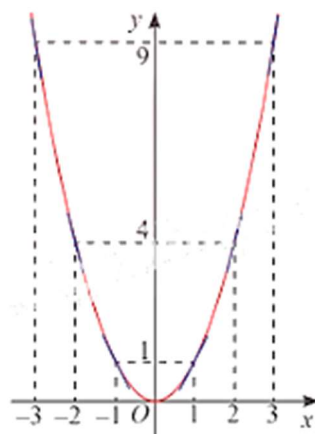
a) Từ đồ thị của hàm số $y = f(x)$ (Hình 4), hãy chỉ ra các

khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số đã cho.

b) Tính đạo hàm $f'(x)$ và xét dấu $f'(x)$.

c) Từ đó, nhận xét về mối liên hệ giữa các khoảng đồng biến,

ngịch biến của hàm số với dấu của $f'(x)$.



Hình 4

Câu 31: Xét tính đơn điệu của các hàm số sau:

a) $f(x) = -x^3 + 3x^2$; b) $g(x) = x + \frac{1}{x}$ c) $h(x) = x^3$.

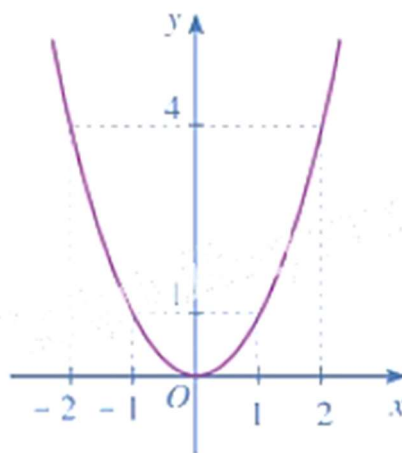
Câu 32: Xác định các khoảng đồng biến, nghịch biến và lập bảng biến thiên của hàm số:

a) $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$; b) $y = f(x) = x + \frac{1}{x}$.

Câu 33:

a) Nêu định nghĩa hàm số đồng biến, hàm số nghịch biến trên tập $K \subset \mathbb{R}$, trong đó K là một khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng.

b) Cho hàm số $y = f(x) = x^2$ có đồ thị như Hình 2.



Hình 2

Xác định khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số đó.

Xét dấu đạo hàm $f'(x) = 2x$.

Nêu mối liên hệ giữa sự đồng biến, nghịch biến của hàm số $f(x) = x^2$ và dấu của đạo hàm $f'(x) = 2x$ trên mỗi khoảng $(-\infty; 0)$, $(0; +\infty)$.

Hoàn thành bảng biến thiên sau:

•HỌ VÀ TÊN HS:.....

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$?$	$?$	$?$	
$f(x)$	$+\infty$				$+\infty$
			$?$		

Câu 34:

a) Xác định tính đồng biến, nghịch biến của hàm số $f(x) = x^3$.

b) Xét dấu của đạo hàm $f'(x) = 3x^2$.

c) Phương trình $f'(x) = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

Câu 35: Tìm điểm cực trị của mỗi hàm số sau:

a) $y = x^4 - 6x^2 + 8x + 1$.

b) $y = \frac{3x+5}{x-1}$.

► BÀI 2. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

A. Tóm tắt kiến thức

1. ĐỊNH NGHĨA

-  Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D .
- ✓ Số M được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên tập D nếu $f(x) \leq M$ với mọi $x \in D$ và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = M$.
-  Kí hiệu $M = \max_{x \in D} f(x)$ hoặc $M = \max_D f(x)$.
- ✓ Số m được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên tập D nếu $f(x) \geq m$ với mọi $x \in D$ và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = m$.
-  Kí hiệu $m = \min_{x \in D} f(x)$ hoặc $m = \min_D f(x)$.

2. CÁCH TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ TRÊN MỘT ĐOẠN

-  Giả sử $y = f(x)$ là hàm số liên tục trên $[a; b]$ và có đạo hàm trên $(a; b)$, có thể trừ ra tại một số hữu hạn điểm mà tại đó hàm số không có đạo hàm. Giả sử chỉ có hữu hạn điểm trong đoạn $[a; b]$ mà đạo hàm $f'(x)$ bằng 0.
-  Các bước tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$:
 - ①. Tìm các điểm $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a; b)$, tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc không tồn tại.
 - ②. Tính $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(a)$ và $f(b)$.
 - ③. Tìm số lớn nhất M và số nhỏ nhất m trong các số trên.

Ta có: $M = \max_{[a; b]} f(x); m = \min_{[a; b]} f(x)$.

B. Phân dạng toán cơ bản

♦Dạng 1: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

▣Các ví dụ minh họa

Câu 1: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Câu 2: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a) $y = f(x) = 2x + 3$ trên đoạn $[-3; 1]$;

b) $y = g(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Câu 3: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của mỗi hàm số sau:

a) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$ trên đoạn $[-3; 2]$;

b) $g(x) = \frac{\ln x}{x}$ trên đoạn $[1; 4]$.

♦Dạng 2: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên một đoạn

▣Các ví dụ minh họa

Câu 1: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số $y = x - 2 + \frac{1}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

Câu 2: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin x + \cos x$ trên đoạn $[0; 2\pi]$.

Câu 3: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 3$ trên đoạn $[0; 4]$.

♦Dạng 3: Ứng dụng thực tế

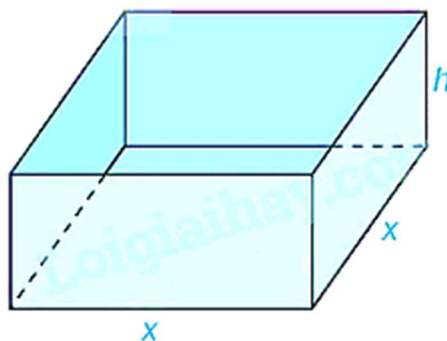
▣Các ví dụ minh họa

Câu 1: Giả sử sự lây lan của một loại virus ở một địa phương có thể được mô hình hóa bằng hàm số $N(t) = -t^3 + 12t^2$, $0 \leq t \leq 12$, trong đó N là số người bị nhiễm bệnh (tính bằng trăm người) và t là thời gian (tuần).

a) Hãy ước tính số người tối đa bị nhiễm bệnh ở địa phương đó.

b) Đạo hàm $N'(t)$ biểu thị tốc độ lây lan của virus (còn gọi là tốc độ truyền bệnh). Hỏi virus sẽ lây lan nhanh nhất khi nào?

Câu 2: Một nhà sản xuất muốn thiết kế một chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp, có đáy là hình vuông và diện tích bề mặt bằng 108 cm^2 như Hình 1.17. Tìm các kích thước của chiếc hộp sao cho thể tích của hộp là lớn nhất.



Hình 1.17

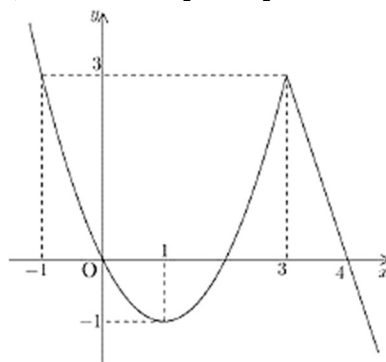
Câu 3: Một nhà sản xuất cần làm ra những chiếc bình có dạng hình trụ với dung tích 1000 cm^3 . Mặt trên và mặt dưới của bình được làm bằng vật liệu có giá $1,2$ nghìn đồng / cm^2 , trong khi mặt

bên của bình được làm bằng vật liệu có giá 0,75 nghìn đồng/ cm^2 . Tìm các kích thước của bình để chi phí vật liệu sản xuất mỗi chiếc bình là nhỏ nhất.

©. Dạng toán rèn luyện

♦Dạng 1: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-1; +\infty)$ và có đồ thị như hình vẽ. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 4]$.



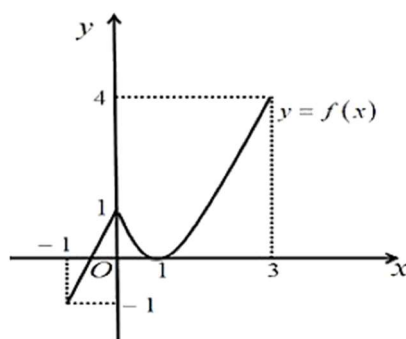
A. 3.

B. -1.

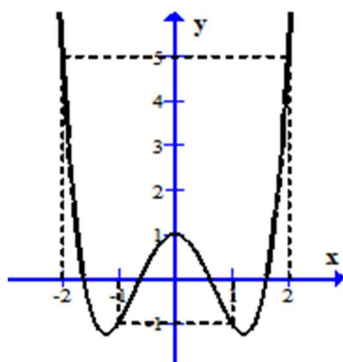
C. -3.

D. 0.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ và có đồ thị như hình vẽ. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 3]$. Ta có giá trị của $M + 2m$ là

A. $M + 2m = 1$.B. $M + 2m = 2$.C. $M + 2m = 3$.D. $M + 2m = 4$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên.



Giá trị lớn nhất của hàm số này trên đoạn $[-1; 2]$ bằng?

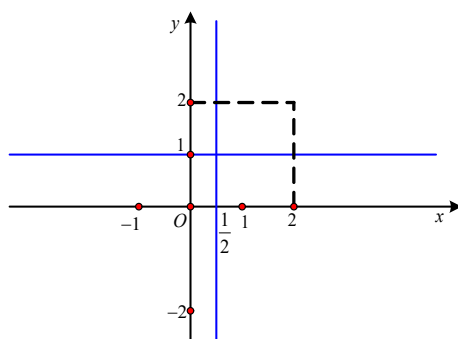
A. 5.

B. 2.

C. 1.

D. không xác định được.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ và $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ là đường cong trong hình vẽ bên.



Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau?

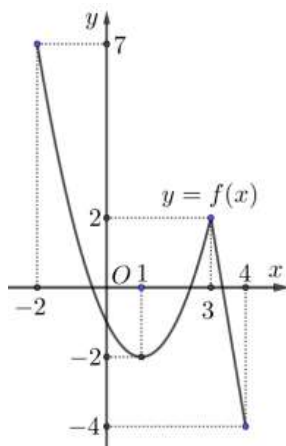
A. $\max_{[1;2]} f(x) = 2$.

B. $\max_{[-2;1]} f(x) = 0$.

C. $\max_{[-3;0]} f(x) = f(-3)$.

D. $\max_{[3;4]} f(x) = f(4)$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đồ thị trên đoạn $[-2; 4]$ như hình vẽ bên. Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2; 4]$ bằng



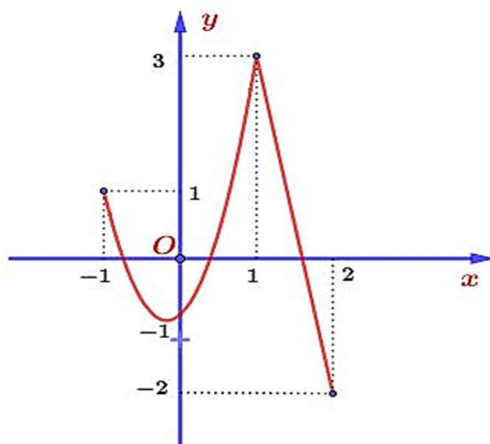
A. 5.

B. 3.

C. 0.

D. -2.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 2]$ và có đồ thị như hình vẽ?



Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 2]$.

Ta có $M + m$ bằng:

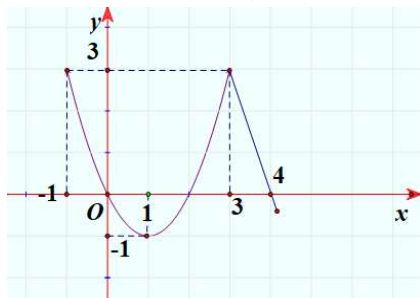
A. 2.

B. 0.

C. 4.

D. 1.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-1; +\infty)$ và có đồ thị như hình vẽ.



Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $[1; 4]$.

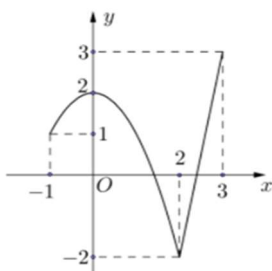
A. 0.

B. 1.

C. 4.

D. 3.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 3]$. Giá trị $M - m$ bằng



A. 0.

B. 1.

C. 4.

D. 5.

Câu 9: Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 2$ trên đoạn $[-1; 2]$. Tỉ số $\frac{M}{m}$ bằng

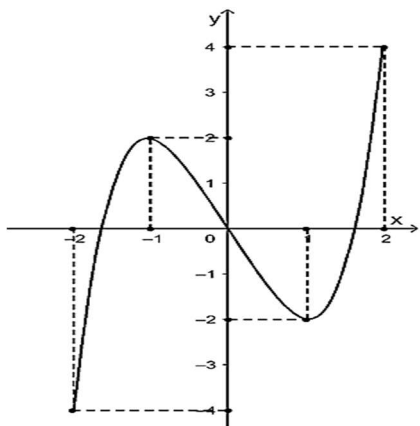
A. $-\frac{6}{5}$.

B. -3.

C. $\frac{5}{2}$.

D. -2.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ.



Đặt $M = \max_{[-2; 2]} f(x)$, $m = \min_{[-2; 2]} f(x)$. Khi đó $M + m$ bằng

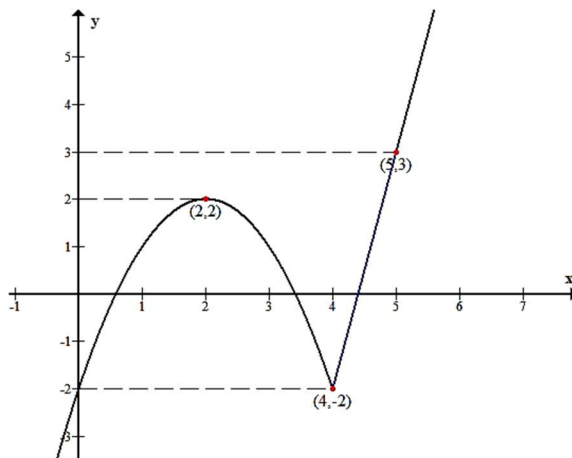
A. 0.

B. 8.

C. 2.

D. 4.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Xác định giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[0; 5]$.



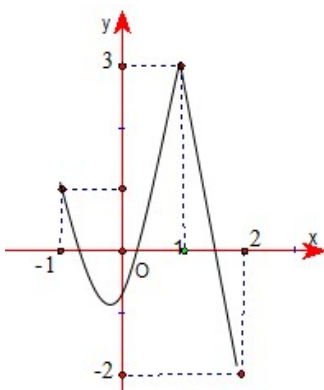
A. $\max_{[0;5]} y = 5$.

B. $\max_{[0;5]} y = 3$.

C. $\max_{[0;5]} y = 4$.

D. $\max_{[0;5]} y = 2$.

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 2]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 2]$. Ta có $M + m$ bằng



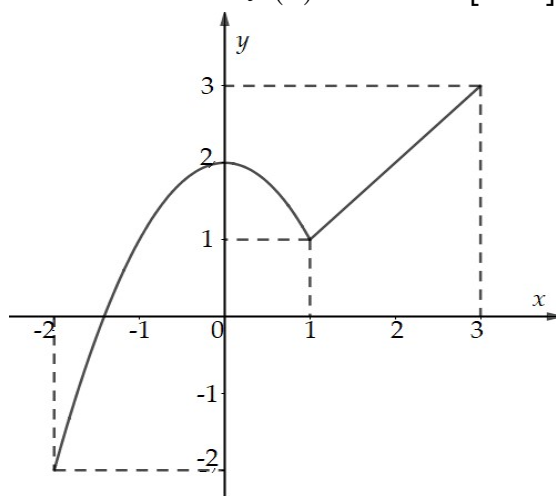
A. 1.

B. 4.

C. 2.

D. 0.

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x), x \in [-2; 3]$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-2; 3]$. Giá trị $M + m$ là



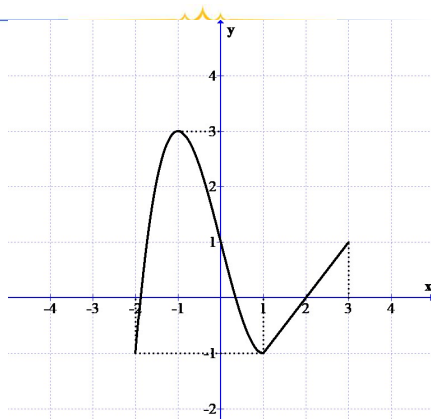
A. 6.

B. 1.

C. 5.

D. 3.

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-2; 3]$.

Giá trị của $M - m$ bằng

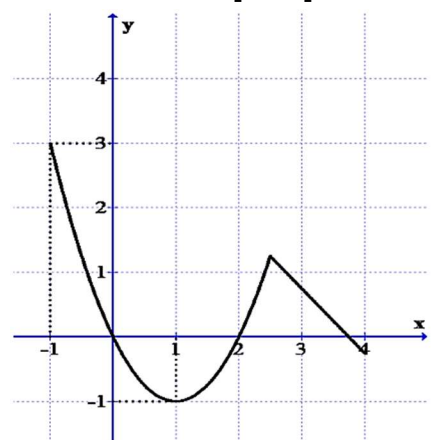
A. 0.

B. 1.

C. 4.

D. 5.

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 4]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 4]$.

Giá trị của $M + m$ bằng

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 5.

Câu 16: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có bảng biến thiên trên đoạn $[-1; 3]$ như hình vẽ bên.

Khẳng định nào sau đây **đúng**?

x	-1	0	2	3		
y'		+	0	-	0	+
y	0	5	1	4		

A. $\max_{[-1; 3]} f(x) = f(0)$.

B. $\max_{[-1; 3]} f(x) = f(3)$.

C. $\max_{[-1; 3]} f(x) = f(2)$.

D. $\max_{[-1; 3]} f(x) = f(-1)$.

Câu 17: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	$+$	$\parallel$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	0	-1	$+\infty$	

Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng -1 .
- B. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.
- C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1 .
- D. Hàm số có đúng hai cực trị.

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-3; 2]$ và có bảng biến thiên như sau.

x	-3	-1	0	1	2
$f(x)$	-2	3	0	2	1

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$. Tính $M + m$.

- A. 3.
- B. 2.
- C. 1.
- D. 4.

Câu 19: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $[-\sqrt{3}; \sqrt{5}]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\sqrt{3}$	-1	1	$\sqrt{5}$	
y'	+	0	-	0	+
y	0	2	-2	$2\sqrt{5}$	

Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\min_{[-\sqrt{3}; \sqrt{5}]} y = 0$.
- B. $\max_{[-\sqrt{3}; \sqrt{5}]} y = 2\sqrt{5}$.
- C. $\max_{[-\sqrt{3}; \sqrt{5}]} y = 2$.
- D. $\min_{[-\sqrt{3}; \sqrt{5}]} y = -2$.

Câu 20: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$							$+\infty$

Diagram illustrating the function y and its derivative y' across different intervals of x .

The intervals for x are: $-\infty$, -1 , 0 , 1 , and $+\infty$.

The corresponding values for y' are: $-$, 0 , $+$, 0 , $-$, 0 , and $+$.

The corresponding values for y are: $+\infty$, 0 , 3 , 0 , and $+\infty$.

Arrows indicate the flow of the function y between these values:

- From $+\infty$ at $x = -\infty$ to 0 at $x = -1$.
- From 0 at $x = -1$ to 3 at $x = 0$.
- From 3 at $x = 0$ to 0 at $x = 1$.
- From 0 at $x = 1$ to $+\infty$ at $x = +\infty$.

Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 1]$ bằng:

- A. 1.
- B. 3.
- C. -1 .
- D. 0.

Câu 21: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên đoạn $[-\sqrt{3}; \sqrt{5}]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\sqrt{3}$	-1	1	$\sqrt{5}$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y		2		$2\sqrt{5}$	

Diagram showing the function values at critical points: $0 \rightarrow 2 \rightarrow -2 \rightarrow 2\sqrt{5}$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\min_{[-\sqrt{3}; \sqrt{5}]} y = 0$. B. $\max_{[-\sqrt{3}; \sqrt{5}]} y = 2$.
 C. $\max_{[-\sqrt{3}; \sqrt{5}]} y = 2\sqrt{5}$. D. $\min_{[-\sqrt{3}; \sqrt{5}]} y = 1$.

Câu 22: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-3; 2]$ và có bảng biến thiên như sau. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$.

Tính $M + m$.

x	-3		-1		0		1		2
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y			3				2		

Diagram showing the function values at critical points: $-2 \rightarrow 3 \rightarrow 0 \rightarrow 2 \rightarrow 1$

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 4.

Câu 23: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên đoạn $[-\sqrt{3}; \sqrt{5}]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

x	$-\sqrt{3}$	-1	1	$\sqrt{5}$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y		2		$2\sqrt{5}$	

Diagram showing the function values at critical points: $0 \rightarrow 2 \rightarrow -2 \rightarrow 2\sqrt{5}$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\min_{[-\sqrt{3}; \sqrt{5}]} y = 0$. B. $\max_{[-\sqrt{3}; \sqrt{5}]} y = 2\sqrt{5}$.
 C. $\max_{[-\sqrt{3}; \sqrt{5}]} y = 2$. D. $\min_{[-\sqrt{3}; \sqrt{5}]} y = -2$.

Câu 24: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$				
y'		$-$	$ $	$+$	0	$-$		
y		5		-2		4		-1

Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. Hàm số không có giá trị lớn nhất và có giá trị nhỏ nhất bằng -2 .
 B. Hàm số có hai điểm cực trị.
 C. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang.
 D. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 5 và giá trị nhỏ nhất bằng -2 .

Câu 25: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ trên đoạn $[-1; 1]$. Tính $M + m$.

- A. 1. B. 0. C. 2. D. 3.

Câu 26: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ trên $[1; 5]$ là.

- A. 15. B. -6 . C. 10. D. 22.

Câu 27: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = -x^4 + 4x^2$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng

- A. 1. B. 4. C. 5. D. 3.

Câu 28: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 15$ trên đoạn $[-3; 2]$.

- A. $\max_{[-3; 2]} y = 54$. B. $\max_{[-3; 2]} y = 7$. C. $\max_{[-3; 2]} y = 48$. D. $\max_{[-3; 2]} y = 16$.

Câu 29: Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x}{x+1}$ trên đoạn $[1; 3]$ lần lượt là

- A. $\frac{3}{4}$ và $\frac{1}{2}$. B. 0 và -1 . C. 3 và -1 . D. $-\frac{1}{3}$ và -1 .

Câu 30: Tính tổng bình phương giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 + 4x^2 + 3$ trên đoạn $[-1; 1]$?

- A. 121. B. 64. C. 73. D. 22

Câu 31: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số: $y = x^2 + \frac{2}{x}$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

- A. $m = 5$. B. $m = 3$. C. $m = \frac{17}{4}$. D. $m = 10$.

Câu 32: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{3x-1}{x-3}$ trên đoạn $[0; 2]$.

- A. -5 . B. $-\frac{1}{3}$. C. 5. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 33: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x+5}{x-7}$ trên đoạn $[8; 12]$ là:

- A. 15. B. $\frac{17}{5}$. C. 13. D. $\frac{13}{2}$

Câu 34: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{2x-1}{x+5}$ trên đoạn $[-1; 3]$.

- A. $\frac{5}{8}$. B. $\frac{5}{3}$. C. $-\frac{3}{4}$. D. $-\frac{1}{5}$

Câu 35: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \frac{9}{x}$ trên đoạn $[2; 4]$ là

- A. $\min_{[2; 4]} y = 6$. B. $\min_{[2; 4]} y = \frac{25}{4}$. C. $\min_{[2; 4]} y = -6$. D. $\min_{[2; 4]} y = \frac{13}{2}$.

Câu 36: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x + \frac{4}{x}$ trên đoạn $[1; 3]$ bằng.

- A. $\max_{[1; 3]} y = 3$. B. $\max_{[1; 3]} y = 4$. C. $\max_{[1; 3]} y = 6$. D. $\max_{[1; 3]} y = 5$

Câu 37: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{2x-3}{x-5}$ trên đoạn $[0; 2]$ là.

- A. $\frac{3}{5}$. B. $\frac{1}{4}$. C. 2. D. $-\frac{1}{3}$.

Câu 38: Gọi M , m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ trên đoạn $[0; 3]$. Tính giá trị $M - m$.

- A. $M - m = -\frac{9}{4}$. B. $M - m = 3$. C. $M - m = \frac{9}{4}$. D. $M - m = \frac{1}{4}$.

Câu 39: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{3x-1}{x-3}$ trên $[0; 2]$ là

A. $\frac{1}{3}$.

B. 5.

C. -5.

D. $-\frac{1}{3}$.

Câu 40: Gọi M, m thứ tự là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2+3}{x-1}$ trên đoạn $[-2; 0]$. Tính $P = M + m$.

A. $P = 1$.

B. $P = -\frac{13}{3}$.

C. $P = -5$.

D. $P = -3$.

Câu 41: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x + \frac{16}{x}$ trên đoạn $[1; 5]$ bằng

A. 8.

B. $\frac{41}{5}$.

C. 17.

D. -8.

Câu 42: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^2 - \frac{16}{x}$ trên đoạn $[-4; -1]$. Tính $T = M + m$.

A. $T = 32$.

B. $T = 16$.

C. $T = 37$.

D. $T = 25$.

Câu 43: Trên khoảng $(0; +\infty)$ thì hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$.

A. Có giá trị nhỏ nhất là $\min y = -1$.B. Có giá trị lớn nhất là $\max y = 3$.C. Có giá trị nhỏ nhất là $\min y = 3$.D. Có giá trị lớn nhất là $\max y = -1$.

Câu 44: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = -3x^4 + 4x^3 + 1$ bằng

A. 11.

B. 0.

C. 5.

D. 2.

Câu 45: Hàm số nào dưới đây có giá trị nhỏ nhất trên tập xác định?

A. $y = x^3 - 3x + 2$.

B. $y = -2x^3 + 3x^2 - 1$.

C. $y = x^4 - 2x^2 - 1$.

D. $y = -x^4 + 4x^2$.

Câu 46: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$ trên khoảng $(0; +\infty)$ bằng:

A. 5.

B. 1.

C. -1.

D. 3.

Câu 47: Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x) = x^6 + 6x$ trên nửa khoảng $(-2; 1]$. Kết quả đúng là

A. M không tồn tại.

B. $M = 52$.

C. $M = 7$.

D. $M = -5$.

Câu 48: Hàm số nào dưới đây có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$?

A. $y = x^4 - 2x^2$.

B. $y = -3x^3 + x^2 - 5$.

C. $y = x^3 + 3x^2 - 7x + 1$.

D. $y = -2x^4 - x^2 + 5$.

Câu 49: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 5$. Khẳng định nào sau đây đúng:

A. Hàm số có giá trị nhỏ nhất, không có giá trị lớn nhất.

B. Hàm số không có giá trị nhỏ nhất, có giá trị lớn nhất.

C. Hàm số không có giá trị nhỏ nhất, không có giá trị lớn nhất.

D. Hàm số có giá trị nhỏ nhất, có giá trị lớn nhất

Câu 50: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + \frac{2}{x}$ với $x > 0$ bằng

A. 4.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Câu 51: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{4}{x^2 + 2}$ là

A. 10.

B. 3.

C. 5.

D. 2.

Câu 52: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x - 5 + \frac{1}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ bằng bao nhiêu?

- A. 0. B. -1. C. -3. D. -2

Câu 53: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x}$ khi $x > 0$.

- A. $\frac{2\sqrt{3}}{9}$. B. $-\frac{1}{4}$. C. 0. D. $-\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

Câu 54: Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x - 1 + \frac{4}{x-1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$. Tìm m ?

- A. $m = 2$. B. $m = 5$. C. $m = 3$. D. $m = 4$.

Câu 55: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2}{x-2}$ trên $(2; 6]$.

- A. $\min_{(2;6]} y = 9$. B. $\min_{(2;6]} y = 8$. C. $\min_{(2;6]} y = 4$. D. $\min_{(2;6]} y = 3$.

Câu 56: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3x + \frac{4}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ bằng:

- A. $4\sqrt{3}$. B. $4\sqrt{2}$. C. $\frac{301}{5}$. D. 7.

Câu 57: Trên khoảng $(0;1)$ hàm số $y = x^3 + \frac{1}{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại x_0 bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$. C. $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$. D. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 58: Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 - 2x^2$ trên khoảng $(-2; 2)$ là

- A. $\max_{(-2;2)} y = 0$; $\min_{(-2;2)} y = -1$. B. $\min_{(-2;2)} y = -1$; không có giá trị lớn nhất.
C. $\max_{(-2;2)} y = 0$; không có giá trị nhỏ nhất. D. $\max_{(-2;2)} y = 8$; $\min_{(-2;2)} y = -1$.

Câu 59: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$ bằng

- A. 0. B. $-\sqrt{2}$. C. -1. D. -2.

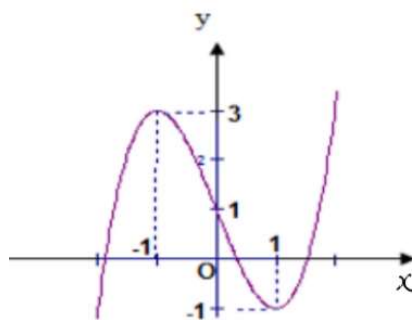
♦Dạng 2: Câu trắc nghiệm đúng, sai

Câu 1: Xét hàm số $y = \frac{x-1}{2x+1}$ trên $[0;1]$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- a) $\min_{[0;1]} y = -\frac{1}{2}$.
b) $\max_{[0;1]} y = 0$.
c) $\max_{[0;1]} y = 1$.
d) $\min_{[0;1]} y = \frac{1}{2}$.

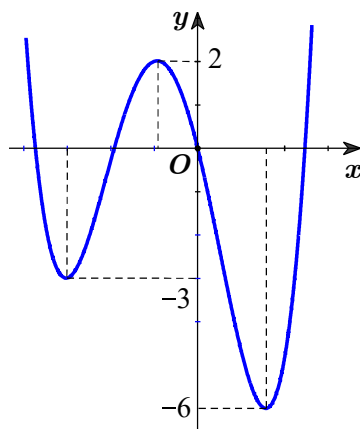
Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây.

Các mệnh đề sau đúng hay sai?



- a) $\max_{[-1;1]} f(x) = 3$.
- b) $\max_{[-1;+\infty)} f(x) = 3$.
- c) $\max_{[-1;+\infty)} f(x) = +\infty$.
- d) $\max_{[-1;1]} f(x) = 1$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng -6 .
- b) Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 2 .
- c) Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = -6$.
- d) Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 2$.

Câu 4: Hàm số $y = f(x)$ liên tục và có bảng biến thiên trong $[-1;3]$ cho bởi hình dưới đây. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1;3]$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

x	-1		0		2		3
y'		+	0	-	0	+	
y			5				4
	0				1		

- a) $M = 1$.
b) $M = 5$.
c) $M = 0$.
d) $M = 4$.

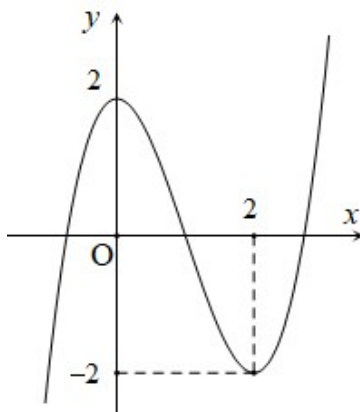
Câu 5: Một hàm số có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	$\parallel$	$-$
y								

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) $\max_{\mathbb{R}} y = 5$.
b) $\min_{\mathbb{R}} y = 2$.
c) $\max_{\mathbb{R}} y = 4$.
d) $\min_{\mathbb{R}} y = 0$.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi m và M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0; 2]$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?



- a) $m + M = 2$.
b) $m + M = -2$.
c) $m + M = 0$.

d) $m + M = 4$.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	$+$	$ $	$-$	0	$+$
y'	$-\infty$	0	-1	$+\infty$	

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Hàm số $y = f(x)$ có giá trị cực tiểu bằng 1.
- b) Hàm số $y = f(x)$ có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng 1.
- c) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.
- d) Hàm số $y = f(x)$ có đúng một cực trị.

Câu 8: Cho hàm số $y = \sqrt{x+2}$ có bảng biến thiên dưới đây. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

x	-2	$+\infty$
y'		+
y	0	$+\infty$

- a) Hàm số không có giá trị nhỏ nhất.
- b) Hàm số có giá trị lớn nhất.
- c) Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng -2 .
- d) Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 0.

Câu 9: Hàm số $y = f(x)$ liên tục và có bảng biến thiên trong đoạn $[-1; 3]$ cho trong hình bên. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 3]$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

x	-1	0	2	3		
y'		+	0	-	0	+
y						
	0		5		1	
						4

- a) $M = f(-1)$.
- b) $M = f(0)$.
- c) $M = f(5)$.

d) $M = f(4)$.

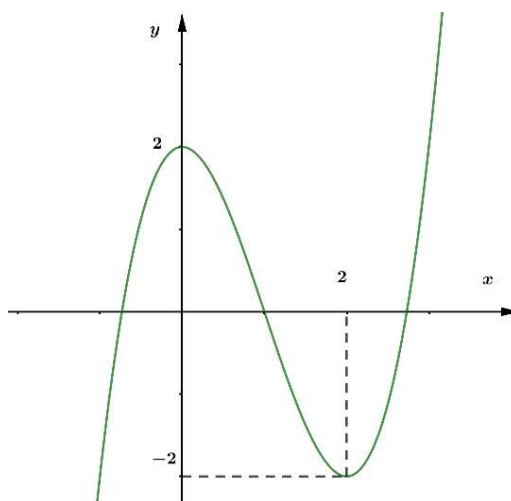
Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	+		-	+
y	$-\infty$	↗ 0	↘ -1	↗ $+\infty$

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1.
- b) Hàm số có hai cực trị.
- c) Hàm số có đúng một cực trị.
- d) Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi m và M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0; 2]$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?



- a) $m + M = 2$.
- b) $m + M = -2$.
- c) $m + M = 0$.
- d) $m + M = 4$.

Câu 12: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
y'	-		+	-
y	5	↘ -2	↗ 4	↘ -1

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Hàm số $y = f(x)$ không có giá trị lớn nhất.
 b) Hàm số $y = f(x)$ có giá trị nhỏ nhất bằng -2 .
 c) Hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = -1$.
 d) Hàm số $y = f(x)$ có giá trị lớn nhất bằng 5 .

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	1	-1	$+\infty$	

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) $\max_{(-\infty;1)} f(x) = 1$.
 b) $\min_{(0;+\infty)} f(x) = -1$.
 c) $\max_{(-\infty;1)} f(x) = f(-1)$.
 d) $\min_{[2;+\infty)} f(x) = f(2)$.

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$		
y'		$+$	$\parallel$	$-$	0	$+$
y		2		-3		$+\infty$

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Hàm số chỉ có giá trị nhỏ nhất không có giá trị lớn nhất.
 b) Hàm số có một điểm cực trị.
 c) Hàm số có hai điểm cực trị.
 d) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2 và giá trị nhỏ nhất bằng -3 .

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ và có bảng biến thiên trên $[-5; 7)$ như sau:

x	$-\infty$	-5	1	7	$+\infty$
y'			$-$	0	$+$
y		6		9	
			2		

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) $\min_{[-5;7)} f(x) = 2$ và hàm số không đạt giá trị lớn nhất trên $[-5; 7)$.
 b) $\max_{[-5;7)} f(x) = 6$ và $\min_{[-5;7)} f(x) = 2$.
 c) $\max_{[-5;7)} f(x) = 9$ và $\min_{[-5;7)} f(x) = 2$.

d) $\max_{[-5;7]} f(x) = 9$ và $\min_{[-5;7]} f(x) = 6$.

Câu 16: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $(-4; 4)$ và có bảng biến thiên trên $(-4; 4)$ như bên. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

x	-4	-2	0	4		
y'		+	0	-	0	+
y			0			10
	-10				-4	

a) $\max_{(-4;4)} y = 0$ và $\min_{(-4;4)} y = -4$.

b) $\max_{(-4;4)} y = 10$ và $\min_{(-4;4)} y = -4$.

c) $\max_{(-4;4)} y = 10$ và $\min_{(-4;4)} y = -10$.

d) Hàm số không có GTLN, GTNN trên $(-4; 4)$.

Câu 17: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

x	$-\infty$	0		2		4		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+
y	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$
		-1		2		1		3

a) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 3 và giá trị nhỏ nhất bằng -1.

b) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 3 và giá trị nhỏ nhất bằng 1.

c) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2 và giá trị nhỏ nhất bằng -1.

d) Không tồn tại giá trị lớn nhất của hàm số.

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (x+3)(x-2)^3(x^2-4)$.

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $f(-2) > \max\{f(-3); f(2)\}$.

b) $f(-3) < f(-2) < f(2)$

c) $f(-2) < \min\{f(-3); f(2)\}$

d) $f(-3) > f(-2) > f(2)$

Câu 19: Gọi m và M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x + \frac{4}{x}$ trên đoạn $[1; 3]$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $m + M = \frac{13}{3}$.

b) $m + M = 5$.

c) $m + M = 9$.

d) $m + M = 4$.

Câu 20: Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x-m}{x+2}$ trên $[0; 2]$ bằng 8

(m là tham số thực). Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $m > 10$.

b) $-15 < m \leq -10$.

c) $0 < m \leq 8$.

d) $-9 < m \leq -2$.

Câu 21: Cho hàm số $y = \frac{mx+2}{x}$ thỏa mãn $\min_{[1;3]} y = 19$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $m > 18$.

b) $m < 0$.

c) $3 < m \leq 17$.

d) $1 \leq m \leq 3$.

Câu 22: Cho hàm số $y = x^3 + (m^2 + 3)x + m^2 - 4$. Biết hàm số đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[-2; 0]$ bằng $\frac{1}{4}$ tại $m = m_0$ ($m_0 > 0$). Các mệnh đề sau đúng hay sai?

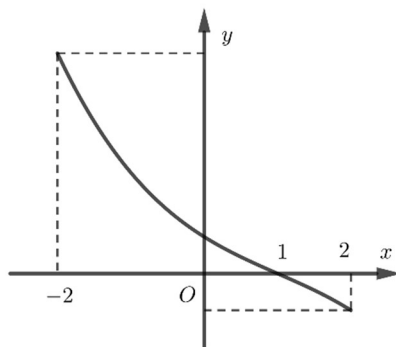
a) $1 < m_0 < 2$.

b) $3 < m_0 < 4$.

c) $2 < m_0 < 3$.

d) $0 < m_0 < 1$.

Câu 23: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên đoạn $[-2; 2]$ là đường cong trong hình bên. Các mệnh đề sau đúng hay sai?



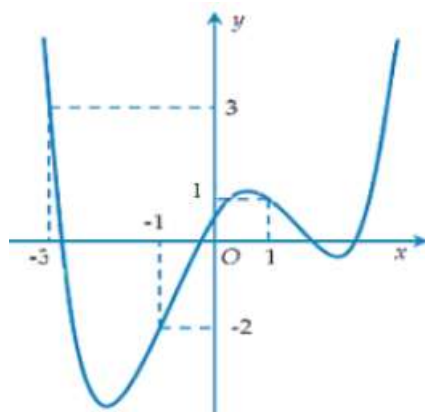
a) $\max_{[-2;2]} f(x) = f(1)$.

b) $\max_{[-2;2]} f(x) = f(-2)$.

c) $\min_{[-2;2]} f(x) = f(1)$.

d) $\max_{[-2;2]} f(x) = f(2)$.

Câu 24: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ dưới đây



Xét hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 2025$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) $g(0) < g(1)$.
- b) $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-1)$.
- c) Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-3; -1)$.
- d) $\max_{[-3;1]} g(x) = \max_{[-3;1]} \{g(-3); g(1)\}$.

Câu 25: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$				4		$-\infty$

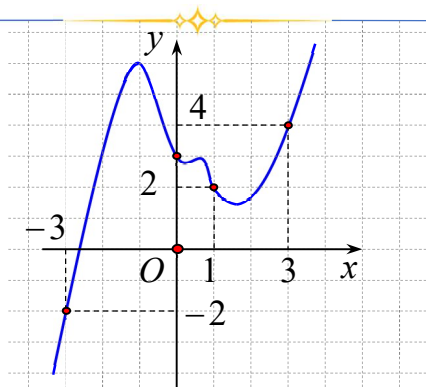
$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$
 -2 4 $-\infty$

Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = g(x) = f(3-x)$ trên $[0; 3]$.

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) $M = f(0)$.
- b) $M = f(3)$.
- c) $M = f(1)$.
- d) $M = f(2)$.

Câu 26: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên.



Đặt $g(x) = 2f(x) - (x+1)^2$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) $\min_{[-3;3]} g(x) = g(1)$.
- b) $\max_{[-3;3]} g(x) = g(1)$.
- c) $\max_{[-3;3]} g(x) = g(3)$.
- d) Không tồn tại giá trị nhỏ nhất của $g(x)$ trên $[-3;3]$.

Câu 27: Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min_{[1;2]} y + \max_{[1;2]} y = \frac{16}{3}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) $m \leq 0$
- b) $m > 4$
- c) $0 < m \leq 2$
- d) $2 < m \leq 4$

Câu 28: Cho hàm số $y = \frac{\sin x + 1}{\sin^2 x + \sin x + 1}$. Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) $M = m + \frac{3}{2}$.
- b) $M = \frac{3}{2}m$.
- c) $M = m + 1$.
- d) $M = m + \frac{2}{3}$.

Câu 29: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-9)(x-4)^2$. Xét hàm số $y = g(x) = f(x^2)$ trên $\mathbb{R}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.
- b) Hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -3)$.
- c) Hàm số $y = g(x)$ có 5 điểm cực trị.
- d) $\min_{x \in \mathbb{R}} g(x) = f(9)$.

♦ Dạng ❶: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 3$ trên đoạn $[0; 4]$.

Câu 2: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin x + \cos x$ trên đoạn $[0; 2\pi]$.

Câu 3: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ trên đoạn $[0; 5]$.

Câu 4: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số:

a) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$ trên đoạn $[0; 3]$

b) $g(x) = x + \frac{1}{x}$ trên khoảng $(0; 5)$

c) $h(x) = x\sqrt{2 - x^2}$

Câu 5: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

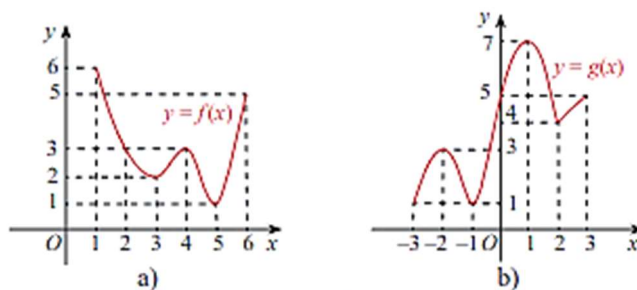
a) $y = x^3 - 12x + 1$ trên đoạn $[-1; 3]$

b) $y = -x^3 + 24x^2 - 180x + 400$ trên đoạn $[3; 11]$

c) $y = \frac{2x+1}{x-2}$ trên đoạn $[3; 7]$

d) $y = \sin 2x$ trên đoạn $\left[0; \frac{7\pi}{12}\right]$

Câu 6: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số có đồ thị được cho ở Hình 5



Hình 5

Câu 7: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = x + \frac{4}{x^2}$ trên đoạn $[1; 4]$

Câu 8: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số $y = x - 2 + \frac{1}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

Câu 9: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số $f(x) = \frac{x^2+9}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

Câu 10: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2\sqrt{1 - x^2} + x^2$

Câu 11: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số: $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$

Câu 12: Hộp sữa 1l được thiết kế dạng hình hộp chữ nhật với đáy là hình vuông cạnh x cm. Tìm x để diện tích toàn phần của hộp nhỏ nhất.

Câu 13: Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x) = x + \frac{1}{x} - 7$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

Câu 14: Tìm giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a) $y = x^3 - 3x - 4$ trên nửa khoảng $[-3; 2]$ b) $y = \frac{3x^2 - 4x}{x^2 - 1}$ trên khoảng $(-1; +\infty)$

Câu 15: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 + m^2 - 5$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1; 2]$ là 19.

Câu 16: Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x+1}$ $m > 1$. Với giá trị nào của tham số m để hàm số có giá trị lớn nhất trên $[1; 4]$ bằng 3.

Câu 17: Trong một thí nghiệm y học, người ta cấy 1000 vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng. Bằng thực nghiệm, người ta xác định được số lượng vi khuẩn thay đổi theo thời gian bởi công thức: $N(t) = 1000 + \frac{100t}{100+t^2}$ (con) trong đó t là thời gian tính bằng giây. Tính số lượng vi khuẩn lớn nhất kể từ khi thực hiện cấy vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng.

Câu 18: Tam giác vuông có cạnh huyền bằng 5 cm có thể có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

Câu 19: Khối lượng q (kg) của một mặt hàng mà cửa tiệm bán được trong một ngày phụ thuộc vào giá bán p (nghìn đồng/kg) theo công thức $p = 15 - \frac{1}{2}q$. Doanh thu từ việc bán mặt hàng trên của cửa tiệm được tính theo công thức $R = pq$. Tìm giá bán mỗi kilôgam sản phẩm để đạt được doanh thu cao nhất và xác định doanh thu cao nhất đó.

Câu 20: Một hợp tác xã nuôi cá trong hồ. nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng: $P(n) = 480 - 20n$ (gam). Hỏi phải thả bao nhiêu cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất?

Câu 21: Ông Nam cần xây dựng một bể chứa nước có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp đậy để phục vụ cho việc tưới cây trong vườn. Do các điều kiện về diện tích vườn, ông Nam cần bể có thể tích là 36 m^3 , đáy bể có chiều dài gấp hai lần chiều rộng và chiều rộng không quá 4 m, biết rằng chi phí vật liệu xây dựng mỗi mét vuông diện tích bề mặt là như nhau. Hỏi chiều cao bể nước bằng bao nhiêu để tổng chi phí vật liệu là nhỏ nhất?

Câu 22: Ông A dự định sử dụng hết 5 m^2 kính để làm bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng. Bể cá có thể tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

Câu 23: Một chất điểm chuyển động theo phương trình $S = -t^3 + 9t^2 + t + 10$ trong đó t tính bằng (s) và S tính bằng (m). Thời gian để vận tốc của chất điểm đạt giá trị lớn nhất là

Câu 24: Một vật chuyển động theo quy luật $s = -2t^3 + 24t^2 + 9t - 3$ với t là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động và s là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

Câu 25: Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s = -t^3 + 6t^2 + 17t$, với t là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Khi đó vận tốc v (m/s) của chuyển động đạt giá trị lớn nhất trong khoảng 8 giây đầu tiên bằng

Câu 26: Một chất điểm chuyển động theo phương trình $S = -t^3 + 3t^2 - 2$, trong đó t tính bằng giây và S tính theo mét. Chuyển động có vận tốc lớn nhất là

Câu 27: Ông A dự định sử dụng hết $6,5m^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

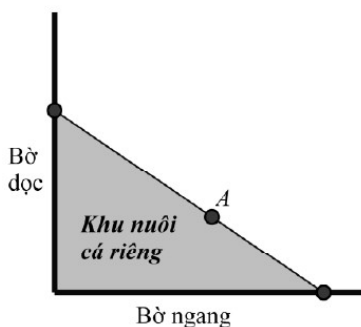
Câu 28: Một ông nông dân có 2400 m hàng rào và muốn rào lại cánh đồng hình chữ nhật tiếp giáp với một con sông. Ông không cần rào cho phía giáp bờ sông. Hỏi ông có thể rào được cánh đồng với diện tích lớn nhất là bao nhiêu?

Câu 29: Tìm m để tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = x^4 - 2x^2 + m$ trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 5.

Câu 30: Ông An muốn xây một bể chứa nước dạng hình hộp chữ nhật, phần nắp trên ông để trống một ô có diện tích bằng 20% diện tích của đáy bể. Biết đáy bể là một hình chữ

Nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, biết bể có thể chứa tối đa $10m^3$ nước và giá tiền thuê nhân công là 500000 đồng/ m^2 . Số tiền trả ít nhất cho nhân công mà ông phải trả với số là:

Câu 31: Người ta giăng lưới để nuôi riêng một loại cá trên một góc hồ. Biết rằng lưới được giăng theo một đường thẳng từ một vị trí trên bờ ngang đến một vị trí trên bờ dọc và phải đi qua một cái cọc đã cắm sẵn ở vị trí A. Hỏi diện tích nhỏ nhất có thể giăng là bao nhiêu, biết rằng khoảng cách từ cọc đến bờ ngang là 5 m và khoảng cách từ cọc đến bờ dọc là 12 m



Câu 32: Ông A dự định sử dụng hết $6,7m^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng. Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

▶ BÀI 3. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

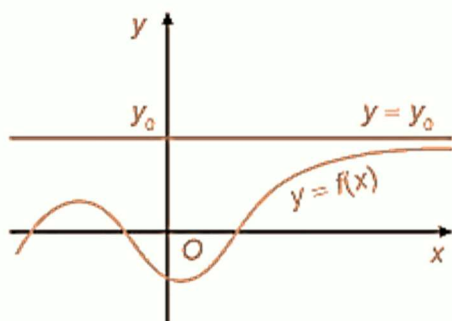
A. Tóm tắt kiến thức

1. ĐƯỜNG TIỆM CẬN NGANG

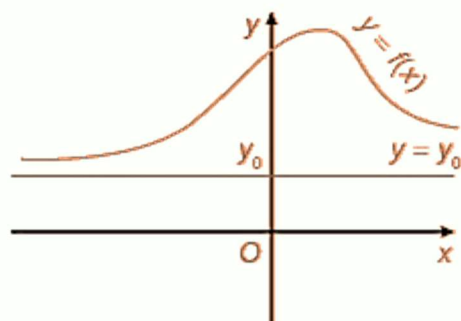
Đường thẳng $y = y_0$ gọi là đường tiệm cận ngang (gọi tắt là tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số

$y = f(x)$ nếu:

✓ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0$ hoặc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$.



Đường thẳng $y = y_0$ là tiệm cận ngang của đồ thị (khi $x \rightarrow +\infty$).



Đường thẳng $y = y_0$ là tiệm cận ngang của đồ thị (khi $x \rightarrow -\infty$).

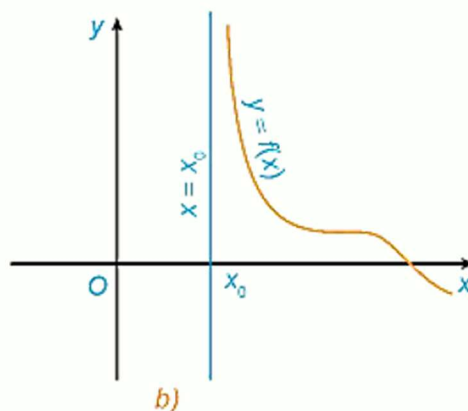
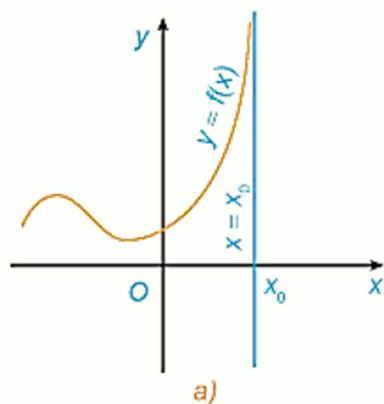
Hình 1.20

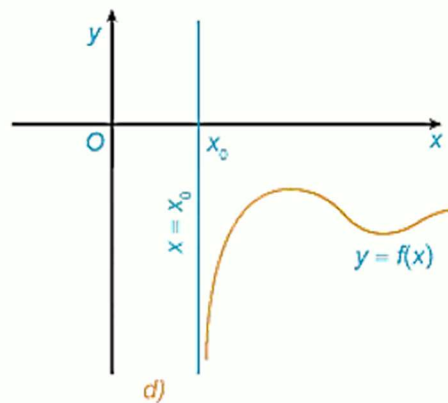
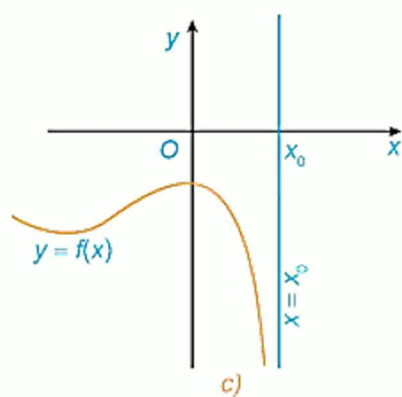
2. ĐƯỜNG TIỆM CẬN ĐỨNG

✓ Đường thẳng $x = a$ được gọi là một **đường tiệm cận đứng** (hay **tiệm cận đứng**) của đồ thị hàm số

$y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau thỏa mãn:

$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$.





a) và c). Đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị (khi $x \rightarrow x_0$).

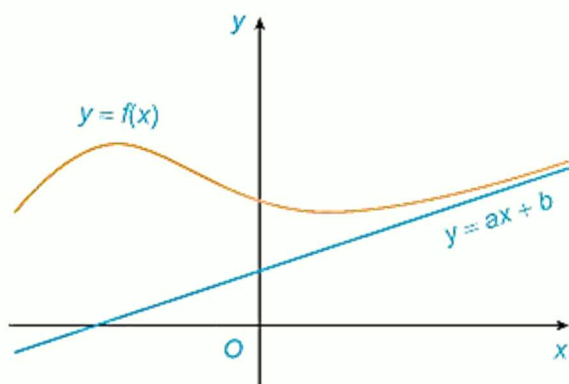
b) và d). Đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị (khi $x \rightarrow x_0$).

Hình 1.23

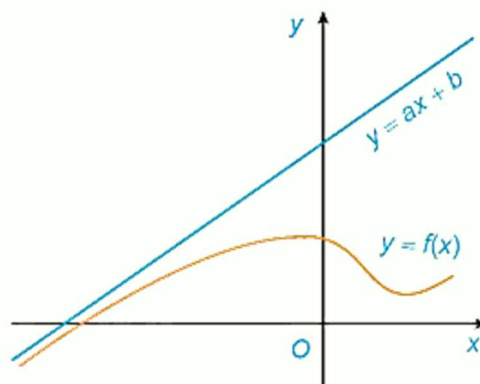
3. ĐƯỜNG TIỆM CẬN XIÊN

Đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) gọi là đường tiệm cận xiên (gọi tắt là tiệm cận xiên) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ hoặc $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$.



Đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị (khi $x \rightarrow +\infty$).



Đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị (khi $x \rightarrow -\infty$).

Hình 1.25

B. Phân dạng toán cơ bản

♦ Dạng 1: Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

☛ Các ví dụ minh họa

Câu 1: Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{3x-2}{x+1}$.

Câu 2: Tìm các tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

Câu 3: Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{-2x+1}{x+1}$.

♦ **Dạng ②: Tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số**

▣ **Các ví dụ minh họa**

Câu 1: Tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{3-x}{x+2}$.

Câu 2: Tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{x^2+2}{x}$.

Câu 3: Tìm tiệm cận đứng của đồ thị các hàm số sau:

a) $y = \frac{x}{x^2-1}$; b) $y = \frac{2}{\sqrt{x-1}}$.

♦ **Dạng ③: Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số**

▣ **Các ví dụ minh họa**

Câu 1: Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{x^2-x+2}{x+1}$.

Câu 2: Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x) = \frac{x^2-3x+1}{x-2}$.

Câu 3: Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{x^2+3x}{x-2}$.

♦ **Dạng ④: Ứng dụng thực tế**

▣ **Các ví dụ minh họa**

Câu 1: Để loại bỏ p% một loài tảo độc khỏi hồ nước, người ta ước tính chi phí bỏ ra là $C(p) = \frac{45p}{100-p}$ (triệu đồng), với $0 \leq p < 100$. Tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $C(p)$ và nêu ý nghĩa của đường tiệm cận này.

Câu 2: Một công ty sản xuất đồ gia dụng ước tính chi phí để sản xuất x (sản phẩm) là $C(x) = 2x + 50$ (triệu đồng). Khi đó, $f(x) = \frac{C(x)}{x}$ là chi phí sản xuất trung bình cho mỗi sản phẩm. Chứng tỏ rằng hàm số $f(x)$ giảm và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$. Tính chất này nói lên điều gì?

Câu 3: Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích bằng $144m^2$.

Biết độ dài một cạnh của mảnh vườn là $x(m)$.

a) Viết biểu thức tính chu vi $P(x)$ (mét) của mảnh vườn.

b) Tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số $P(x)$.

©. Dạng toán rèn luyện

♦ **Dạng ①: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn**

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	-		-
y	5		2

Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Đồ thị hàm số có hai TCN $y = 2$, $y = 5$ và có một TCD $x = -1$.
 B. Đồ thị hàm số có bốn đường tiệm cận.
 C. Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận.
 D. Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình bên dưới. Hỏi đồ thị hàm số đã cho có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
y'	-		- 0 +	
y	-3		$+\infty$	-5 2

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	-1	1

Số đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là

- A. 3. B. 1. C. 0. D. 2.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'	-	0	+	+
y	1	$-\sqrt{2}$	$+\infty$	-1

- A. 1. B. 4. C. 2. D. 3

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Hỏi đồ thị của hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
y'			+	-
y			$+\infty$	0

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-3	3	$+\infty$
y'		+	+	+
y	0	$+\infty$	$+\infty$	0

Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số đã cho là

A. 3 .

B. 1 .

C. 4 .

D. 2 .

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
y'		-	-	-
y	5	4	$+\infty$	$-\infty$

Tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho bằng:

A. 1 .

B. 2 .

C. 3 .

D. 4 .

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. Hàm số có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây. Hỏi hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu tiệm cận?

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	+	+
$f(x)$	-3	1	$+\infty$	$+\infty$	3

A. 1.

B. 4 .

C. 3 .

D. 2

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		-	+	-
$f(x)$	3	-2	4	2

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

A. 3..

B. 4..

C. 2..

D. 1.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'		+	+
y	2	$+\infty$	2

- A. Đồ thị hàm số không có tiệm cận.
 B. Tiệm cận đứng của đồ thị là đường thẳng $x = 2$.
 C. Tiệm cận ngang của đồ thị là đường thẳng $x = 1$.
 D. Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
y'		-	-	-
y	5	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho bằng

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f(x)$	0	$+\infty$	$-\infty$	0

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 4. B. 1. C. 3. D. 2.

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	1	10	$-\infty$

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

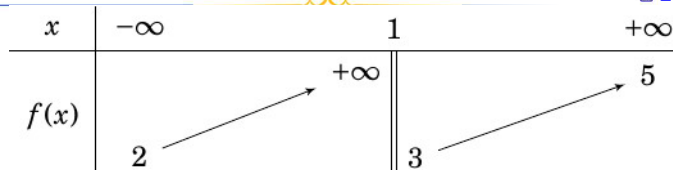
- A. 4. B. 1. C. 3. D. 2.

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây đúng?

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
y'		-	-	+
y	-1	$+\infty$	0	1

- A. Đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận.
 B. Đồ thị hàm số không có tiệm cận.
 C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 1 và có giá trị nhỏ nhất bằng 0.
 D. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 4. B. 1. C. 3. D. 2.

Câu 16: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2-x}{x+3}$ là

- A. $x = 2$. B. $x = -3$. C. $y = -1$. D. $y = -3$.

Câu 17: Đường thẳng $x = 3$, $y = 2$ lần lượt là tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

- A. $y = \frac{2x-3}{x+3}$. B. $y = \frac{x-3}{x+3}$. C. $y = \frac{3x-1}{x-3}$. D. $y = \frac{2x-3}{x-3}$.

Câu 18: Đồ thị hàm số $y = \frac{1-3x}{x+2}$ có các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt là:

- A. $x = -2$ và $y = -3$. B. $x = -2$ và $y = 1$.
C. $x = -2$ và $y = 3$. D. $x = 2$ và $y = 1$.

Câu 19: Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2}{-x+3}$ có phương trình là

- A. $y = 0$. B. $y = -2$. C. $x = 3$. D. $x = -2$.

Câu 20: Tìm tọa độ giao điểm của đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x+2}$.

- A. $(2;1)$. B. $(-2;2)$. C. $(-2;-2)$. D. $(-2;1)$.

Câu 21: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{6x-3}$ là

- A. 3. B. 2. C. 0. D. 1.

Câu 22: Cho hàm số $y = \frac{3}{x-2}$. Số tiệm cận của đồ thị hàm số là

- A. 1. B. 0. C. 3. D. 2.

Câu 23: Số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x-2}+1}{x^2-3x+2}$ là

- A. 4. B. 1. C. 3. D. 2.

Câu 24: Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2+3x}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

- A. 0. B. 1. C. 3. D. 2.

Câu 25: Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x^2-2}$ là

- A. 2. B. 1. C. 0. D. 3.

Câu 26: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-3x-4}$ là

- A. 3. B. 0. C. 2. D. 1.

Câu 27: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2+2}}{x-3}$.

- A. 4. B. 2. C. 1. D. 3.

Câu 28: Cho hàm số $y = \frac{x}{x^2-2}$ có đồ thị là đường cong (C). Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. (C) có một tiệm cận đứng và một tiệm cận ngang.
 B. (C) có hai tiệm cận đứng và không tiệm cận ngang.
 C. (C) có hai tiệm cận đứng và một tiệm cận ngang.
 D. (C) có hai tiệm cận đứng và hai tiệm cận ngang.

Câu 29: Tổng số các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x-4}}{x-1}$ là
 A. 0. B. 3. C. 1. D. 2.

Câu 30: Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{4 - x^2}$ là
 A. 2. B. 1. C. 3. D. 4.

Câu 31: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị của hàm số $y = \frac{3x-9}{x+m}$ có tiệm cận đứng
 A. $m \neq -3$. B. $m \neq 3$. C. $m = 3$. D. $m = -3$.

Câu 32: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx-8}{x+2}$ có tiệm cận đứng:
 A. $m = 4$. B. $m \neq -4$. C. $m = -4$. D. $m \neq 4$.

Câu 33: Biết rằng đồ thị hàm số $y = \frac{ax+1}{bx-2}$ có tiệm cận đứng là $x = 2$ và tiệm cận ngang là $y = 3$
 Hiệu $a - 2b$ có giá trị là
 A. 4. B. 0. C. 1. D. 5.

Câu 34: Tìm m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx-2}{x^2-4}$ có đúng hai đường tiệm cận?
 A. $m = 0$. B. $m = 1$. C. $m = -1$. D. $m = \pm 1$.

Câu 35: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị của hàm số $y = \frac{x+1}{x^2+m}$ có hai tiệm cận
 đứng
 A. $m < 0$; $m \neq 1$. B. $m < 0$. C. $m > 0$; $m \neq 1$. D. $m < -1$.

Câu 36: Biết rằng đồ thị hàm số $y = \frac{ax+1}{bx-2}$ có tiệm cận đứng là $x = 2$ và tiệm cận ngang là $y = 3$
 . Giá trị của $a + b$ bằng
 A. 5. B. 4. C. 0. D. 1.

Câu 37: Cho hàm số $y = \frac{mx+1}{x-2m}$ với tham số $m \neq 0$. Giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị
 hàm số thuộc đường thẳng có phương trình nào dưới đây?
 A. $2x + y = 0$. B. $y = 2x$. C. $x - 2y = 0$. D. $x + 2y = 0$.

Câu 38: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx^3 - 2}{x^2 - 3x + 2}$ có hai đường
 tiệm cận đứng.
 A. $\begin{cases} m \neq 2 \\ m \neq \frac{1}{4} \end{cases}$. B. $m \neq 0$. C. $\begin{cases} m \neq 2 \\ m \neq 1 \end{cases}$. D. $\begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq \frac{1}{4} \end{cases}$.

Câu 39: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - mx - 2m^2}{x - 2}$ có
 đường tiệm cận đứng.

A. $\begin{cases} m \neq -2 \\ m \neq 1 \end{cases}$.

B. Không có m thỏa mãn.

C. $\begin{cases} m \neq -2 \\ m \neq 1 \end{cases}$.

D. $m \in \mathbb{R}$.

Câu 40: Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{5x-3}{x^2-2mx+1}$ không có tiệm cận đứng.

A. $\begin{cases} m < -1 \\ m > 1 \end{cases}$

B. $-1 < m < 1$.

C. $m = -1$.

D. $m = 1$.

Câu 41: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2-3x+2}{x^2-mx-m+5}$ không có đường tiệm cận đứng?

A. 8.

B. 10.

C. 11.

D. 9.

Câu 42: Biết rằng đồ thị của hàm số $y = \frac{(n-3)x+n-2023}{x+m+3}$ (m, n là tham số) nhận trục hoành làm tiệm cận ngang và trục tung làm tiệm cận đứng. Tính tổng $m - 2n$.

A. 0.

B. -3.

C. -9.

D. 6.

Câu 43: Cho hàm số $y = \frac{x-1}{mx^2-2x+3}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị m để đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 44: Cho hàm số $y = \frac{x+3}{x^2-6x+m}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số chỉ có một tiệm cận đứng và một tiệm cận ngang?

A. 0.

B. 9.

C. -27.

D. 9 hoặc -27.

Câu 45: Đồ thị hàm số $y = \frac{1-\sqrt{4-x^2}}{x^2-2x-3}$ có số đường tiệm cận đứng là m và số đường tiệm cận ngang là n . Giá trị của $m+n$ là:

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0

♦Dạng 2: Câu trắc nghiệm đúng, sai

Câu 1: Cho hàm số $y = \frac{3x-1}{2x-1}$ có đồ thị (C). Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Đường thẳng $y = -3$ là tiệm cận ngang của đồ thị (C).

b) Đường thẳng $y = \frac{3}{2}$ là tiệm cận đứng của đồ thị (C).

c) Đường thẳng $x = \frac{1}{2}$ là tiệm cận đứng của đồ thị (C).

d). Đường thẳng $y = -\frac{1}{2}$ là tiệm cận ngang của đồ thị (C).

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-3}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Đồ thị có đường tiệm cận đứng $x = 3$, tiệm cận ngang $y = 3$.
- b) Đồ thị có đường tiệm cận đứng $x = 2$, tiệm cận ngang $y = 2$.
- c) Đồ thị có đường tiệm cận đứng $x = 2$, tiệm cận ngang $y = 3$.
- d) Đồ thị có đường tiệm cận đứng $x = 3$, tiệm cận ngang $y = 2$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.
- b) Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 1$ và $y = -1$.
- c) Đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng là các đường thẳng $y = 1$ và $y = -1$.
- d) Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Đồ thị hàm số không có đường tiệm cận ngang l.
- b) Đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận đứng là $x = 3$.
- c) Đồ thị hàm số có duy nhất một đường tiệm cận ngang.
- d) Đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận ngang là $x = 3$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(-5; -1)$ và có $\lim_{x \rightarrow (-5)^+} f(x) = 5$ $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = +\infty$.

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Đồ thị hàm số $f(x)$ không có tiệm cận đứng.
- b) Đồ thị hàm số $f(x)$ có đúng một tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -1$.
- c) Đồ thị hàm số $f(x)$ có hai đường tiệm cận ngang.
- d) Đồ thị hàm số $f(x)$ có hai tiệm cận đứng là các đường thẳng $x = -5$ và $x = -1$.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y = 2$.
- b) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x = 2$.
- c) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y = 0$.
- d) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x = 2$.

Câu 7: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{3x+2}{x+1}$ là $y = 3$
- b) Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x-1}$ là $y = 2$

c) Phương trình đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{3x+2}{x-1}$ là $x = -2$

d) Đồ thị của hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$ có đường tiệm cận đứng là $x = -1$

Câu 8: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ có đường tiệm cận ngang là $y = 1$

b) Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2+x-2}{x-2}$ là $x = 2$

c) Phương trình đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-3}{x+2}$ là $x = 3$

d) Cho hàm số $y = \frac{3x-1}{3x+2}$. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = 3$.

Câu 9: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$f'(x)$	-		-	-
$f(x)$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là 3

b) Phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-6}{x+1}$ là $y = 2$

c) Tìm đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{3-x}$. Vậy kết quả là: $y = \frac{2}{3}$

d) Tìm đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x}{x+1} - \frac{3x}{2x-1}$. Vậy kết quả là: $y = -\frac{3}{2}$

Câu 10: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+5}{-3x-1}$ là $y = \frac{-2}{3}$

b) Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ là $x = 1$

c) Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sin x}{x}$ là 0

d) Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{-3x+2}$ là $y = -\frac{1}{3}$

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.
 b) Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.
 c) Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là hai đường thẳng $x = 2$ và $x = -2$.
 d) Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là hai đường thẳng $y = 2$ và $y = -2$.

Câu 12: Cho bảng biến thiên hàm số $y = f(x)$,

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	-		-
y	2		$+\infty$
	$-\infty$		2

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Đồ thị hàm số không có đường tiệm cận.
 b) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x = -1$.
 c) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
 d) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y = 2$.

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.
 b) Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.
 c) Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 1$ và $y = -1$.
 d) Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x = 1$ và $x = -1$.

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây, trong đó $m \in \mathbb{R}$.

x	$-\infty$	1	2	4	$+\infty$		
y'	-		+	0	-		+
y	$m-1$		-2		$3-m$		
	$-\infty$	-5		-5	$-\infty$		

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Đồ thị hàm số có đúng 2 đường tiệm cận đứng và 1 đường tiệm cận ngang với mọi $m \in \mathbb{R}$.
 b) Đồ thị hàm số có đúng 2 đường tiệm cận đứng và 2 đường tiệm cận ngang với mọi $m \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
 c) Đồ thị hàm số có đúng 2 đường tiệm cận đứng và 2 đường tiệm cận ngang với mọi $m \in \mathbb{R}$.
 d) Đồ thị hàm số có đúng 1 đường tiệm cận đứng và 2 đường tiệm cận ngang với mọi $m \in \mathbb{R}$.

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.
 b) Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.
 c) Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 1$ và $y = -1$.
 d) Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x = 1$ và $x = -1$.

Câu 16: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây, trong đó $m \in \mathbb{R}$.

x	$-\infty$	1	2	4	$+\infty$		
y'	-		+	0	-		+
y	$m-1$			-2			$3-m$
		$-\infty$	-5		-5	$-\infty$	

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Đồ thị hàm số có đúng 2 đường tiệm cận đứng và 1 đường tiệm cận ngang với mọi $m \in \mathbb{R}$.
 b) Đồ thị hàm số có đúng 2 đường tiệm cận đứng và 2 đường tiệm cận ngang với mọi $m \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
 c) Đồ thị hàm số có đúng 2 đường tiệm cận đứng và 2 đường tiệm cận ngang với mọi $m \in \mathbb{R}$.
 d) Đồ thị hàm số có đúng 1 đường tiệm cận đứng và 2 đường tiệm cận ngang với mọi $m \in \mathbb{R}$.

Câu 17: Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x^2-9}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng là $x = 3$; $x = -3$.
 b) Đồ thị hàm số chỉ có một tiệm cận đứng là $x = -3$.
 c) Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.
 d) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = 1$.

Câu 18: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{-x-1}$ (C). Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Đồ thị hàm số có hai tiệm cận.
 b) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$.
 c) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -1$.
 d) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = -2$.

Câu 19: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$		$-$	
y	2			$+\infty$	2

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $x = 1$ và tiệm cận đứng là đường thẳng $y = 2$.
- Đồ thị hàm số chỉ có một đường tiệm cận.
- Đồ thị hàm số không có đường tiệm cận.
- Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$ và tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$.

Câu 20: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$		$+$	0	$-$	
y	$+\infty$				2		$-\infty$

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận ngang.
- Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang.
- Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng.
- Đồ thị hàm số không có tiệm đứng và tiệm cận ngang.

Câu 21: Cho hàm số $y = \frac{2x+1+\sqrt{1+x}}{\sqrt{x^2+x-2}}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$.
- Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 0$.
- Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y = -2$.
- Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là hai đường thẳng $y = -2$ và $y = 2$.

Câu 22: Cho hàm số $y = \frac{x+2}{\sqrt{1-x^2}}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- Hàm số có tập xác định $D = (-1; 1)$.
- Đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận ngang là $y = 1$ và $y = -1$.

c) Đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận đứng là $x=1$ và $x=-1$.

d) Hàm số có một cực trị.

Câu 23: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-4}}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

b) Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng là $y=1$, $y=-1$ và hai đường tiệm cận ngang là $x=2$, $x=-2$.

c) Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là $y=1$, $y=-1$ và hai đường tiệm cận đứng là $x=2$, $x=-2$.

d) Đồ thị hàm số có **đúng** một đường tiệm cận ngang là $y=1$, hai đường tiệm cận đứng là $x=2$, $x=-2$.

Câu 24: Cho hàm số $y = \frac{5x-3}{x^2+4x-m}$ với m là tham số thực. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Nếu $m > -4$ đồ thị hàm số có ít nhất một tiệm cận đứng và một tiệm cận ngang.

b) Nếu $m = -4$ đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang và một tiệm cận đứng.

c) Với mọi m hàm số luôn có hai tiệm cận đứng.

d) Nếu $m < -4$ đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang.

Câu 25: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$. M và N là hai điểm thuộc đồ thị của hàm số sao cho hai tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại M và N song song với nhau. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Hai điểm M và N đối xứng với nhau qua gốc tọa độ.

b) Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đi qua trung điểm của đoạn thẳng MN .

c) Hai điểm M và N đối xứng với nhau qua giao điểm của hai đường tiệm cận.

d) Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đi qua trung điểm của đoạn thẳng MN .

♦ Dạng ③: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Trong mặt phẳng Oxy , hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ đồ thị là (C) . Giao điểm của hai tiệm cận của (C) có tọa độ là:

Câu 2: Tọa độ giao điểm hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{3x-7}{x+2}$ là

Câu 3: Đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$ có tiệm cận đứng là đường thẳng

Câu 4: Đồ thị hàm số $y = \frac{2x+2}{x^2-1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
y'	-	-	0	+
y	0 ↘ -4	$+\infty$ ↘ -3	↗ 3	

Tổng số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị đã cho bằng

Câu 6: Đường thẳng $y = \frac{1}{3}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

Câu 7: Đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số?

Câu 8: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{3x-5}{4x-8}$ là

Câu 9: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{3}{2x-1}$ là

Câu 10: Tìm phương trình đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$.

Câu 11: Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{9-6x}{3x+12}$

Câu 12: Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x+3}$.

Câu 13: Tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2+3x}{x-5}$.

Câu 14: Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{-2x+1}{x+1}$.

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x) = x + \frac{1}{x+2}$. Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x)$.

Câu 16: Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{x^2-x+2}{x+1}$.

Câu 17: Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{x+1}{x-2}$.

Câu 18: Tìm tiệm cận đứng, ngang, xiên (nếu có) của đồ thị mỗi hàm số sau:

a) $y = \frac{x}{2-x}$ b) $y = \frac{2x^2-3x+2}{x-1}$ c) $y = x - 3 + \frac{1}{x^2}$

Câu 19: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$		
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y						
	$-\infty$		3		0	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(3-x)-2}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng

Câu 20: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau. Hỏi đồ thị hàm số đó có mấy tiệm cận.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'		-	-
y	2	$+\infty$	-2

Câu 21: Cho hàm số $y = \sqrt{4x - x^2}$, tổng số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số là

Câu 22: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x^2-3x+2}$ là

Câu 23: Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$ là

Câu 24: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = \frac{x-1}{x^2-2mx+4}$ có 3 đường tiệm cận.

Câu 25: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{2x+4}{x-m}$ có tiệm cận đứng.

Câu 26: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{1-x}}{x^2-4}$ là

Câu 27: Đường thẳng nào dưới đây là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{1-4x}{2x-1}$?

Câu 28: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị của hàm số $y = \frac{3x-9}{x+m}$ có tiệm cận đứng

Câu 29: Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x^2+1}$.

Câu 30: Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$ có các đường tiệm cận ngang là

Câu 31: Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = 1 + \frac{2x+1}{x+2}$ có phương trình là:

Câu 32: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Tổng số đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'		-	0	+
y	1	$-\sqrt{2}$	$+\infty$	-1

Câu 33: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên dưới. Hỏi đồ thị hàm số đã cho có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng và ngang?

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
y'		-	-	0	+
y	3	$-\infty$	$+\infty$	-2	5

Câu 34: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}}$ là:

Câu 35: Có bao nhiêu giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx + \sqrt{x^2 - 2x + 3}}{2x - 1}$ có một tiệm cận ngang là: $y = 2$.

Câu 36: Giá trị của m để tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+m}$ đi qua $M(2;3)$ là

Câu 37: Các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-3}$ tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng

Câu 38: Xác định m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x^2 + 2(m-1)x + m^2 - 2}$ có đúng hai đường tiệm cận đứng.

Câu 39: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x + \sqrt{mx^2 + 1}$ có tiệm cận ngang.

Câu 40: Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{mx^2 - 3x + 4}$ có đúng một tiệm cận đứng và một tiệm cận ngang. Số phần tử của S bằng:

Câu 41: Đồ thị hàm số $y = \frac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2+2x}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

Câu 42: Đồ thị hàm số $y = \frac{1-\sqrt{4-x^2}}{x^2-2x-3}$ có số đường tiệm cận đứng là m và số đường tiệm cận ngang là n . Giá trị của $m+n$ là

Câu 43: Có bao nhiêu giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx^2-1}{x^2-3x+2}$ có đúng hai đường tiệm cận?

Câu 44: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-10;10]$ để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{mx^2-4}}{x-1}$ có ba đường tiệm cận?

Câu 45: Gọi S là tập các giá trị của m sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x^2-2mx+m^2-2m-6}$ có đúng hai đường tiệm cận. Số phần tử của S là:

Câu 46: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ (C). Biết rằng $M_1(x_1; y_1)$ và $M_2(x_2; y_2)$ là hai điểm trên đồ thị (C) có tổng khoảng cách đến hai đường tiệm cận của (C) nhỏ nhất. Tính giá trị $P = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$.

Câu 47: Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ (C). Tính tổng tung độ các điểm M thỏa mãn M thuộc đồ thị (C) đồng thời khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng của đồ thị (C) bằng khoảng cách từ M đến trục Ox

► BÀI 4. KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ MỘT SỐ HÀM SỐ CƠ BẢN

A. Tóm tắt kiến thức

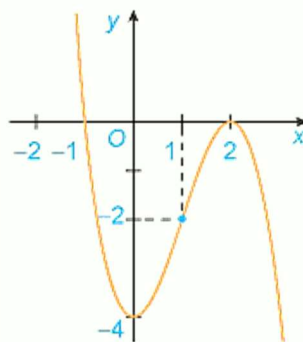
1. SƠ ĐỒ KHẢO SÁT HÀM SỐ

- ①. Tìm tập xác định của hàm số.
 - ②. Khảo sát sự biến thiên của hàm số:
 - ✓ Tính đạo hàm y' . Tìm các điểm tại đó y' bằng 0 hoặc đạo hàm không tồn tại.
 - ✓ Xét dấu y' để chỉ ra các khoảng đơn điệu của hàm số.
 - ✓ Tìm cực trị của hàm số.
 - ✓ Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm tiệm cận của đồ thị hàm số (nếu có).
 - ✓ Lập bảng biến thiên của hàm số.
 - ③. Vẽ đồ thị của hàm số dựa vào bảng biến thiên.
-  **Chú ý:** Khi vẽ đồ thị, nên xác định thêm một số điểm đặc biệt của đồ thị, chẳng hạn tìm giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ (khi có và việc tìm không quá phức tạp). Ngoài ra, cần lưu ý đến tính đối xứng của đồ thị (đối xứng tâm, đối xứng trục).

2. KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ ĐA THỨC BẬC BA

Chú ý: Đồ thị của hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$:

- ✓ Có tâm đối xứng là điểm có hoành độ thoả mãn $y'' = 0$,
- ✓ hay $x = -\frac{b}{3a}$.
- ✓ Không có tiệm cận.



Hình 1.28

3. KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ PHÂN THỨC HỮU TỈ

a) Hàm số phân thức $y = \frac{ax+b}{cx+d} (c \neq 0, ad - bc \neq 0)$

Chú ý: Đồ thị của hàm số phân thức $y = \frac{ax+b}{cx+d} (c \neq 0, ad - bc \neq 0)$:

- ✓ Nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận ngang làm tâm đối xứng;
- ✓ Nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm các trục đối xứng.

b) Hàm số phân thức $y = \frac{ax^2+bx+c}{px+q} (a \neq 0, p \neq 0, \text{đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu})$

Chú ý: Đồ thị của hàm số phân thức $y = \frac{ax^2+bx+c}{px+q} (a \neq 0, p \neq 0, \text{đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu})$:

- ✓ Nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm tâm đối xứng;
- Nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm các trục đối xứng.

B. Phân dạng toán cơ bản

♦Dạng 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

▣Các ví dụ minh họa

Câu 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 4$.

Câu 2: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$.

Câu 3: Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

♦Dạng 2: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số phân thức hữu tỉ

▣Các ví dụ minh họa

Câu 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$.

Câu 2: Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{x^2-x-1}{x-2}$.

Câu 3: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{x^2+x-2}{x+1}$.

♦Dạng 3: Ứng dụng thực tế

▣Các ví dụ minh họa

Câu 1: Giả sử số lượng của một quần thể nấm men tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm được mô hình hoá bằng hàm số $P(t) = \frac{a}{b+e^{-0,75t}}$, trong đó thời gian t được tính bằng giờ. Tại thời điểm ban đầu $t = 0$, quần thể có 20 tế bào và tăng với tốc độ 12 tế bào/giờ. Tìm các giá trị của a và b . Theo mô hình này, điều gì xảy ra với quần thể nấm men về lâu dài?

Câu 2: Giả sử chi phí $C(x)$ (nghìn đồng) để sản xuất x đơn vị của một loại hàng hoá nào đó được cho bởi hàm số $C(x) = 30000 + 300x - 2,5x^2 + 0,125x^3$.

a) Tìm hàm chi phí biên.

b) Tìm $C'(200)$ và giải thích ý nghĩa.

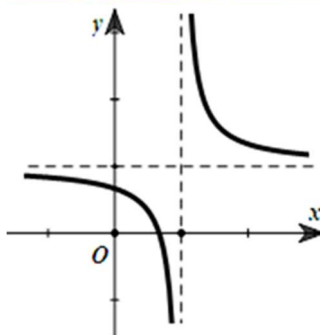
c) So sánh $C'(200)$ với chi phí sản xuất đơn vị hàng hoá thứ 201.

Câu 3: Một nhà sản xuất cần làm những hộp đựng hình trụ có thể tích 1 lít. Tìm các kích thước của hộp đựng để chi phí vật liệu dùng để sản xuất là nhỏ nhất (kết quả được tính theo centimet và làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

©. Dạng toán rèn luyện

♦Dạng 1: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ. Chọn mệnh đề đúng?



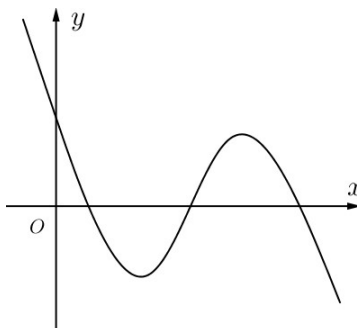
A. $ac > 0$.

B. $cd > 0$.

C. $ab > 0$.

D. $ad > bc$.

Câu 2: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây đúng?



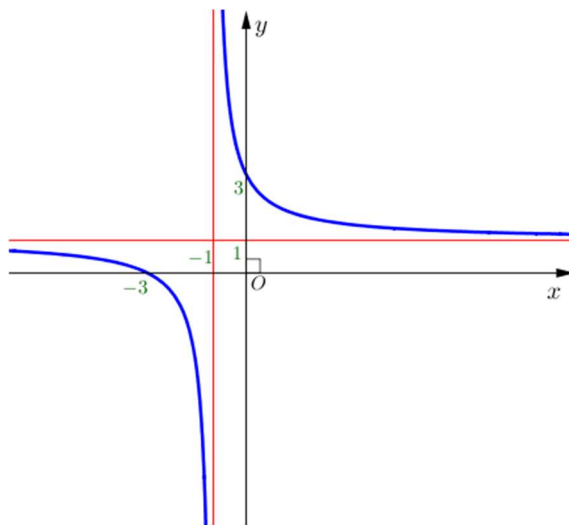
A. $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

B. $a < 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

C. $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

D. $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$.

Câu 3: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x+1}$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

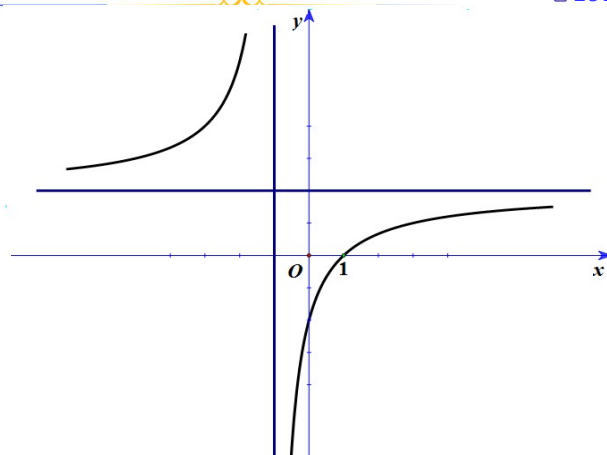
A. $0 < a < b$.

B. $a < b < 0$.

C. $b < 0 < a$.

D. $0 < b < a$.

Câu 4: Cho hàm số $y = \frac{ax-2}{x+b}$ có đồ thị như hình dưới.



Khẳng định nào sau đây đúng?

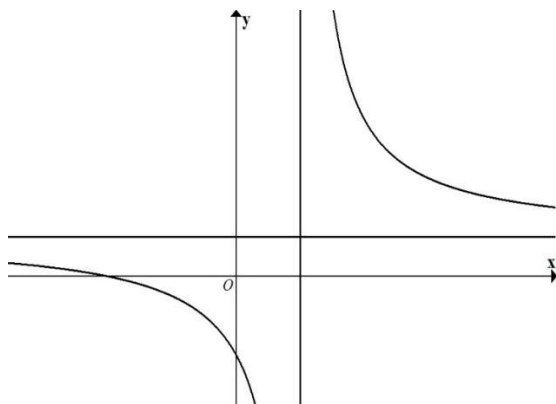
A. $b < a < 0$.

B. $0 < b < a$.

C. $0 < a < b$.

D. $b < 0 < a$.

Câu 5: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($d < 0$) có đồ thị như hình vẽ. Khẳng định nào dưới đây là đúng?



A. $a < 0; b > 0; c < 0$.

B. $a > 0; b > 0; c > 0$.

C. $a > 0; b > 0; c < 0$.

D. $a > 0; b < 0; c > 0$.

Câu 6: Đồ thị hàm số $y = (x-1)(x^2 - 4x + 4)$ có bao nhiêu điểm chung với trục Ox ?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 1.

Câu 7: Đường thẳng $d: y = 3x + 1$ cắt đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{2x^2 - 2x + 3}{x - 1}$ tại hai điểm phân biệt

A, B . Tính độ dài AB .

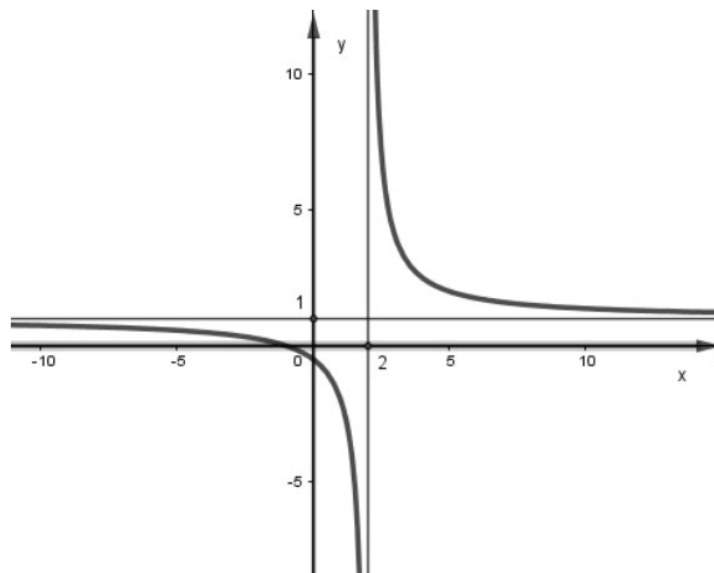
A. $AB = 4\sqrt{15}$

B. $AB = 4\sqrt{2}$

C. $AB = 4\sqrt{10}$

D. $AB = 4\sqrt{6}$

Câu 8: Cho hàm số $y = \frac{ax+1}{bx-2}$ có đồ thị như hình vẽ. Tính $T = a + b$.



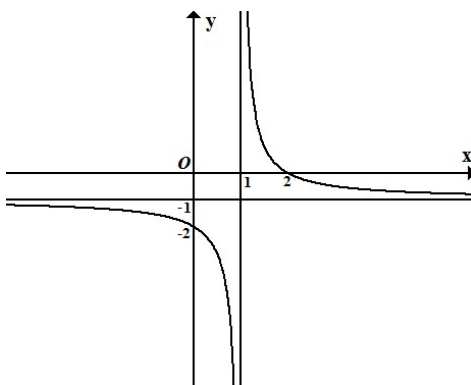
A. $T = 0$

B. $T = 2$

C. $T = -1$

D. $T = 3$

Câu 9: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x+c}$ có đồ thị như hình bên với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị của biểu thức $T = a - 3b + 2c$?



A. $T = 12$.

B. $T = 10$.

C. $T = -9$.

D. $T = -7$.

Câu 10: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = \frac{3x+1}{x-3}$ và đường thẳng $y = 3$ là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 11: Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x - 3$ cắt trục tung tại điểm có tung độ

A. $y = -1$.

B. $y = 1$.

C. $y = -3$.

D. $y = 10$.

Câu 12: Đồ thị của hai hàm số sau $y = x^3 + 2x^2 + 1$ và $y = x^2 - x + 2$ cắt nhau tại bao nhiêu điểm?

A. 1.

B. 0.

C. 3.

D. 2.

Câu 13: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = 2x - 3$. Đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B . Tọa độ trung điểm của đoạn AB là:

A. $M\left(-\frac{3}{2}; -6\right)$.

B. $M\left(\frac{3}{4}; -\frac{3}{2}\right)$.

C. $M\left(\frac{3}{2}; 0\right)$.

D. $M\left(\frac{3}{4}; 0\right)$.

Câu 14: Số giao điểm đồ thị hàm số $y = x^4 - x^2 - 2$ và đường thẳng $y = -2$ là:

A. 1.

B. 2.

C. 4.

D. 3.

Câu 15: Biết hai đồ thị hàm số $y = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ và $y = 2x^2 - 1$ cắt nhau tại hai điểm A, B . Tính độ dài đoạn AB .

A. $\sqrt{73}$.B. $\sqrt{37}$.C. $5\sqrt{3}$.D. $3\sqrt{5}$.

Câu 16: Gọi M, N là giao điểm của đồ thị các hàm số $y = \frac{2x+2}{x-1}$ và $y = x+1$. Trung điểm I của đoạn MN có hoành độ là

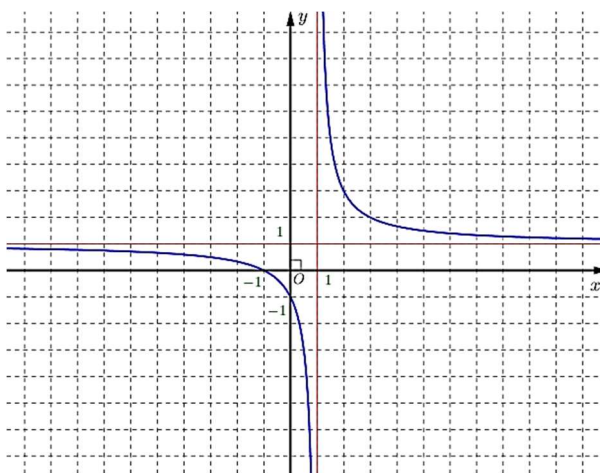
A. -1.

B. 1, 5.

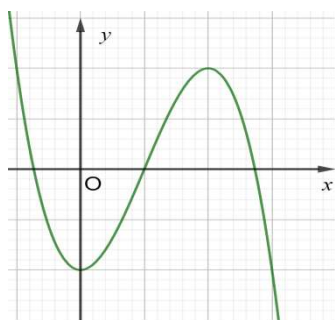
C. 2.

D. 1.

Câu 17: Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

A. $y = \frac{x-1}{-x-1}$.B. $y = \frac{x+1}{x-1}$.C. $y = \frac{x+1}{-x+1}$.D. $y = \frac{x-1}{x+1}$.

Câu 18: Đường cong trong hình bên dưới là đồ thị của hàm số nào trong bốn hàm số dưới đây?

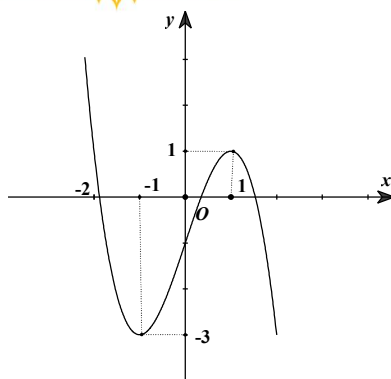
A. $y = x^3 - 3x^2 + 2$.B. $y = -x^3 + 3x + 2$.C. $y = -x^3 + 3x^2 - 2$.D. $y = x^3 - 3x + 2$.

Câu 19: Hàm số nào dưới đây có bảng biến thiên như hình bên dưới

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'		-	-
y	-1	$+\infty$	-1

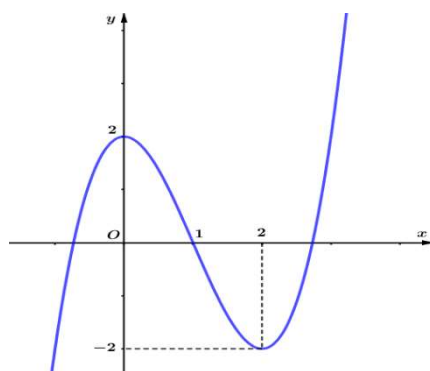
A. $y = \frac{-x-3}{x-1}$.B. $y = \frac{-x-2}{x-1}$.C. $y = \frac{-x+3}{x-1}$.D. $y = \frac{x+3}{x-1}$.

Câu 20: Đường cong trong hình vẽ là đồ thị của hàm số nào sau đây



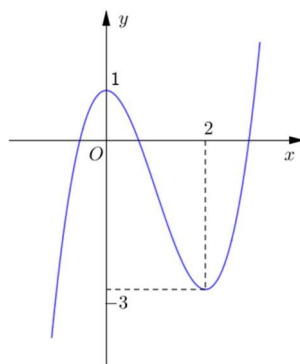
- A. $y = x^3 - 3x - 1$. B. $y = -x^3 + 3x - 1$. C. $y = -x^4 + x^2 - 1$. D. $y = -x^3 + x - 1$

Câu 21: Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số dưới đây?



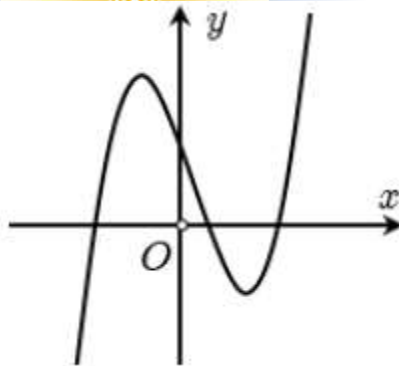
- A. $y = -x^3 + 3x^2 + 2$. B. $y = x^3 - 3x^2 + 2$.
C. $y = x^3 - 3x + 2$. D. $y = -x^4 + 2x^2 - 2$.

Câu 22: Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



- A. $y = x^3 + 3x^2 + 1$. B. $y = x^3 - 3x^2$. C. $y = -x^3 + 3x^2 + 1$. D. $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

Câu 23: Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số nào?

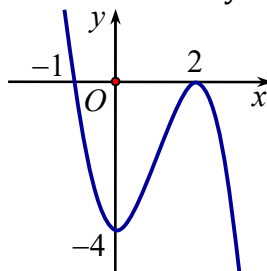


- A. $y = -x^2 + x - 1$. B. $y = -x^3 + 3x + 1$. C. $y = x^4 - x^2 + 1$. D. $y = x^3 - 3x + 1$.

Câu 24: Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị nhận trục tung làm trục đối xứng?

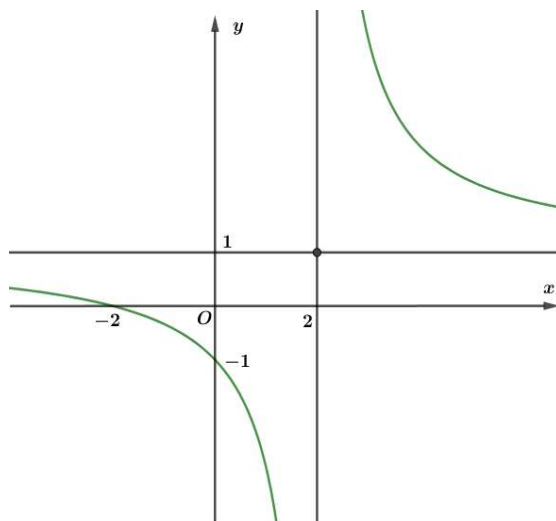
- A. $y = x^4 + 3x^2 - 1$. B. $y = x^3 - 3x + 2$. C. $y = -x^3 + 3x^2 - 1$. D. $y = \frac{x-1}{x-3}$.

Câu 25: Đồ thị như hình vẽ là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



- A. $y = x^3 - 3x^2 + 4$ B. $y = -x^3 + 3x^2 - 4$ C. $y = x^3 - 3x^2 - 4$ D. $y = -x^3 - 3x^2 - 4$

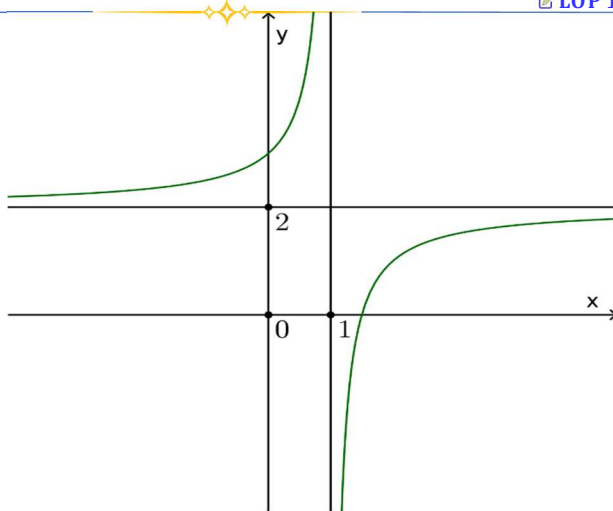
Câu 26: Đồ thị sau đây là của hàm số nào?



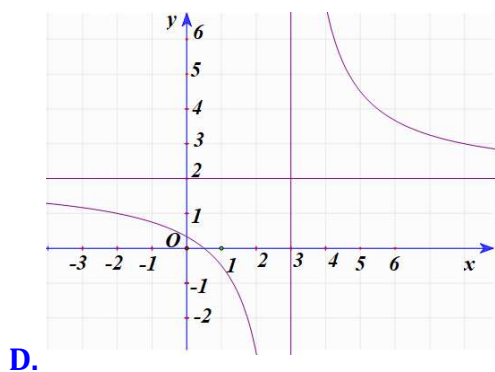
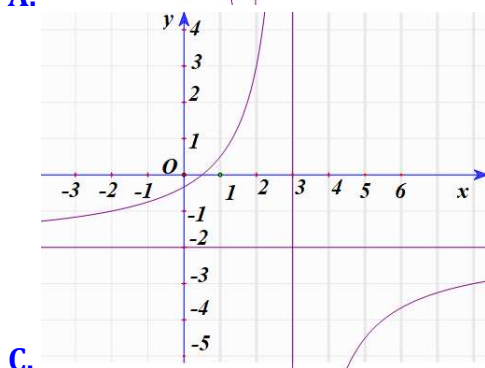
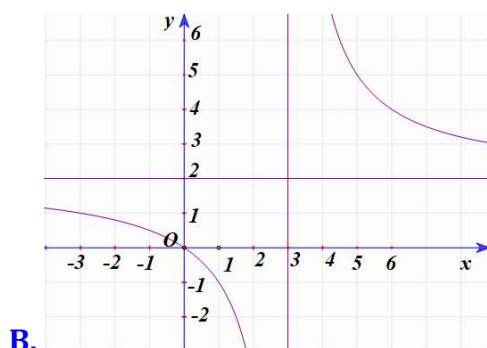
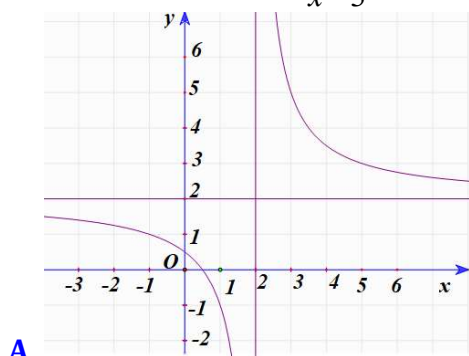
- A. $y = \frac{2x+1}{x-1}$. B. $y = \frac{x+2}{x-2}$. C. $y = \frac{x+2}{x+1}$. D. $y = \frac{x-1}{x+1}$.

Câu 27: Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, với a, b, c, d là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $y' > 0, \forall x \neq 2$. B. $y' > 0, \forall x \neq 1$. C. $y' < 0, \forall x \neq 2$. D. $y' < 0, \forall x \neq 1$.



Câu 28: Tìm đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x-3}$ trong các hàm dưới đây.



Câu 29: Biết hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ đạt cực trị tại điểm $x = 1$, $f(1) = -3$ và đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2. Phương trình $f(x) = 2$ có bao nhiêu nghiệm.

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Câu 30: Cho hàm số $y = -x^3 + ax^2 + bx + c$. Biết rằng đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0; -1)$ và có điểm cực đại là $M(2; 3)$. Tính $Q = a + 2b + c$.

A. $Q = 2$.

B. $Q = -4$.

C. $Q = 0$.

D. $Q = 1$.

Câu 31: Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số: $y = \frac{2x^2 + 6mx + 4}{mx + 2}$ đi qua điểm $A(-1; 4)$?

A. $m = -1$.

B. $m = \frac{1}{2}$.

C. $m = 1$.

D. $m = 2$.

Câu 32: Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 + (2m+1)x^2 + (1-5m)x + 3m+2$ đi qua điểm $A(2;3)$

A. $m = 10$.

B. $m = -10$.

C. $m = 13$.

D. $m = -13$.

Câu 33: Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + m$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt.

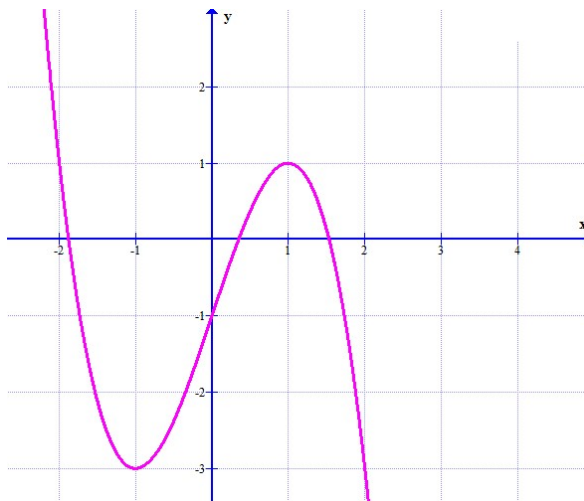
A. $m = -2$.

B. $m = \pm 2$.

C. $m \in \{2; -2; 0\}$.

D. $m = 2$.

Câu 34: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ.



Phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi

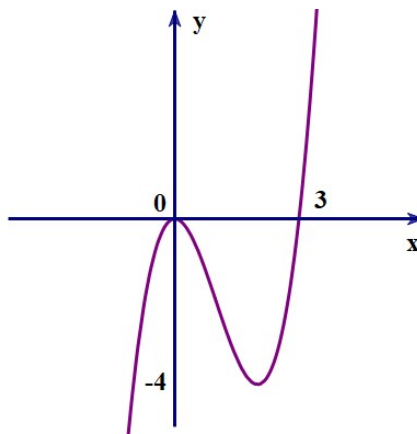
A. $m \in (-3; 1)$.

B. $m \in [-3; 1]$.

C. $m \in (-1; 3)$.

D. $m \in [-1; 3]$.

Câu 35: Cho đồ thị $y = f(x)$. Tìm m để phương trình $f(x) + 1 = m$ có đúng 3 nghiệm?



A. $-3 < m < 1$.

B. $-4 < m < 0$.

C. $-5 < m < 1$.

D. $-4 < m < 1$.

Câu 36: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	$\parallel$	$-$	
y	-5		2		1

Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f(x) = m$ có nghiệm duy nhất?

A. 7.

B. 6.

C. 5.

D. 8.

Câu 37: Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng (d_m) có phương trình $y = mx + 2m + 2$

. Tìm tất cả các giá trị của m để (d_m) cắt (C) tại hai điểm phân biệt.

A. $m < -\frac{4}{3}$ hoặc $m \geq 0$. B. $m < -\frac{4}{3}$ hoặc $m > 0$.

C. $-\frac{4}{3} < m < 0$. D. $m \leq -\frac{4}{3}$ hoặc $m > 0$.

Câu 38: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = (x-2)(x^2 + x + 2019)$ với trục hoành là:

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. 3.

Câu 39: Tìm m để đường thẳng $y = mx + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x-3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt.

A. $(-\infty; 0] \cup [16; +\infty)$. B. $(-\infty; 0)$.

C. $(16; +\infty)$. D. $(-\infty; 0) \cup (16; +\infty)$.

Câu 40: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$			3		1		3		
	$-\infty$								$-\infty$

Số nghiệm của phương trình $f(x) - 2 = 0$ là

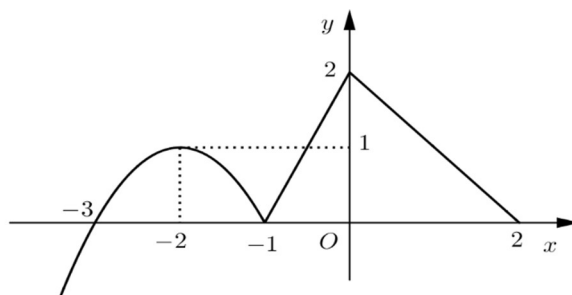
A. 0.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

Câu 41: Hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số nghiệm của phương trình $2f(x) - 1 = 0$ là

A. 4.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 42: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$				4		
				-1			$-\infty$

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = 0$ có bao nhiêu điểm chung.

A. 2.

B. 4.

C. 3.

D. 1.

Câu 43: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	
$f(x)$			3				3		
	$-\infty$				-1				$-\infty$

Số nghiệm của phương trình $f(x) + 2 = 0$ là

A. 0.

B. 3.

C. 4.

D. 2.

Câu 44: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$		0		-4		$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $2^{f(x)-1} = 4$ là

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 4.

Câu 45: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	2		5		-1		6

Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

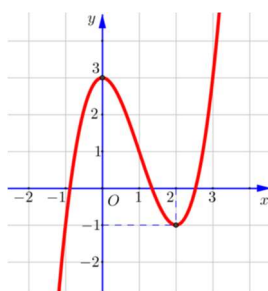
A. Tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(x) = m + 1$ có nghiệm là $-2 \leq m < 5$.

B. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 2$ và $y = 6$.

C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 6 và giá trị nhỏ nhất bằng -1.

D. Hàm số đã cho có đúng hai cực trị.

Câu 46: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



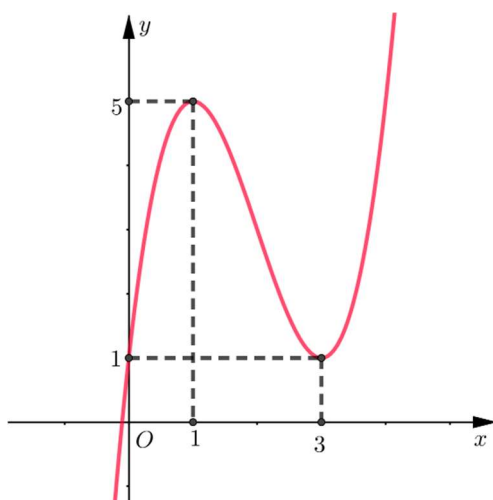
A. Điểm cực đại của hàm số là 3.

B. Giá trị cực đại của hàm số là 0.

C. Giá trị cực tiểu của hàm số bằng -1.

D. Điểm cực tiểu của hàm số là -1.

Câu 47: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị trong hình vẽ bên. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $|f(x)| = m$ có đúng hai nghiệm phân biệt.



A. $m > 5$, $0 < m < 1$.

B. $m < 1$.

C. $m = 1$, $m = 5$.

D. $1 < m < 5$.

Câu 48: Đồ thị hàm số nào dưới đây nằm phía dưới trục hoành.

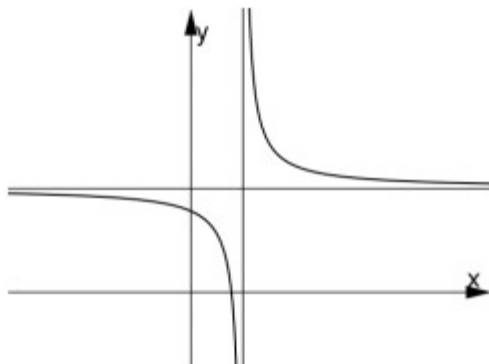
A. $y = x^4 + 5x^2 - 1$

B. $y = -x^3 - 7x^2 - x - 1$

C. $y = -x^4 - 4x^2 + 1$

D. $y = -x^4 + 2x^2 - 2$

Câu 49: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ bên.



A. $ac > 0$.

B. $cd < 0$.

C. $bc < 0$.

D. $ad > 0$.

Câu 50: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) có đồ thị (C) , tiếp tuyến của (C) có hệ số góc đạt giá trị bé nhất khi nào?

- A. $a < 0$ và hoành độ tiếp điểm bằng $\frac{b}{3a}$ B. $a < 0$ và hoành độ tiếp điểm bằng $-\frac{b}{3a}$
 C. $a > 0$ và hoành độ tiếp điểm bằng $-\frac{b}{3a}$ D. $a > 0$ và hoành độ tiếp điểm bằng $\frac{b}{3a}$

Câu 51: Đường thẳng $x + y = 2m$ là tiếp tuyến của đường cong $y = -x^3 + 2x + 4$ khi m bằng

- A. -3 hoặc 1 . B. 1 hoặc 3 . C. -1 hoặc 3 . D. -3 hoặc -1 .

Câu 52: Cho hàm số $y = x^3 + 3mx^2 + (m+1)x + 1$ có đồ thị (C) . Biết rằng khi $m = m_0$ thì tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng $x_0 = -1$ đi qua $A(1;3)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $-1 < m_0 < 0$ B. $0 < m_0 < 1$ C. $1 < m_0 < 2$ D. $-2 < m_0 < -1$

Câu 53: Gọi (C_m) là đồ thị của hàm số $y = 2x^3 - 3(m+1)x^2 + mx + m + 1$ và (d) là tiếp tuyến của (C_m) tại điểm có hoành độ $x = -1$. Tìm m để (d) đi qua điểm $A(0;8)$.

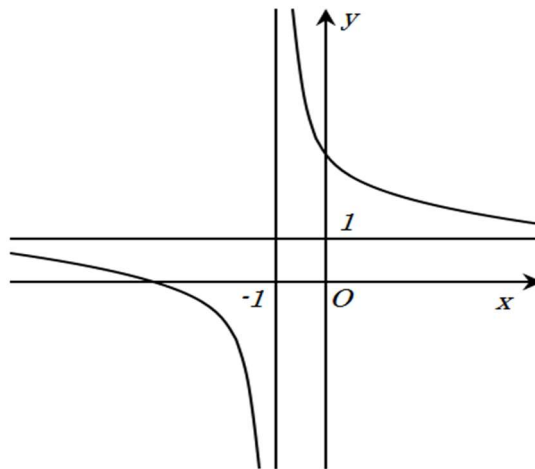
- A. $m = 0$. B. $m = 1$. C. $m = 2$. D. $m = 3$.

♦Dạng ②: Câu trắc nghiệm đúng, sai

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ có đồ thị (C) .

- a) Đồ thị (C) luôn có tâm đối xứng.
 b) Đồ thị (C) luôn có điểm cực trị.
 c) Đồ thị (C) luôn cắt trục hoành.
 d). $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Câu 2: Biết hàm số $y = \frac{x+a}{x+1}$ (a là số thực cho trước, $a \neq 1$) có đồ thị như hình vẽ sau:



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) $y' < 0, \forall x \neq -1$
 b) $y' > 0, \forall x \neq -1$
 c) $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$
 d) $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y		$-\infty$	$\nearrow -2$	$\searrow -\infty$	$+\infty \searrow 2$	$\nearrow +\infty$

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Đồ thị hàm số không có điểm chung với trục hoành
 b) Hàm số có hai điểm cực trị
 c) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$
 d) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$							$+\infty$
		$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
 b) Hàm số không có giá trị lớn nhất.
 c) Đồ thị hàm số không có đường tiệm cận.
 d) Hàm số có hai điểm cực đại và một điểm cực tiểu.

Câu 5: Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-2}$ Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 2$.
 b) Hàm số có cực trị.
 c) Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(1; 3)$.
 d) Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
y'		+	0	-	+
y			5	-1	6

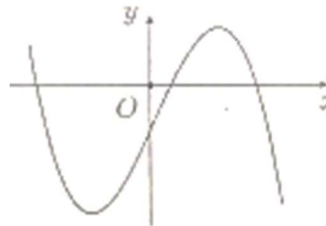
Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- Tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(x) = m + 1$ có nghiệm là $-2 \leq m < 5$
- Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 2$ và $y = 6$.
- Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 6 và giá trị nhỏ nhất bằng -1.
- Hàm số đã cho có đúng hai cực trị.

Câu 7: Cho hàm số $y = x(1-x)(x^2+1)$ có đồ thị (C) . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- (C) cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt.
- (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.
- (C) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt.
- (C) cắt trục hoành tại 1 điểm.

Câu 8: Cho hàm số $y = ax^3 + 3x + d, (a; d \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ.



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- $a > 0, d > 0$
- $a < 0, d > 0$
- $a < 0, d < 0$
- $a > 0, d < 0$

Câu 9: Đồ thị hàm số $y = f(x) = 1 - \sqrt{x+1}$ cắt đường thẳng $x = 3$ tại điểm M .

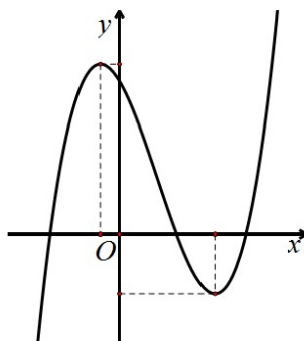
Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- $OM = \sqrt{10}$
- $OM = 1$
- $OM = 2$
- $OM = \sqrt{5}$

Câu 10: Cho (C_1) là đồ thị của hàm số $y=2x^3-3x+1$ và (C_2) là đồ thị của hàm số $y=x^3+x+1$. Gọi n là số điểm chung phân biệt của (C_1) và (C_2) . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) $n = 0$
- b) $n = 1$
- c) $n = 2$
- d) $n = 3$

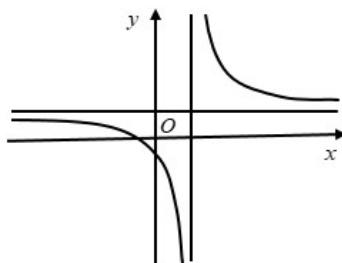
Câu 11: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ sau



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) $a < 0, b < 0, c < 0, d > 0$
- b) $a > 0, b < 0, c > 0, d < 0$
- c) $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$
- d) $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$

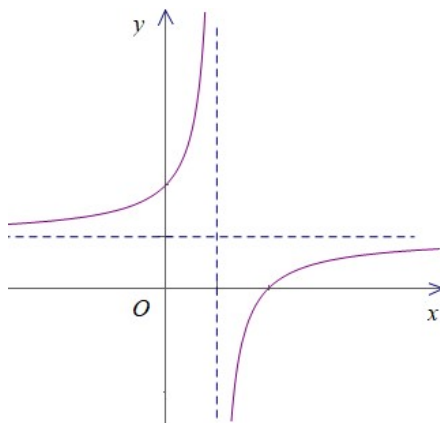
Câu 12: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như sau.



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) $ac > 0; bd > 0$
- b) $ab < 0; cd < 0$
- c) $bc > 0; ad < 0$
- d) $ad > 0; bd < 0$

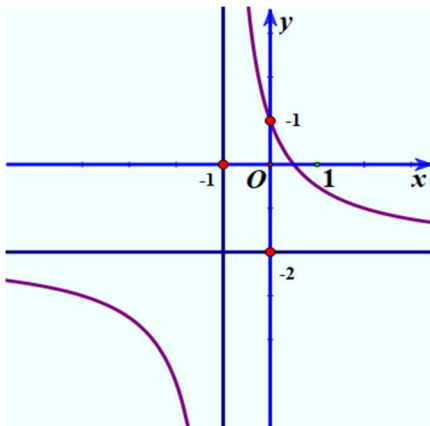
Câu 13: Cho hàm số $y = \frac{x+a}{x-1}$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) $a > 1$
- b) $a \leq -3$
- c) $a < -1$
- d) $a \geq 1$

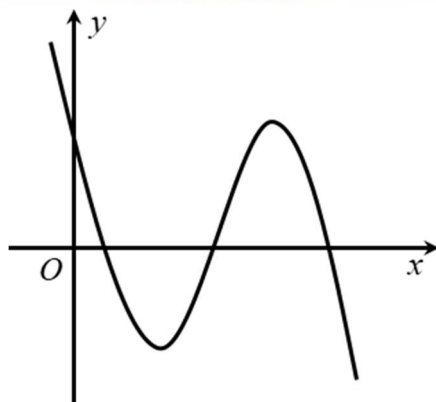
Câu 14: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x+c}$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) $a = 2, b = c = -1$
- b) $a = b = 2, c = -1$
- c) $a = -2, b = -1, c = 1$
- d) $a = -2, b = c = 1$

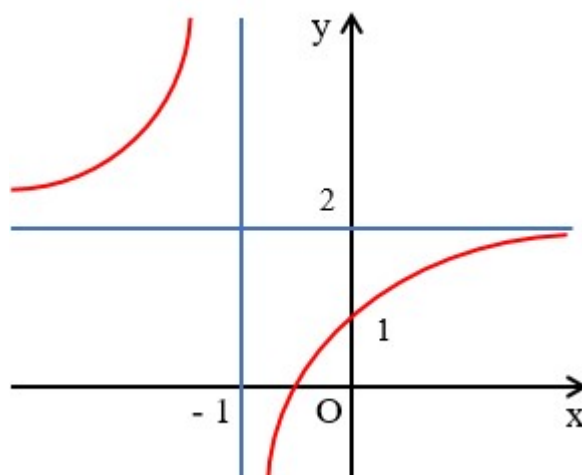
Câu 15: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$
- b) $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$
- c) $a < 0, b < 0, c < 0, d > 0$
- d) $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$

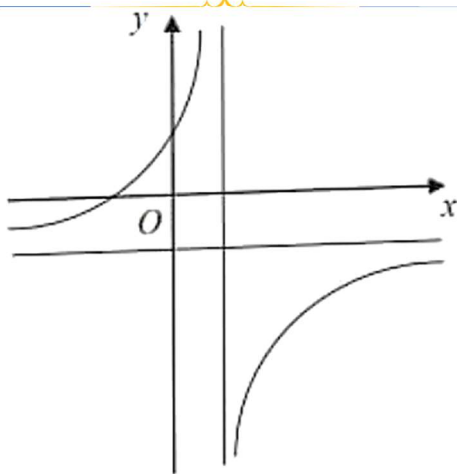
Câu 16: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x+1}$ có đồ thị như hình vẽ.



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) $a < b$
- b) $ab < 0$
- c) $ab > 0$
- d) $b < a < 0$

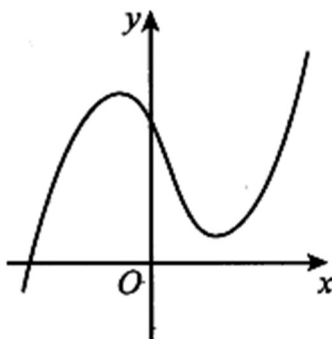
Câu 17: Cho hàm số $y = \frac{ax+4-b}{cx+b}$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) $a < 0, 0 < b < 4, c < 0$
- b) $a > 0, b > 0, c < 0$
- c) $a > 0, b > 4, c < 0$
- d) $a > 0, 0 < b < 4, c < 0$

Câu 18: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ.



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$
- b) $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$
- c) $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$
- d) $a > 0, b < 0, c < 0, d < 0$

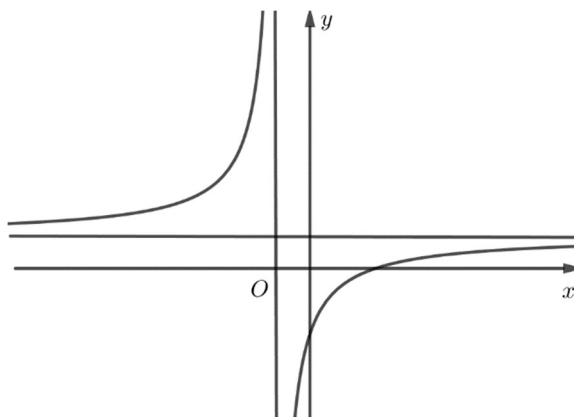
Câu 19: Cho hàm số $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}, a < 0$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+		+	
$f(x)$			$+\infty$		2
	2				
			$-\infty$		

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) $b > 0, c > 0, d > 0$
- b) $b < 0, c > 0, d < 0$
- c) $b < 0, c < 0, d < 0$
- d) $b > 0, c < 0, d > 0$

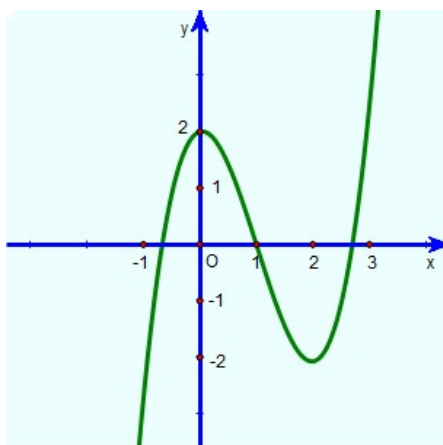
Câu 20: Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) $ad < 0$ và $ab < 0$.
- b) $bd < 0$ và $ab > 0$.
- c) $ad > 0$ và $ab < 0$.
- d) $ad > 0$ và $bd > 0$.

Câu 21: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Gọi m là số nghiệm của phương trình $f(f(x)) = 1$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) $m = 6$.
- b) $m = 7$.
- c) $m = 5$.
- d) $m = 9$.

Câu 22: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2f(x) + f(1-x) = x^3$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f(x+2)$ có tâm đối xứng $I(a; b)$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $a = -\frac{5}{3}$

b) $a = -\frac{3}{2}$

c) $a = -\frac{5}{2}$

d) $a = -\frac{7}{3}$

Câu 23: Cho hàm số $y = \frac{2x}{x+2}$ có đồ thị (C) và điểm $M(x_0; y_0) \in (C)$ ($x_0 \neq 0$). Biết rằng khoảng cách từ $I(-2; 2)$ đến tiếp tuyến của (C) tại M là lớn nhất, Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $2x_0 + y_0 = 0$

b) $2x_0 + y_0 = 2$

c) $2x_0 + y_0 = -2$

d) $2x_0 + y_0 = -4$

Câu 24: Cho hàm số $y = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x + m$ (m là tham số) có đồ thị (C) . Biết rằng (C) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ tương ứng là x_1, x_2, x_3 với $x_1 < x_2 < x_3$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

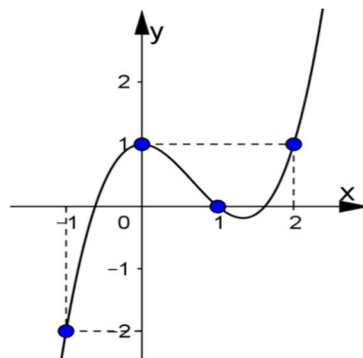
a) $1 < x_1 < 2 < x_2 < 3 < x_3$

b) $1 < x_1 < x_2 < 2 < x_3 < 3$

c) $0 < x_1 < 1 < x_2 < 2 < x_3 < 3$

d) $x_1 < 0 < x_2 < 1 < x_3 < 2$

Câu 25: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) $f(-3) < f(-2)$
- b) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.
- c) $f(0) < f(1)$.
- d) Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại $x = 0$.

♦ Dạng ③: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

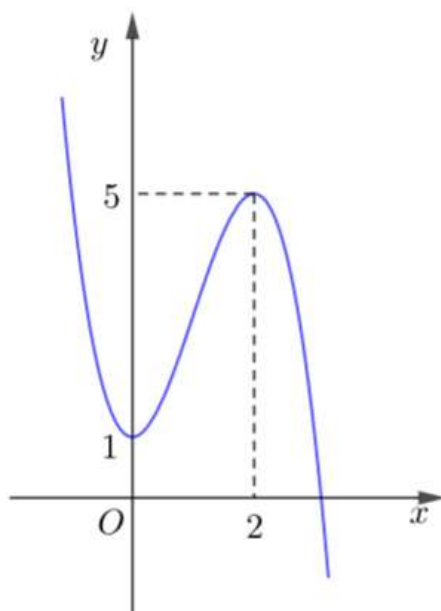
x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
y'	+	0	-	0	-
y	$-\infty$	5	-2	5	$-\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $2f(x) - 7 = 0$ là

Câu 2: Đồ thị hàm số $y = (x-1)(x^2 - 4x + 4)$ có bao nhiêu điểm chung với trục Ox ?

Câu 3: Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} + x^2 - 2x + 1$ có đồ thị. Phương trình tiếp tuyến của tại điểm $M\left(1; \frac{1}{3}\right)$ là

Câu 4: Cho hàm bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị trong hình bên. Số nghiệm của phương trình $f(x) = 2$ là



Câu 5: Số giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ bằng số nghiệm của phương trình.

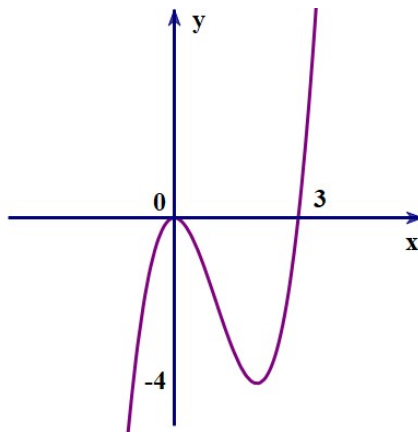
Câu 6: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^4 - 5x^2 + 4$ với trục hoành là.

Câu 7: Đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 - 2$ cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm?

Câu 8: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = \frac{3x+1}{x-3}$ và đường thẳng $y = 3$ là

Câu 9: Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x - 3$ cắt trục tung tại điểm có tung độ

Câu 10: Cho đồ thị $y = f(x)$. Tìm m để phương trình $f(x) + 1 = m$ có đúng 3 nghiệm?

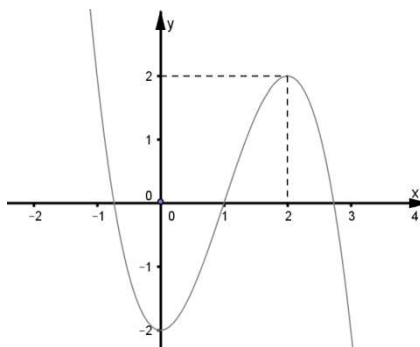


Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		+		-	
y	-5		2		1

Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f(x) = m$ có nghiệm duy nhất?

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên. Tìm m để phương trình $f(x) = m$ có 3 nghiệm phân biệt.



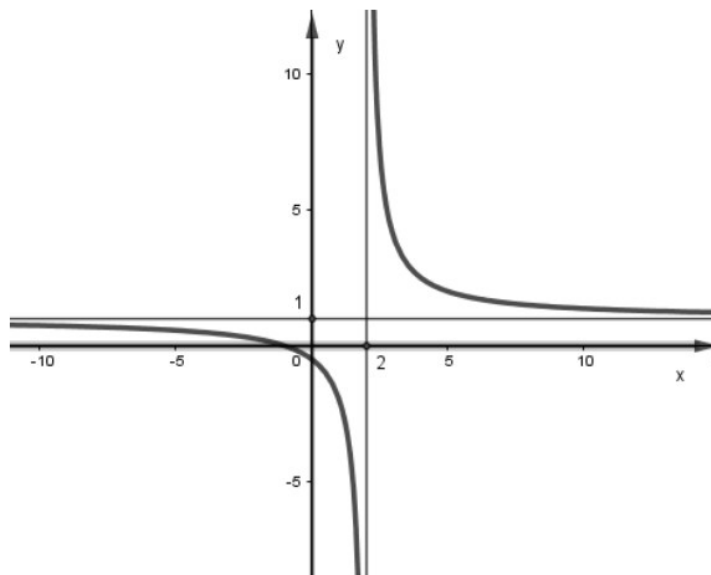
Câu 13: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ tại điểm có hoành độ $x = -1$ có hệ số góc k bằng

Câu 14: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - x - 2}{x - 3}$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị (C) đi qua điểm $A(4;1)$?

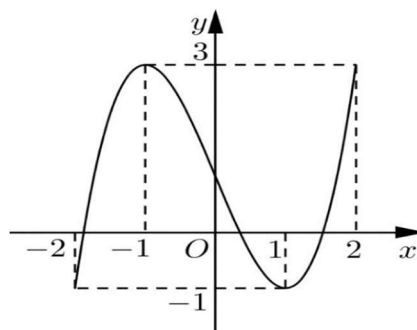
Câu 15: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3$ tại điểm có hoành độ 0 là đường thẳng

Câu 16: Đường thẳng $d: y = 3x + 1$ cắt đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{2x^2 - 2x + 3}{x - 1}$ tại hai điểm phân biệt A, B . Tính độ dài AB .

Câu 17: Cho hàm số $y = \frac{ax + 1}{bx - 2}$ có đồ thị như hình vẽ. Tính $T = a + b$.



Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-2; 2]$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) - 4 = 0$ trên đoạn $[-2; 2]$ là

Câu 19: Tìm điều kiện của m để đường thẳng $y = mx + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x - 3}{x + 1}$ tại hai điểm phân biệt.

Câu 20: Cho hàm số $y = \frac{2x - 1}{x + 1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = 2x - 3$. Đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B . Tọa độ trung điểm của đoạn AB là:

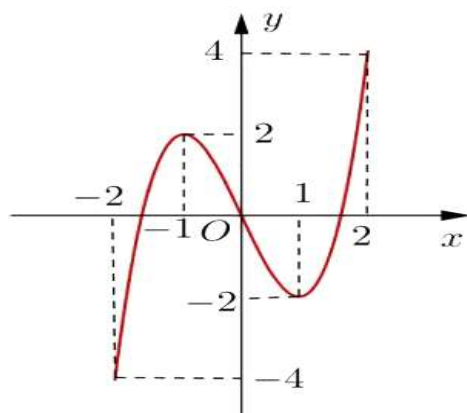
Câu 21: Số giao điểm đồ thị hàm số $y = x^4 - x^2 - 2$ và đường thẳng $y = -2$ là:

Câu 22: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình $f(x) = 2m - 4$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
y'	+		- 0 +	
y	$-\infty$	2	$+\infty$ -4	$+\infty$

Câu 23: Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = -2x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ tại hai điểm phân biệt là.

Câu 24: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên dưới. Xác định giá trị của tham số m để phương trình $|f(x)| = m$ có số nghiệm thực nhiều nhất.



Câu 25: Sau đây là bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
y'	+	0	- 0 -	
y	$-\infty$	3	-1	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $2|f(x)| - 3 = 0$ là

Câu 26: Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - m$. Tìm các giá trị của m để đồ thị hàm số $f(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt?

Câu 27: Biết đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{1-x}$ và đường thẳng $y = -x + 2$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B , tìm tung độ trung điểm I của đoạn thẳng AB .

Câu 28: Trong 20 phút theo dõi, lưu lượng nước của một con sông được tính theo công thức

$Q(t) = -\frac{1}{5}t^3 + 5t^2 + 100$, trong đó Q được tính theo $\text{m}^3/\text{phút}$, t tính theo phút, $0 \leq t \leq 20$

(Nguồn: A. Bigalke et al., Mathematik, Grundkurs ma-1, Cornelsen 2016). Khi lưu lượng nước của con sông lên đến $550 \text{ m}^3/\text{phút}$ thì cảnh báo lũ được đưa ra.



Trong thời gian theo dõi, lưu lượng nước của con sông lớn nhất là bao nhiêu? Cảnh báo lũ được đưa ra vào thời điểm nào?

Câu 29: Khi một vật lạ mắc kẹt trong khí quản khiến ta phải ho, cơ hoành đẩy lên trên gây ra tăng áp lực trong phổi, theo đó cuống họng co thắt làm hẹp khí quản khiến không khí đi qua mạnh hơn. Đối với một lượng không khí bị đẩy ra trong một khoảng thời gian cố định, khí quản càng nhỏ thì luồng không khí càng đẩy ra nhanh hơn. Vận tốc luồng khí thoát ra càng cao, lực tác động lên vật lạ càng lớn. Qua nghiên cứu một số trường hợp, người ta nhận thấy vận tốc v của luồng khí liên hệ với bán kính x của khí quản theo công thức:

$v(x) = k(x_0 - x)x^2$ với $\frac{1}{2}x_0 \leq x \leq x_0$. Trong đó k là hằng số ($k > 0$) và x_0 là bán kính khí quản ở trạng thái bình thường. Tìm x theo x_0 để vận tốc của luồng khí một cơn ho trong trường hợp này là lớn nhất.

Câu 30: Anh Nam có một mảnh đất rộng và muốn dành ra một khu đất hình chữ nhật có diện tích 200 m^2 để trồng vài loại cây mới. Anh dự kiến rào quanh ba cạnh của khu đất hình chữ nhật này bằng lưới thép, cạnh còn lại (chiều dài) sẽ tận dụng bức tường có sẵn (Hình 1.36). Do điều kiện địa lí, chiều rộng khu đất không vượt quá 15 m , hỏi chiều rộng của khu đất này bằng bao nhiêu để tổng chiều dài lưới thép cần dùng là ngắn nhất (nghĩa là chi phí rào lưới thép thấp nhất)?



Hình 1.36

Câu 31: Giả sử số lượng của một quần thể nấm men tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm được mô hình hoá bằng hàm số $P(t) = \frac{a}{b + e^{-0,75t}}$, trong đó thời gian t được tính bằng giờ. Tại thời điểm ban đầu $t = 0$, quần thể có 20 tế bào và tăng với tốc độ 12 tế bào/giờ. Tìm các giá trị của a và b . Theo mô hình này, điều gì xảy ra với quần thể nấm men về lâu dài?

Câu 32: Một nhà sản xuất cần làm những hộp đựng hình trụ có thể tích 1 lít. Tìm các kích thước của hộp đựng để chi phí vật liệu dùng để sản xuất là nhỏ nhất (kết quả được tính theo centimet và làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Câu 33: Có bao nhiêu giá trị của m để đồ thị của hàm số $y = \frac{x}{1-x}$ cắt đường thẳng $y = x - m$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho góc giữa hai đường thẳng OA và OB bằng 60° (O là gốc tọa độ)?

Câu 34: Một đường thẳng cắt đồ thị hàm số $y = 3x^4 - 4x^2$ tại bốn điểm phân biệt có hoành độ $0; 1; a; b$. Tính $S = ab - a - b$.

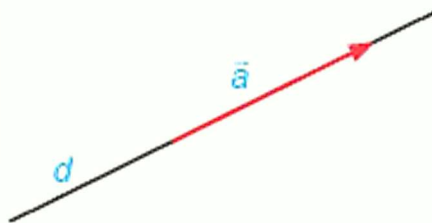
◆ CHƯƠNG 2. VECTƠ VÀ HỆ TRỤC TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

▶ BÀI 1. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

A. Tóm tắt kiến thức

1. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

- ✓ Vectơ trong không gian là một đoạn thẳng có hướng.
- ✓ Độ dài của vectơ trong không gian là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.
- ✎ **Chú ý:** Tương tự như vectơ trong mặt phẳng, đối với vectơ trong không gian ta cũng có các kí hiệu và khái niệm sau:
 - ✓ Vectơ có điểm đầu là A và điểm cuối là B được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$.
 - ✓ Khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của vectơ thì vectơ còn được kí hiệu là $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}, \dots$
 - ✓ Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}$ được kí hiệu là $|\overrightarrow{AB}|$, độ dài của vectơ $\vec{a}$ được kí hiệu là $|\vec{a}|$.
 - ✓ Đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của một vectơ được gọi là giá của vectơ đó



Hình 2.4. Đường thẳng d là giá của vectơ $\vec{a}$.

- ✓ Hai vectơ được gọi là cùng phương nếu chúng có giá song song hoặc trùng nhau.
- ✓ Nếu hai vectơ cùng phương thì chúng cùng hướng hoặc ngược hướng.
- ✓ Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau, kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$, nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng.

-  **Chú ý:** Tương tự như vector trong mặt phẳng, ta có tính chất và các quy ước sau đối với vector trong không gian:
- Trong không gian, với mỗi điểm O và vector $\vec{a}$ cho trước, có duy nhất điểm M sao cho $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$.
 - Các vector có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, ví dụ như $\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}, \dots$ gọi là các vector -không.
 - Ta quy ước vector-không có độ dài là 0, cùng hướng (và vì vậy cùng phương) với mọi vector. Do đó, các vector-không đều bằng nhau và được kí hiệu chung là $\vec{0}$.

2. TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTOR TRONG KHÔNG GIAN

a) Tổng của hai vector trong không gian

- Trong không gian, cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Lấy một điểm A bất kì và các điểm B, C sao cho $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Khi đó, vector $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu là $\vec{a} + \vec{b}$.
- Trong không gian, phép lấy tổng của hai vector được gọi là phép cộng vector. Bốn điểm A, B, A', B' đồng phẳng và tứ giác $ABB'A'$ là hình bình hành.
-  **Chú ý:** Tương tự như phép cộng vector trong mặt phẳng, phép cộng vector trong không gian có các tính chất sau:
 - Tính chất giao hoán: Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vector bất kì thì $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
 - Tính chất kết hợp: Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ và $\vec{c}$ là ba vector bất kì thì $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.
 - Tính chất cộng với vector $\vec{0}$: Nếu $\vec{a}$ là một vector bất kì thì $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.
- Từ tính chất kết hợp của phép cộng vector trong không gian, ta có thể viết tổng của ba vector $\vec{a}, \vec{b}$ và $\vec{c}$ là $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ mà không cần sử dụng các dấu ngoặc. Tương tự đối với tổng của nhiều vector trong không gian.
- Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Khi đó, ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.

b) Hiệu của hai vector trong không gian

- Trong không gian, vector có cùng độ dài và ngược hướng với vector $\vec{a}$ được gọi là vector đối của vector $\vec{a}$, kí hiệu là $-\vec{a}$.

Chú ý:

- ✓ Hai vector là đối nhau nếu và chỉ nếu tổng của chúng bằng $\vec{0}$.
- ✓ Vector $\overrightarrow{BA}$ là một vector đối của vector $\overrightarrow{AB}$.

Vector $\vec{0}$ được coi là vector đối của chính nó.



- ✓ Tương tự như hiệu của hai vector trong mặt phẳng, ta có định nghĩa về hiệu của hai vector trong không gian:
- ✓ Vector $\vec{a} + (-\vec{b})$ được gọi là hiệu của hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ và kí hiệu là $\vec{a} - \vec{b}$.

Trong không gian, phép lấy hiệu của hai vector được gọi là phép trừ vector.

3. TÍCH CỦA MỘT SỐ VỚI MỘT VECTOR TRONG KHÔNG GIAN

- ✓ Trong không gian, tích của một số thực $k \neq 0$ với một vector $\vec{a} \neq \vec{0}$ là một vector, kí hiệu là $k\vec{a}$, được xác định như sau:
- ✓ Cùng hướng với vector $\vec{a}$ nếu $k > 0$; ngược hướng với vector $\vec{a}$ nếu $k < 0$;
- ✓ Có độ dài bằng $|k| \cdot |\vec{a}|$.
- ✓ Trong không gian, phép lấy tích của một số với một vector được gọi là phép nhân một số với một vector.

Chú ý:

- ✓ Quy ước $k\vec{a} = \vec{0}$ nếu $k = 0$ hoặc $\vec{a} = \vec{0}$.
- ✓ Nếu $k\vec{a} = \vec{0}$ thì $k = 0$ hoặc $\vec{a} = \vec{0}$.
- ✓ Trong không gian, điều kiện cần và đủ để hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$) cùng phương là có một số thực k sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$.

Chú ý: Tương tự như phép nhân một số với một vector trong mặt phẳng, phép nhân một số với một vector trong không gian có các tính chất sau:

- ✓ Tính chất kết hợp: Nếu h, k là hai số thực và $\vec{a}$ là một vector bất kì thì $h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a}$.
- ✓ Tính chất phân phối: Nếu h, k là hai số thực và $\vec{a}, \vec{b}$ là hai vector bất kì thì $(h + k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$ và $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$.
- ✓ Tính chất nhân với 1 và -1: Nếu $\vec{a}$ là một vector bất kì thì $1\vec{a} = \vec{a}$ và $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$.

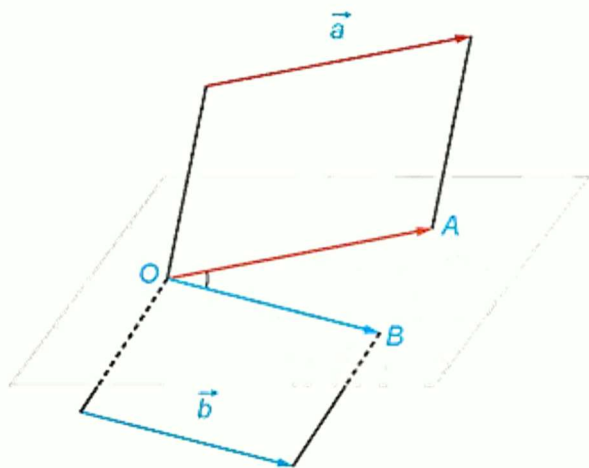
Chú ý: Tương tự như trong mặt phẳng, nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì với điểm O tùy ý, ta có

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$$

4. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTOR TRONG KHÔNG GIAN

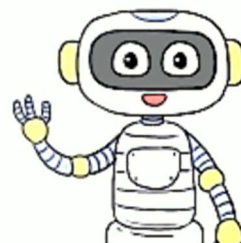
a) Góc giữa hai vector trong không gian

- ✓ Trong không gian, cho hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$. Lấy một điểm O bất kì và gọi A, B là hai điểm sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Khi đó, góc $\widehat{AOB}$ ($0^\circ \leq \widehat{AOB} \leq 180^\circ$) được gọi là góc giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu là $(\vec{a}, \vec{b})$.



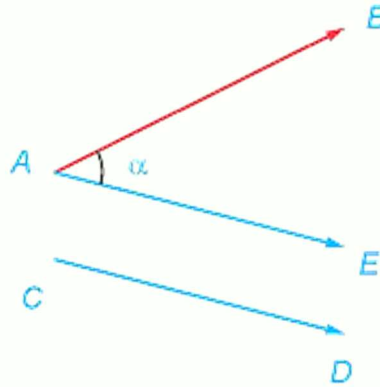
Hình 2.22

Nếu góc giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là 90° thì ta nói hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau và kí hiệu là $\vec{a} \perp \vec{b}$.



Chú ý:

- Để xác định góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ trong không gian ta có thể lấy điểm E sao cho $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CD}$, khi đó $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \widehat{BAE}$ (H. 2.23).
- Quy ước góc giữa một vectơ bất kì và 0 có thể nhận một giá trị tùy ý từ 0° đến 180° .



Hình 2.23

b) Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ đều khác $\vec{0}$. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu là $\vec{a} \cdot \vec{b}$, được xác định bởi công thức:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}).$$

Chú ý:

- Quy ước nếu $\vec{a} = \vec{0}$ hoặc $\vec{b} = \vec{0}$ thì $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.
- Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ đều khác $\vec{0}$. Khi đó: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.
- Với mọi vectơ $\vec{a}$, ta có $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.
- Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ là hai vectơ khác $\vec{0}$ thì $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

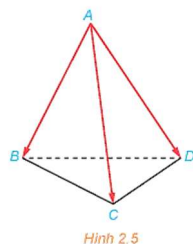
B. Phân dạng toán cơ bản

♦ Dạng 1: Nhận biết vector trong không gian

📌 Các ví dụ minh họa

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$ có độ dài mỗi cạnh bằng 1 (H.2.5).

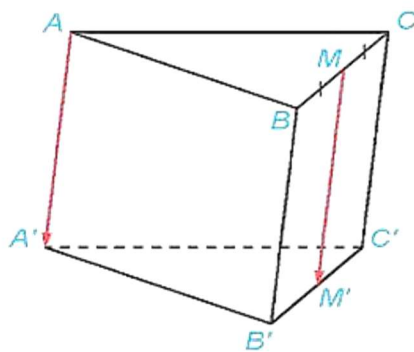
- Có bao nhiêu vector có điểm đầu là A và điểm cuối là một trong các đỉnh còn lại của tứ diện?
- Trong các vector tìm được ở câu a , những vector nào có giá nằm trong mặt phẳng (ABC) ?
- Tính độ dài của các



Hình 2.5

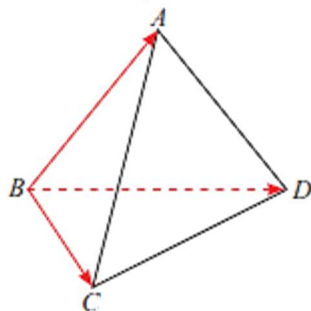
Câu 2: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ (H. 2.8).

- Trong ba vector $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CC'}$ và $\overrightarrow{B'B}$, vector nào bằng vector $\overrightarrow{AA'}$? giải thích vì sao.
- Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Xác định điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}$.



Hình 2.8

Câu 3: Cho hình tứ diện $ABCD$. Hãy chỉ ra các vector có điểm đầu là B và điểm cuối là các đỉnh còn lại của hình tứ diện.

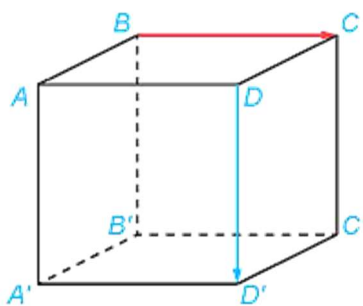


Hình 2

♦Dạng 2: Tổng và hiệu của hai vector

👉 Các ví dụ minh họa

Câu 1: Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có độ dài mỗi cạnh bằng 1 (H. 2.12). Tính độ dài của vector $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DD'}$.



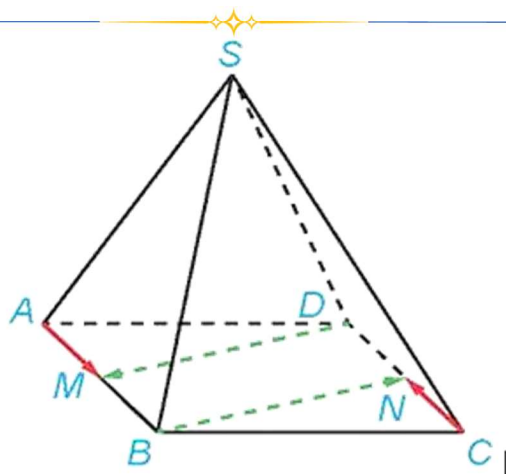
Hình 2.12

Câu 2: Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ (H. 2.14). Chứng minh rằng $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD (H. 2.16). Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{CN}$ là hai vector đối nhau;

b) $\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{SA}$.



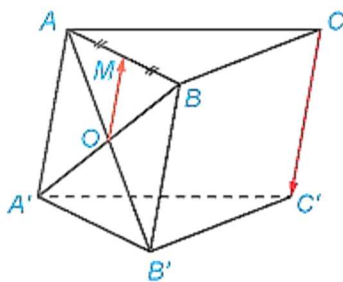
Hình 2.16

♦Dạng ③: Tích của một số với một vector

👉 Các ví dụ minh họa

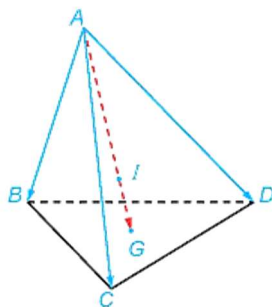
Câu 1: Trong H.2.6, gọi O là giao điểm của AB' và $A'B$ (H.2.18).

chứng minh rằng $\overrightarrow{CC'} = (-2)\overrightarrow{OM}$.



Hình 2.18

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD (H.2.19). Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$.

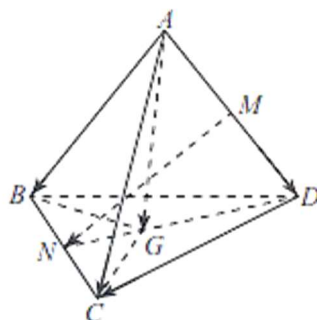


Hình 2.19

Câu 3: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC ; G là trọng tâm của tam giác BCD . Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$.



Hình 18

♦Dạng 4: Tích vô hướng của hai vector

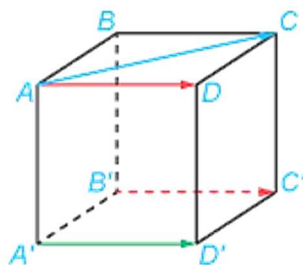
👉 Các ví dụ minh họa

Câu 1: Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ (H.2.24).

Tính góc giữa các cặp vector sau:

a) $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{B'C'}$;

b) $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{A'D'}$.

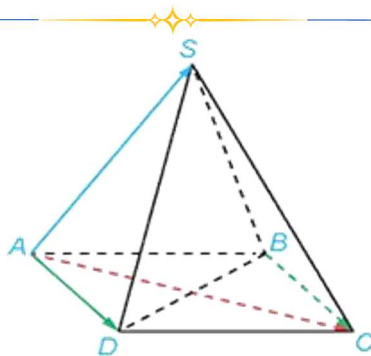


Hình 2.24

Câu 2: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có độ dài tất cả các cạnh bằng a (H.2.26). Tính các tích vô hướng sau:

a) $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{BC}$;

b) $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AC}$.

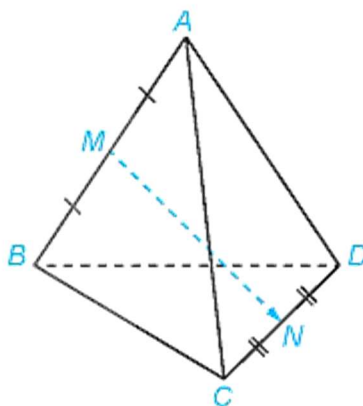


Hình 2.26

Câu 3: Cho tứ diện $ABCD$ có AC và BD cùng vuông góc với AB . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB, CD (H.2.27). Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$

b) $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.



Hình 2.27

♦Dạng 5: Ứng dụng thực tế

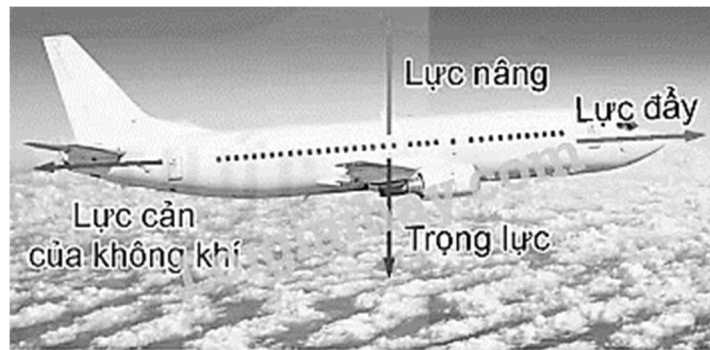
👉 Các ví dụ minh họa

Câu 1: Hình 2.15 mô tả một lọ hoa được đặt trên bàn, trọng lượng của lọ hoa tạo nên một lực tác dụng lên mặt bàn và một phản lực từ mặt bàn lên lọ hoa. Có nhận xét về độ dài và hướng của các vector biểu diễn hai lực đó.



Hình 2.15

Câu 2: Khi chuyển động trong không gian, máy bay luôn chịu tác động của bốn lực chính: lực đẩy của động cơ, lực cản của không khí, trọng lực và lực nâng khí động học (H.2.20). Lực cản của không khí ngược hướng với lực đẩy của động cơ và cỡ độ lớn tỉ lệ thuận với bình phương vận tốc máy bay. Một chiếc máy bay tăng vận tốc từ 900 km/h lên 920 km/h, trong quá trình tăng tốc máy bay giữ nguyên hướng bay. Lực cản của không khí khi máy bay đạt vận tốc 900 km/h và 920 km/h lần lượt được biểu diễn bởi hai vectơ $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$. Hãy giải thích vì sao $\vec{F}_1 = k\vec{F}_2$ với k là một số thực dương nào đó. Tính giá trị của k (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).



Hình 2.20

Câu 3: Ba sợi dây không giãn với khối lượng không đáng kể được buộc chung một đầu và được kéo căng về ba hướng khác nhau (H.2.31). Nếu các lực kéo làm cho ba sợi dây ở trạng thái đứng yên thì khi đó ba sợi dây nằm trên cùng một mặt phẳng. Hãy giải thích vì sao.



Hình 2.31

©. Dạng toán rèn luyện

♦ Dạng 1: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$. Hỏi có bao nhiêu vector khác vector $\vec{0}$ mà mỗi vector có điểm đầu, điểm cuối là hai đỉnh của tứ diện $ABCD$?

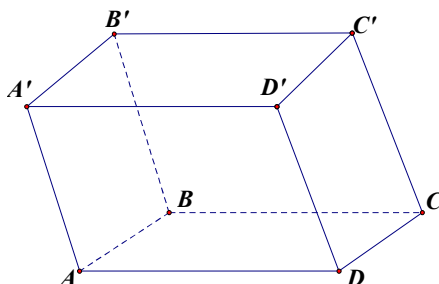
A. 4.

B. 12.

C. 8.

D. 10.

Câu 2: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (xem hình dưới), tổng của $\vec{DA} + \vec{DC} + \vec{DD'}$ là vector nào dưới đây?

A. $\vec{DB'}$.B. $\vec{DB}$.C. $\vec{BD}$.D. $\vec{BD'}$.

Câu 3: Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. Nếu giá của ba vec tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ cùng song song với một mặt phẳng thì ba vec tơ đó đồng phẳng.

B. Nếu giá của ba vec tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ cắt nhau từng đôi một thì ba vec tơ đó đồng phẳng.

C. Nếu trong ba vec tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ có một vec tơ bằng vec tơ $\vec{0}$ thì ba vec tơ đó đồng phẳng.

D. Nếu trong ba vec tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ có hai vec tơ cùng phương thì ba vec tơ đó đồng phẳng.

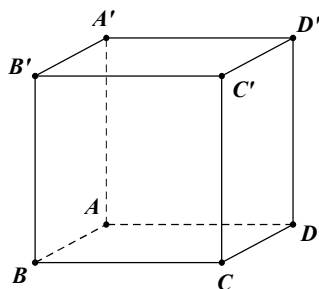
Câu 4: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Chọn mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau.

A. $\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AA'} = \vec{AC'}$.B. $\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'} = \vec{AC'}$.C. $\vec{AC} + \vec{AD} + \vec{AA'} = \vec{AC'}$.D. $\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'} = \vec{AC}$.

Câu 5: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mệnh đề đúng là

A. $\vec{BA} + \vec{BC} + \vec{BB'} = \vec{BD'}$.B. $\vec{BA} + \vec{BC} + \vec{BB'} = \vec{BD}$.C. $\vec{BA} + \vec{BC} + \vec{BB'} = \vec{BC'}$.D. $\vec{BA} + \vec{BC} + \vec{BB'} = \vec{BA'}$.

Câu 6: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (tham khảo hình vẽ) có cạnh bằng a . Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC'}$.



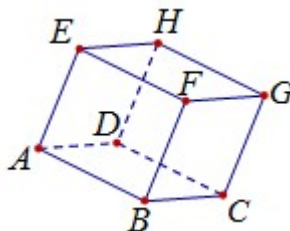
A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

B. $a\sqrt{2}$.

C. 0.

D. a^2 .

Câu 7: Cho hình hộp $ABCDEFGH$ (tham khảo hình vẽ). Tính tổng ba vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ ta được



A. $\overrightarrow{AH}$.

B. $\overrightarrow{AG}$.

C. $\overrightarrow{AF}$.

D. $\overrightarrow{AC}$.

Câu 8: Hãy chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây:

A. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$.

B. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

C. Cho hình chóp $S.ABCD$. Nếu có $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}$ thì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

D. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$.

Câu 9: Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Điều kiện nào sau đây khẳng định $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng?

A. Tồn tại ba số thực m, n, p thỏa mãn $m + n + p = 0$ và $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$.

B. Tồn tại ba số thực m, n, p thỏa mãn $m + n + p \neq 0$ và $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$.

C. Tồn tại ba số thực m, n, p sao cho $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$.

D. Giá của $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng quy.

Câu 10: Hãy chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau đây:

A. Ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng nếu có hai trong ba vectơ đó cùng phương.

B. Ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng nếu có một trong ba vectơ bằng vectơ $\vec{0}$.

C. vectơ $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ luôn đồng phẳng với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

D. Trong hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ ba vectơ $\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{C'A'}, \overrightarrow{DA'}$ đồng phẳng.

Câu 11: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**.

- A. Ba véctor đồng phẳng là ba véctor cùng nằm trong một mặt phẳng.
- B. Ba véctor $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng thì có $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$ với m, n là các số duy nhất.
- C. Ba véctor đồng phẳng khi có $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$ với $\vec{d}$ là véctor bất kì.
- D. Ba véctor đồng phẳng là ba véctor có giá cùng song song với một mặt phẳng.

Câu A sai, ba vector đồng phẳng có thể không cùng nằm trong một mặt phẳng.

B sai vì thiếu điều kiện 2 véctor $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương. Đẳng thức không xảy ra nếu $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương và $\vec{a}, \vec{c}$ không cùng phương.

C sai vì $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$ với $\vec{d}$ là véctor bất kì không phải là điều kiện để 3 véctor $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng, $\vec{d} = \vec{0}$ và m, n, p không đồng thời bằng 0 mới suy ra $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng).

Câu 12: Chỉ ra mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau.

- A. Ba vector đồng phẳng là ba vector cùng nằm trong một mặt phẳng.
- B. Ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng thì có $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$ với m, n là các số duy nhất.
- C. Ba vector không đồng phẳng khi có $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$ với $\vec{d}$ là vector bất kì.
- D. Cả ba mệnh đề trên đều sai.

Câu 13: Chọn mệnh đề sai trong các mệnh đề sau

- A. Nếu trong ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ có một vector bằng $\vec{0}$ thì ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.
- B. Nếu giá của ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ cùng song song với một mặt phẳng thì ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.
- C. Nếu trong ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ có hai vector cùng phương thì ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.
- D. Nếu giá của ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng quy thì ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.

Câu 14: Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Cho $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đều khác $\vec{0}$. Ba véctor $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi giá của chúng cùng nằm trên một mặt phẳng.
- B. Với tứ diện $ABCD$ bất kì ta luôn có $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.
- C. Một đường thẳng cắt hai đường thẳng cho trước thì tồn tại một mặt phẳng chứa cả ba đường thẳng đó.
- D. Với hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ bất kì ta luôn có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{C'A}$.

Câu 15: Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào sai?

- A. Nếu giá của ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ cùng song song với một mặt phẳng thì ba vector đó đồng phẳng.
- B. Nếu ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ có một vector $\vec{0}$ là thì ba vector đồng phẳng.
- C. Nếu trong ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ có hai vector cùng phương thì ba vector đó đồng phẳng.
- D. Nếu giá của ba vector cắt nhau từng đôi một thì 3 vector đồng phẳng.

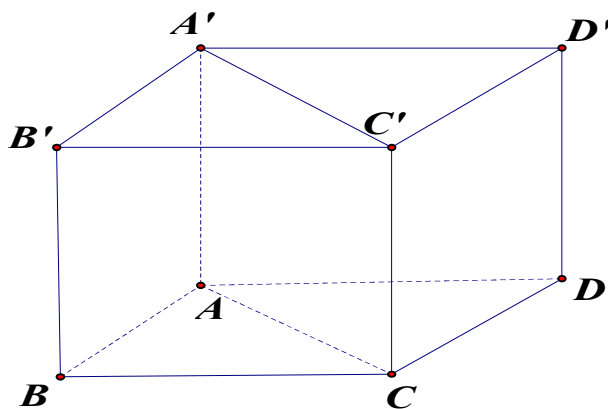
Câu 16: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Thực hiện phép toán $\vec{u} = \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'A}$.

A. $\vec{u} = \vec{A'C}$.

B. $\vec{u} = \vec{BC'}$.

C. $\vec{u} = \vec{BA'}$.

D. $\vec{u} = \vec{BD}$.



Câu 17: Cho G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} = 4\vec{AG}$.

B. $\vec{GD} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$.

C. $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$.

D. $\frac{1}{4}(\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} + \vec{PD}) = \vec{PG}$ (P là tùy ý).

Câu 18: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB' và CD' . Khẳng định nào dưới đây là đúng?

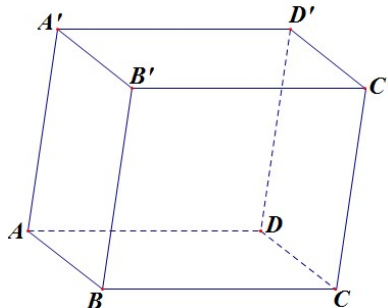
A. $\vec{AI} = \vec{CJ}$.

B. $\vec{D'A'} = \vec{IJ}$.

C. $\vec{BI} = \vec{D'J}$.

D. $\vec{A'I} = \vec{JC}$.

Câu 19: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Đẳng thức nào sau đây là đẳng thức đúng?



A. $\vec{BA} + \vec{BC} + \vec{BB'} = \vec{BC'}$.

B. $\vec{BA} + \vec{BC} + \vec{BB'} = \vec{BD'}$.

C. $\vec{BA} + \vec{BC} + \vec{BB'} = \vec{BD}$.

D. $\vec{BA} + \vec{BC} + \vec{BB'} = \vec{BA'}$.

Câu 20: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABD . Khi đó

A. $\vec{CA} + \vec{CB} + \vec{CD} = 3\vec{CG}$.

B. $\vec{CA} + \vec{CB} + \vec{CD} = 3\vec{GC}$.

C. $\vec{CA} + \vec{CB} + \vec{CD} = 2\vec{CG}$.

D. $\vec{CA} + \vec{CB} + \vec{CD} = \vec{CG}$.

Câu 21: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB' và CD' . Khẳng định nào dưới đây là khẳng định **đúng**?

A. $\vec{D'A'} = \vec{IJ}$.

B. $\vec{A'I} = \vec{JC}$.

C. $\vec{AI} = \vec{CJ}$.

D. $\vec{BI} = \vec{D'J}$.

Câu 22: Cho tứ diện $ABCD$ và điểm G thỏa mãn $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$ (G là trọng tâm của tứ diện). Gọi G_0 là giao điểm của GA và mp (BCD) . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\vec{GA} = -2\vec{G_0G}$.

B. $\vec{GA} = 4\vec{G_0G}$.

C. $\vec{GA} = 3\vec{G_0G}$.

D. $\vec{GA} = 2\vec{G_0G}$.

Câu 23: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD . Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = -3\overrightarrow{AG}$.

B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$.

C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AG}$.

D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AG}$.

Câu 24: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$. Đặt $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{d}$. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

A. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$.

B. $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$.

C. $\vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.

D. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.

Câu 25: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Biểu thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{A'D} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'C}$.

B. $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD}$.

C. $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD}$.

D. $\overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC'}$.

Câu 26: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD và G là trung điểm của MN . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GD}$.

B. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$.

C. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

D. $\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} = \vec{0}$.

Câu 27: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chọn mệnh đề **sai**.

A. $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$.

B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{A'C'}$.

C. $\overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{AA'}$.

D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Chọn mệnh đề đúng.

A. $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}$.

B. $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 8\overrightarrow{SO}$.

C. $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 2\overrightarrow{SO}$.

D. $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{OS}$.

Lời giải

Chọn A

$$ABCD \text{ là hình bình hành tâm } O \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SA}) + (\overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SB}) + (\overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SC}) + (\overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SD}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = -4\overrightarrow{OS} = 4\overrightarrow{SO}.$$

Câu 29: Cho tứ diện $ABCD$. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?

A. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}$.

B. $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC}$.

C. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC}$.

D. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}$.

Câu 30: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định dưới đây.

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AD'}$.

B. $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{CA'}$.

C. $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DB'}$.

D. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BD'}$.

Câu 31: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Đặt $\vec{x} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC'}$. Độ dài của $\vec{x}$ bằng

A. $(1 + \sqrt{3})a$.

B. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

C. $a\sqrt{6}$.

D. $a\sqrt{2}$.

Câu 32: Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O . Hãy chỉ ra mệnh đề **sai**?

A. $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = 2\overrightarrow{SO}$.

B. $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = 2\overrightarrow{SO}$.

C. $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$.

D. $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \vec{0}$.

Câu 33: Cho hình tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G . Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

B. $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$.

C. $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$.

D. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$.

Câu 34: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$ và điểm S thỏa mãn $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OD'}$. Tính độ dài đoạn OS theo a .

A. $OS = 6a$.

B. $OS = 4a$.

C. $OS = a$.

D. $OS = 2a$.

Câu 35: Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bên và cạnh đáy đều bằng a và $ABCD$ là hình vuông. Gọi M là trung điểm của CD . Giá trị $\overrightarrow{MS} \cdot \overrightarrow{CB}$ bằng

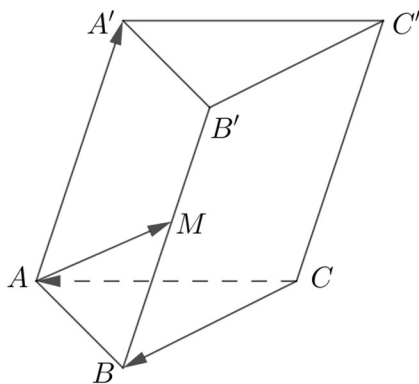
A. $\frac{a^2}{2}$.

B. $-\frac{a^2}{2}$.

C. $\frac{a^2}{3}$.

D. $\frac{\sqrt{2}a^2}{2}$.

Câu 36: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, M là trung điểm của BB' . Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$ (Tham khảo hình vẽ).



Khẳng định nào sau đây đúng?

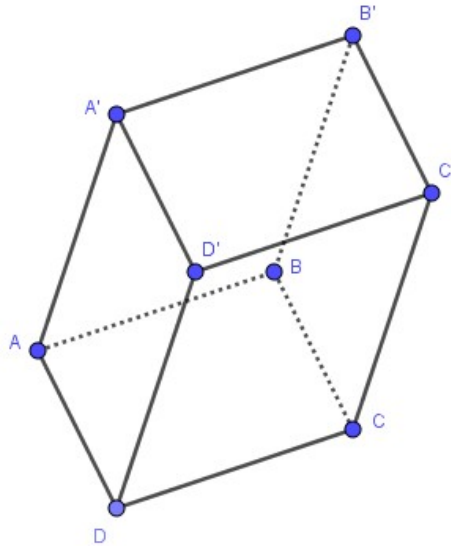
A. $\overrightarrow{AM} = \vec{a} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}$.

B. $\overrightarrow{AM} = \vec{a} - \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

C. $\overrightarrow{AM} = \vec{b} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}$.

D. $\overrightarrow{AM} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$.

Câu 37: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chọn đẳng thức **đúng**:



A. $\overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'}$.

B. $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

C. $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{DC}$.

D. $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD}$.

Câu 38: Cho tứ diện đều $ABCD$. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ bằng

A. 0.

B. $-\frac{a^2}{2}$.

C. $\frac{a^2}{2}$.

D. a^2 .

Câu 39: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. M là trung điểm của BB' . Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $\overrightarrow{AM} = \vec{a} - \vec{c} + \frac{\vec{b}}{2}$.

B. $\overrightarrow{AM} = -\frac{\vec{a}}{2} + \vec{b} + \vec{c}$.

C. $\overrightarrow{AM} = -\vec{a} + \vec{b} + \frac{\vec{c}}{2}$.

D. $\overrightarrow{AM} = \vec{a} - \frac{\vec{b}}{2} + \vec{c}$.

Câu 40: Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng. Xét các vectơ $\vec{x} = 2\vec{a} - \vec{b}$; $\vec{y} = -4\vec{a} + 2\vec{b}$; $\vec{z} = -3\vec{b} - 2\vec{c}$. Chọn khẳng định đúng?

A. Hai vectơ $\vec{y}, \vec{z}$ cùng phương.

B. Hai vectơ $\vec{x}, \vec{y}$ không cùng phương.

C. Hai vectơ $\vec{x}, \vec{z}$ cùng phương.

D. Ba vectơ $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ đồng phẳng.

Câu 41: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vector:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{DD_1} = k \overrightarrow{AC_1}$$

A. $k = 4$.

B. $k = 1$.

C. $k = 0$.

D. $k = 2$.

Câu 42: Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$, gọi G là trọng tâm của tam giác BCD . Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

A. $\overrightarrow{AG} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

B. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

C. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

D. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

Câu 43: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi O là tâm của hình lập phương. Chọn đẳng thức đúng?

$$\text{A. } \overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}).$$

$$\text{B. } \overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}).$$

$$\text{C. } \overrightarrow{AO} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}).$$

$$\text{D. } \overrightarrow{AO} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}).$$

Câu 44: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi G là điểm thỏa mãn:

$$\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}. \text{ Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?}$$

A. G, S, O không thẳng hàng.

$$\text{B. } \overrightarrow{GS} = 4\overrightarrow{OG}.$$

$$\text{C. } \overrightarrow{GS} = 5\overrightarrow{OG}.$$

$$\text{D. } \overrightarrow{GS} = 3\overrightarrow{OG}.$$

Câu 45: Cho lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Hãy phân tích (biểu thị) vector $\overrightarrow{BC'}$ qua các vector $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

$$\text{A. } \overrightarrow{BC'} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}.$$

$$\text{B. } \overrightarrow{BC'} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}.$$

$$\text{C. } \overrightarrow{BC'} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}.$$

$$\text{D. } \overrightarrow{BC'} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}.$$

Câu 46: Cho tứ diện ABCD. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chọn khẳng định đúng?

$$\text{A. } \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}).$$

$$\text{B. } \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}).$$

$$\text{C. } \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD}).$$

$$\text{D. } \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}.$$

Câu 47: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Hệ thức nào đúng?

$$\text{A. } \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}.$$

$$\text{B. } \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'}.$$

$$\text{C. } \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}.$$

$$\text{D. } \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB'}.$$

Câu 48: Cho lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Hãy phân tích (biểu diễn) véc tơ $\overrightarrow{BC'}$ qua các véc tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

$$\text{A. } \overrightarrow{BC'} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}.$$

$$\text{B. } \overrightarrow{BC'} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}.$$

$$\text{C. } \overrightarrow{BC'} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}.$$

$$\text{D. } \overrightarrow{BC'} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}.$$

Câu 49: Trong không gian cho 3 vector $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng. Xét các vector

$$\vec{x} = 2\vec{a} - \vec{b}, \vec{y} = -4\vec{a} + 2\vec{b}, \vec{z} = -3\vec{a} - 2\vec{b}. \text{ Khẳng định nào đúng?}$$

A. Hai vector $\vec{y}$, $\vec{z}$ cùng phương

B. Hai vector $\vec{x}$, $\vec{y}$ cùng phương

C. Hai vector $\vec{x}$, $\vec{z}$ cùng phương.

D. 3 vector $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng.

Câu 50: Cho tứ diện ABCD. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

$$\text{A. } \overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}).$$

$$\text{B. } \overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}).$$

$$\text{C. } \overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(-2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}).$$

$$\text{D. } \overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}).$$

Câu 51: Cho hình hộp ABCD.EFGH có $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AE} = \vec{c}$. Gọi I là điểm thuộc đoạn thẳng BG sao cho $4BI = BG$. Biểu thị $\overrightarrow{AI}$ qua $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ta được

$$\text{A. } \overrightarrow{AI} = \vec{a} + \frac{7}{4}\vec{b} + \frac{7}{4}\vec{c}. \quad \text{B. } \overrightarrow{AI} = \vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}.$$

C. $\overrightarrow{AI} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$. D. $\overrightarrow{AI} = \vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$.

Câu 52: Hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Tính độ dài vector $\vec{x} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC'}$ theo a .

A. $a\sqrt{2}$. B. $(1+\sqrt{3})a$. C. $a\sqrt{6}$. D. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Câu 53: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. M là trung điểm của BB' . Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Khi đó

A. $\overrightarrow{AM} = \vec{a} - \vec{c} + \frac{\vec{b}}{2}$. B. $\overrightarrow{AM} = -\frac{\vec{a}}{2} + \vec{b} + \vec{c}$.

C. $\overrightarrow{AM} = -\vec{a} + \vec{b} + \frac{\vec{c}}{2}$. D. $\overrightarrow{AM} = \vec{a} - \frac{\vec{b}}{2} + \vec{c}$.

Câu 54: Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giá BCD . Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$. B. $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$.

C. $\overrightarrow{AG} = -\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$. D. $\overrightarrow{AG} = -\frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$.

Câu 55: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$, gọi M là trung điểm cạnh bên BB' . Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CC'} = \vec{c}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{AM} = -\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$. B. $\overrightarrow{AM} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$.

C. $\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. D. $\overrightarrow{AM} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}$.

Câu 56: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ với G là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Khi đó $\overrightarrow{AG}$ bằng:

A. $\vec{a} + \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c})$. B. $\vec{a} + \frac{1}{4}(\vec{b} + \vec{c})$. C. $\vec{a} + \frac{1}{6}(\vec{b} + \vec{c})$. D. $\vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$.

Câu 57: Cho tứ diện $ABCD$, gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AC, BD ; G là trọng tâm tam giác ABD ; I là trung điểm của đoạn GM . Điểm F thuộc cạnh BC sao cho $2FB = 3FC$, điểm J thuộc cạnh DF sao cho $7DJ = 5DF$. Dựng hình bình hành $BMKC$. Trong các khẳng định sau khẳng định nào sai?

A. $GM \parallel DK$.

B. $3DK = 10GM$.

C. A, I, J thẳng hàng.

D. $7\overrightarrow{AJ} = 12\overrightarrow{AI}$.

Câu 58: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $\overrightarrow{MA'} = k\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NC'} = l\overrightarrow{ND}$. Khi MN song song với BD' thì khẳng định nào sau đây đúng?

A. $k - l = -\frac{3}{2}$.

B. $k + l = -3$.

C. $k + l = -4$.

D. $k + l = -2$.

Câu 59: Cho tứ diện $ABCD$, M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, CD . Bộ ba vector nào dưới đây đồng phẳng?

A. $\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{MN}$.

B. $\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{MN}$.

C. $\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BD}; \overrightarrow{AD}$.

D. $\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{DC}; \overrightarrow{MA}$.

Câu 60: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Chọn khẳng định đúng?

- A. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BD_1}, \overrightarrow{BC_1}$ đồng phẳng. B. $\overrightarrow{CD_1}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{A_1B_1}$ đồng phẳng.
C. $\overrightarrow{CD_1}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{A_1C}$ đồng phẳng. D. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{C_1A}$ đồng phẳng.

Câu 61: Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Gọi I là tâm hình bình hành $ABEF$ và K là tâm hình bình hành $BCGF$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AK}, \overrightarrow{GF}$ đồng phẳng. B. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{IK}, \overrightarrow{GF}$ đồng phẳng.
C. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{EK}, \overrightarrow{GF}$ đồng phẳng. D. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{IK}, \overrightarrow{GC}$ đồng phẳng.

Câu 62: Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Gọi I là tâm hình bình hành $ABEF$ và K là tâm hình bình hành $BCGF$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{EK}, \overrightarrow{GF}$ đồng phẳng. B. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{IK}, \overrightarrow{GC}$ đồng phẳng.
C. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{IK}, \overrightarrow{GF}$ đồng phẳng. D. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AK}, \overrightarrow{GF}$ đồng phẳng.

Câu 63: Cho hình tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC . Bộ ba véc tơ nào sau đây đồng phẳng?

- A. $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$. B. $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}$. C. $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$. D. $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$.

Câu 64: Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N, P, Q, R, T lần lượt là trung điểm của AC, BD, BC, CD, SA, SD . Bốn điểm nào sau đây đồng phẳng?

- A. P, Q, R, T . B. M, P, R, T . C. M, Q, T, R . D. M, N, R, T .

Câu 65: Cho hình hộp $ABCD.EFGH$, gọi I là tâm hình bình hành $ABFE$ và K là tâm hình bình hành $BCGF$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AK}, \overrightarrow{GF}$ đồng phẳng. B. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{IK}, \overrightarrow{GF}$ đồng phẳng.
C. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{EK}, \overrightarrow{GF}$ đồng phẳng. D. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{IK}, \overrightarrow{GC}$ đồng phẳng.

Câu 66: Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD . Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định dưới đây.

- A. Ba vector $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}$ không đồng phẳng. B. G là trung điểm MN .
C. Ba vector $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng. D. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \frac{1}{4} \overrightarrow{OG}$.

Câu 67: Cho hình chóp $S.ABC$ có A', B' lần lượt là trung điểm SA, SB . G là trọng tâm tam giác ABC . C' là điểm di động trên cạnh SC . Gọi G' là giao điểm với SG với $(A'B'C')$. Khi C' di động trên SC , biểu thức nào sau đây có giá trị không đổi?

- A. $\frac{SG}{SG'} - \frac{SC}{SC'}$. B. $2\frac{SG}{SG'} - 3\frac{SC}{SC'}$. C. $\frac{2SG}{3SG'} - \frac{SC}{SC'}$. D. $3\frac{SG}{SG'} - \frac{SC}{SC'}$.

Câu 68: Cho ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng. Xét $\vec{x} = 2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}; \vec{y} = -\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}; \vec{z} = \vec{a} + 4\vec{b} + m\vec{c}$. Giá trị của m để các vector $\vec{x}; \vec{y}; \vec{z}$ đồng phẳng là:

- A. 0. B. 1. C. 4. D. -2.

Câu 69: Cho tứ diện $ABCD$ và các điểm M, N xác định bởi $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DB} + x\overrightarrow{DC}$. Tìm x để các véc tơ $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

- A. $x = -1$. B. $x = -3$. C. $x = -2$. D. $x = 2$.

Câu 70: Cho tứ diện $ABCD$ có AB, BC, CD đôi một vuông góc với nhau và $AB = a, BC = b, CD = c$. Độ dài đoạn thẳng AD bằng

- A. $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. B. $\sqrt{-a^2 + b^2 + c^2}$. C. $\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$. D. $\sqrt{a^2 - b^2 + c^2}$.

Câu 71: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Tính độ dài vectơ $\vec{x} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD'}$ theo a .

- A. $|\vec{x}| = 2a\sqrt{2}$. B. $|\vec{x}| = 2a\sqrt{6}$. C. $|\vec{x}| = a\sqrt{2}$. D. $|\vec{x}| = a\sqrt{6}$.

Câu 72: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. M là điểm trên AC sao cho $AC = 3MC$. Lấy N trên đoạn $C'D$ sao cho $xC'D = C'N$. Với giá trị nào của x thì $MN \parallel D'B$

- A. $x = \frac{2}{3}$. B. $x = \frac{1}{3}$. C. $x = \frac{1}{4}$. D. $x = \frac{1}{2}$.

Câu 73: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 6 \text{ cm}, BC = BB' = 2 \text{ cm}$. Điểm E là trung điểm cạnh BC . Một tứ diện đều $MNPQ$ có hai đỉnh M và N nằm trên đường thẳng EC' , hai đỉnh P và Q nằm trên đường thẳng đi qua điểm B' và cắt đường thẳng AD tại điểm F . Khoảng cách DF bằng

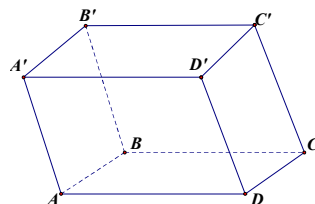
- A. 3 cm . B. 2 cm . C. 6 cm . D. 1 cm .

♦Dạng 2: Câu trắc nghiệm đúng, sai

Câu 1: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Cho tứ diện $ABCD$. Hỏi có bao nhiêu vectơ khác vectơ $\vec{0}$ mà mỗi vectơ có điểm đầu, điểm cuối là hai đỉnh của tứ diện $ABCD$ là 12.

b) Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (xem hình dưới), tổng của $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD'}$ là vectơ $\overrightarrow{DB'}$



c) Nếu giá của ba vec tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ cắt nhau từng đôi một thì ba vec tơ đó đồng phẳng.

d) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (tham khảo hình vẽ) có cạnh bằng a . Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC'} = a^2$

Câu 2: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$

c) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$

d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC}$

Câu 3: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BD'}$

b) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BD}$

c) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BC'}$

d) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BA'}$

Câu 4: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Cho hình hộp $ABCDEFGH$ (tham khảo hình vẽ). Tính tổng ba vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AG}$.

b) Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Các véc tơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp và bằng véc tơ $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{A'B'}$; $\overrightarrow{D'C'}$

c) Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó, vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{AB}$ là vectơ $\overrightarrow{D'C'}$

d) Cho tứ diện $ABCD$. Hỏi có bao nhiêu vectơ khác vectơ $\vec{0}$ mà mỗi vectơ có điểm đầu, điểm cuối là hai đỉnh của tứ diện $ABCD$ là 12.

Câu 5: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Nếu trong ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ có một vectơ bằng $\vec{0}$ thì ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.

b) Nếu giá của ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ cùng song song với một mặt phẳng thì ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.

c) Nếu trong ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ có hai vectơ cùng phương thì ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.

d) Nếu giá của ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng quy thì ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.

Câu 6: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Cho $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đều khác $\vec{0}$. Ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi giá của chúng cùng nằm trên một mặt phẳng.

b) Với tứ diện $ABCD$ bất kì ta luôn có $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.

- c) Một đường thẳng cắt hai đường thẳng cho trước thì tồn tại một mặt phẳng chứa cả ba đường thẳng đó.
- d) Với hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ bất kì ta luôn có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{C'A}$.

Câu 7: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

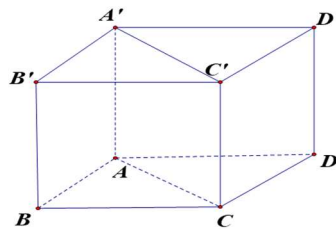
- a) Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$.
- b) Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
- c) Cho hình chóp $S.ABCD$. Nếu có $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}$ thì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.
- d) Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$.

Câu 8: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Ba véc tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng nếu có hai trong ba véc tơ đó cùng phương.
- b) Ba véc tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng nếu có một trong ba véc tơ bằng véc tơ $\vec{0}$.
- c) véc tơ $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ luôn đồng phẳng với hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.
- d) Trong hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ ba véc tơ $\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{C'A'}, \overrightarrow{DA'}$ đồng phẳng.

Câu 9: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Thực hiện phép toán $\vec{u} = \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'A}$ bằng $\vec{u} = \overrightarrow{A'C}$



- b) Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABD . Khi đó $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = 3\overrightarrow{CG}$
- c) Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AA'}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$. Gọi G' là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$. Véc tơ $\overrightarrow{AG'}$ bằng $\overrightarrow{AG'} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

d) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Đặt $\vec{x} = \vec{AA'} + \vec{AC'}$. Độ dài của $\vec{x}$ bằng $a\sqrt{2}$

Câu 10: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) $\vec{AC'} = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'}$
- b) $\vec{AB} + \vec{B'C'} = \vec{A'C'}$
- c) $\vec{BD'} = \vec{C'D'} + \vec{B'C'} + \vec{AA'}$
- d) $\vec{AB} + \vec{B'C'} + \vec{CD} = \vec{0}$

Câu 11: Trong không gian gọi G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$
- b) $\vec{AG} + \vec{BG} + \vec{CG} + \vec{DG} = \vec{0}$
- c) $GA = GB = GC = GD$
- d) $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$

Câu 12: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB' và CD' . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) $\vec{AI} = \vec{CJ}$.
- b) $\vec{D'A'} = \vec{IJ}$
- c) $\vec{BI} = \vec{D'J}$.
- d) $\vec{A'I} = \vec{JC}$.

Câu 13: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABD . Khi đó $\vec{CA} + \vec{CB} + \vec{CD} = 3\vec{CG}$
- b) Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\vec{a} = \vec{AA'}$, $\vec{b} = \vec{AB}$, $\vec{c} = \vec{AC}$. Gọi G' là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$. Vector $\vec{AG'}$ bằng $\vec{AG'} = \frac{1}{3}(3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$
- c) Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABD . Khi đó: $\vec{CA} + \vec{CB} + \vec{CD} = 3\vec{CG}$
- d) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Đặt $\vec{x} = \vec{AA'} + \vec{AC'}$. Độ dài của $\vec{x}$ bằng $\frac{a\sqrt{6}}{2}$

Câu 14: Cho tứ diện $ABCD$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}$.
- b) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC}$
- c) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC}$
- d) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}$

Câu 15: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AD'}$
- b) $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{CA'}$
- c) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DB'}$
- d) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BD'}$

Câu 16: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$ và điểm S thỏa mãn $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OD'}$. Vậy độ dài đoạn $OS = 4a$
- b) Hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Vậy độ dài vectơ $\vec{x} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC'} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$
- c) Cho tứ diện $ABCD$, gọi G là trọng tâm của tam giác BCD . Biết luôn tồn tại số thực k thỏa mãn đẳng thức vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = k \cdot \overrightarrow{AG}$. Hỏi số thực đó bằng 4
- d) Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bên và cạnh đáy đều bằng a và $ABCD$ là hình vuông. Gọi M là trung điểm của CD . Giá trị $\overrightarrow{MS} \cdot \overrightarrow{CB}$ bằng $\frac{a^2}{3}$

Câu 17: Cho tứ diện $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AC và BD . Gọi G là trung điểm của đoạn thẳng MN . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GM}$
- b) G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$.
- c) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

d) $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{MN}$

Câu 18: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I là trung điểm CD . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

b) $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}$

c) $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

d) $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$

Câu 19: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Cho tứ diện $ABCD$, gọi G là trọng tâm của tam giác BCD . Biết luôn tồn tại số thực k thỏa mãn đẳng thức vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = k.\overrightarrow{AG}$. Vậy số thực đó bằng 3

b) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$ và điểm S thỏa mãn $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OD'}$. Vậy độ dài đoạn OS theo a là $OS = 4a$

c) Hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Vậy độ dài vectơ $\vec{x} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC'}$ theo a là $a\sqrt{6}$

d) Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bên và cạnh đáy đều bằng a và $ABCD$ là hình vuông. Gọi M là trung điểm của CD . Giá trị $\overrightarrow{MS} \cdot \overrightarrow{CB}$ bằng $-\frac{a^2}{2}$

Câu 20: Cho tứ diện $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AC và BD . Gọi G là trung điểm của đoạn thẳng MN . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

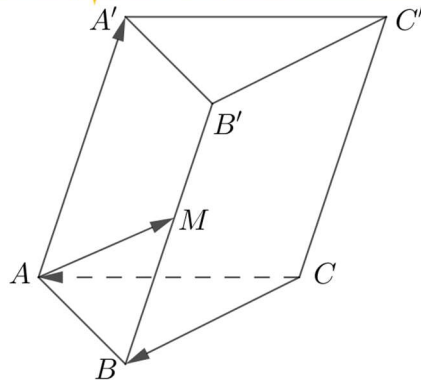
a) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GM}$

b) $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{MN}$

c) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

d) $2\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$

Câu 21: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, M là trung điểm của BB' . Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$ (Tham khảo hình vẽ).



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

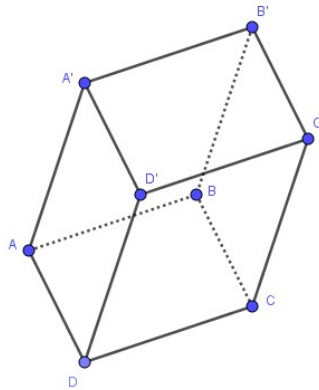
a) $\overrightarrow{AM} = \vec{a} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}$

b) $\overrightarrow{AM} = \vec{a} - \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}$

c) $\overrightarrow{AM} = \vec{b} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}$

d) $\overrightarrow{AM} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$

Câu 22: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?



a) $\overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'}$

b) $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

c) $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{DC}$

d) $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD}$

Câu 23: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Cho tứ diện đều $ABCD$. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ bằng 0

•HỌ VÀ TÊN HS:.....

b) Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. M là trung điểm của BB' . Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}, \overrightarrow{CB} = \vec{b}, \overrightarrow{AA'} = \vec{c}$.

Khi đó $\overrightarrow{AM} = -\frac{\vec{a}}{2} + \vec{b} + \vec{c}$

c) Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Hãy phân tích (biểu thị) vector $\overrightarrow{BC'}$ qua các vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. vậy $\overrightarrow{BC'} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

d) Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ với G là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Khi đó $\overrightarrow{AG}$ bằng: $\vec{a} + \frac{1}{4}(\vec{b} + \vec{c})$.

Câu 24: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$

b) $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'}$

c) $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$

d) $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB'}$

Câu 25: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M là trung điểm của BB' .

Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{CA} = \vec{b}, \overrightarrow{CB} = \vec{c}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $\overrightarrow{AM} = -\vec{b} + \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a}$

b) $\overrightarrow{AM} = \vec{b} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}$

c) $\overrightarrow{AM} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$

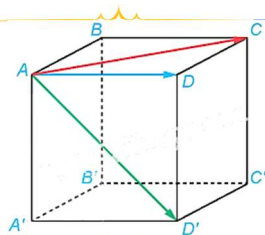
d) $\overrightarrow{AM} = \vec{a} - \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}$

♦ Dạng 3: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ (H.2.6). Trong các vector $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AD'}$:

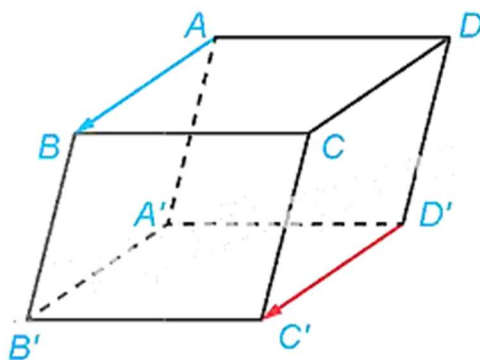
a) Hai vector nào có giá cùng nằm trong mặt phẳng (ABCD) ?

b) Hai vector nào có cùng độ dài?



Hình 2.6

Câu 2: Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ (H.2.7)

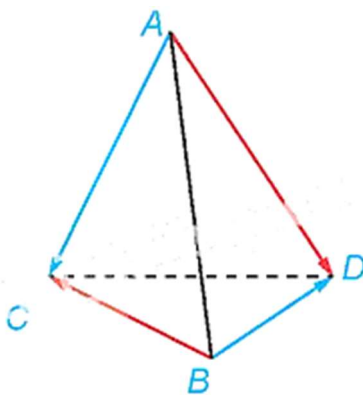


Hình 2.7

- So sánh độ dài hai vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{D'C'}$.
- Nhận xét về giá của hai vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{D'C'}$.
- Hai vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{D'C'}$ có cùng phương không? Có cùng hướng không?

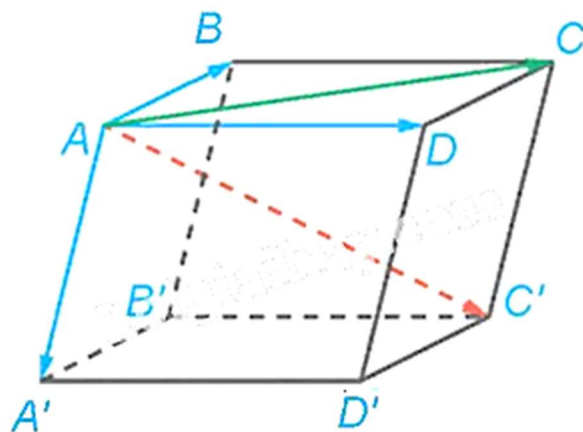
Câu 3: Nếu hai vector cùng bằng một vector thứ ba thì hai vector đó có bằng nhau không?

Câu 4: Cho tứ diện ABCD (H.2.13). Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.



Hình 2.13

Câu 5: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (H.2.14).



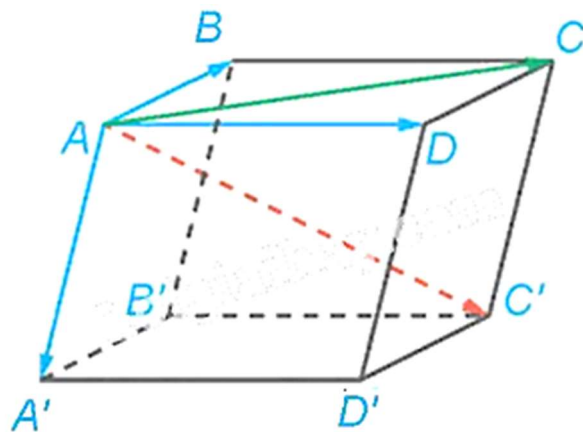
Hình 2.14

- a) Hai vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{AC}$ có bằng nhau hay không?
- b) Hai vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{AC'}$ có bằng nhau hay không?

Câu 6: Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp nên $A'A'D'D$ và $D'C'C$ là hình bình hành. Do đó, $A' // DD', AA' = DD'$ và $DD' = CC', DD' // CC'$. Suy ra, $A' // CC'$ và $AA' = CC'$. Suy ra, tứ giác $AA'C'C$ là hình bình hành. Suy ra: $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'} \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$

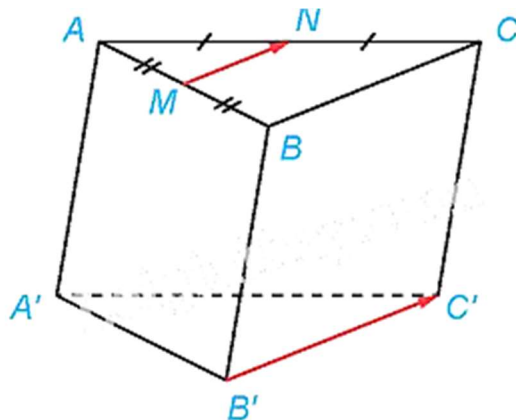
Trong Hình 2.14, hãy phát biểu quy tắc hình hộp với các vectơ có điểm đầu là B.



Hình 2.14

Câu 7: Cho hình hộp hình chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD'}$

Câu 8: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC (H.2.17)



Hình 2.17

a) Hai vector $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{B'C'}$ có cùng phương không? Có cùng hướng không?

b) Giải thích vì sao $|\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{B'C'}|$.

Câu 9: Vì MN là đường trung bình của tam giác ABC nên $MN = \frac{1}{2} BC$

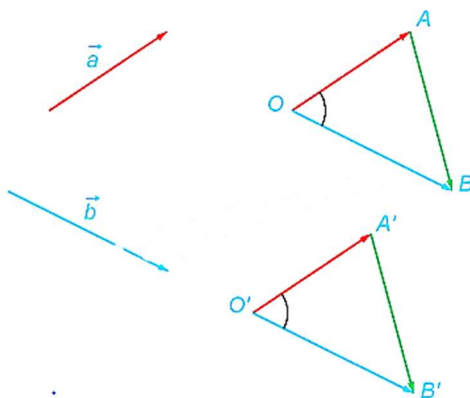
Suy ra: $|\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{B'C'}|$.

Hai vector $1\vec{a}$ và $\vec{a}$ có bằng nhau không? Hai vector $(-1)\vec{a}$ và $-\vec{a}$ có bằng nhau không?

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi E, F lần lượt là các điểm thuộc các cạnh SA, SB sao cho $SE = \frac{1}{3}SA, SF = \frac{1}{3}SB$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$.

Câu 11: Trong không gian, cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Lấy điểm O và vẽ các vector $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

Lấy điểm O' khác O và vẽ các vector $\overrightarrow{O'A'} = \vec{a}, \overrightarrow{O'B'} = \vec{b}$ (H.2.21).



Hình 2.21

a) Hãy giải thích vì sao $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$.

b) Áp dụng định lí côsin cho hai tam giác OAB và $O'A'B'$ để giải thích vì sao $\widehat{AOB} = \widehat{A'O'B'}$

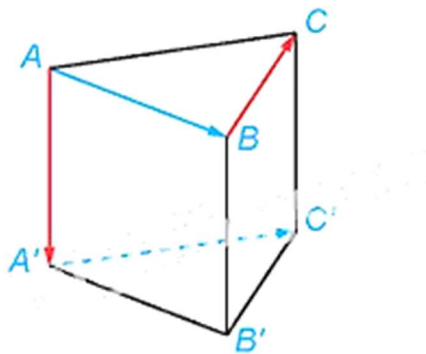
Câu 12: Áp dụng định lí côsin vào tam giác $A'O'B'$ ta có: $\cos \widehat{A'O'B'} = \frac{O'A'^2 + O'B'^2 - A'B'^2}{2 \cdot O'A' \cdot O'B'}$

vì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \Rightarrow AB = A'B', \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{A'O'} \Rightarrow OA = O'A'; \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{O'B'} \Rightarrow OB = O'B'$

Do đó, $\cos \widehat{AOB} = \cos \widehat{A'O'B'} \Rightarrow \widehat{AOB} = \widehat{A'O'B'}$

Xác định góc giữa hai vectơ cùng hướng (và khác $\vec{0}$), góc giữa hai vectơ ngược hướng trong không gian

Câu 13: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC \cdot A'B'C'$ (H. 2.25). Tính các góc $(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{BC})$ và $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'C'})$.



Hình 2.25

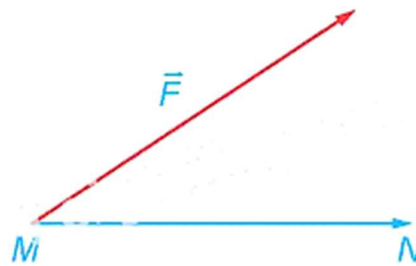
Câu 14: Hãy nhắc lại công thức xác định tích vô hướng của hai vector trong mặt phẳng.

Câu 15: Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{A'C} \cdot \overrightarrow{B'D'} = 0$.

Câu 16: Vì $E'D'^2 + E'E^2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4} = ED'^2$ nên $\triangle E'D'E$ vuông tại E' . Do đó, $\overrightarrow{E'E} \perp \overrightarrow{E'D'}$

Ta có: $\overrightarrow{A'C} \cdot \overrightarrow{B'D'} = 2 \cdot \overrightarrow{E'E} \cdot 2 \cdot \overrightarrow{E'D'} = 0$ (đpcm)

Như đã biết, nếu có một lực $\vec{F}$ tác động vào một vật tại điểm M và làm cho vật đó di chuyển một quãng đường MN thì công A sinh ra được tính theo công thức $A = \vec{F} \cdot \overrightarrow{MN}$, trong đó lực F có độ lớn tính bằng Newton, quãng đường MN tính bằng mét và công A tính bằng Jun (H.2.28). Do đó, nếu dùng một lực $\vec{F}$ có độ lớn không đổi để làm một vật di chuyển một quãng đường không đổi thì công sinh ra sẽ lớn nhất khi lực tác động cùng hướng với chuyển động của vật. Hãy giải thích vì sao. Kết quả trên có thể được áp dụng như thế nào khi kéo (hoặc đẩy) các vật nặng?



Hình 2.28

Câu 17: Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD}$; b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

Câu 18: Trong không gian, cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có cùng độ dài bằng 1. Biết rằng góc giữa hai vector đó là 45° , hãy tính:

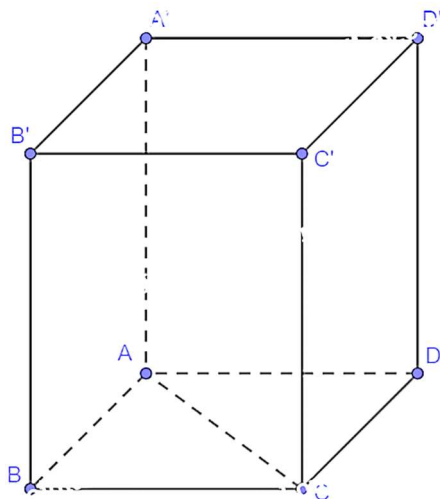
a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ b) $(\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b})$ c) $(\vec{a} + \vec{b})^2$.

Câu 19: Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có độ dài mỗi cạnh đáy bằng 1 và độ dài mỗi cạnh bên bằng 2. Hãy tính góc giữa các cặp vectơ sau đây và tính tích vô hướng của mỗi cặp vectơ đó:

a) $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{C'C}$

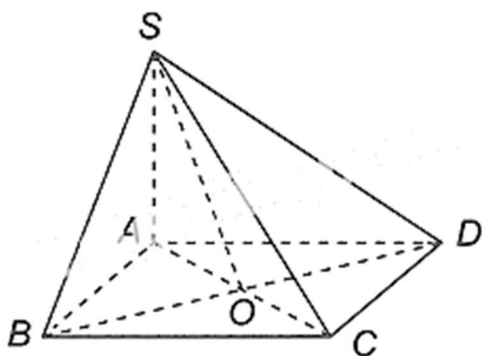
b) $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{BC}$

c) $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{B'A'}$.



Câu 20: Cho hình chóp $S.ABC$. Trên cạnh SA , lấy điểm M sao cho $SM = 2AM$. Trên cạnh BC , lấy điểm N sao cho $CN = 2BN$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{AB}$.

Câu 21: Cho hình chóp tứ giác $S \cdot ABCD$. Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu và chỉ nếu $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$

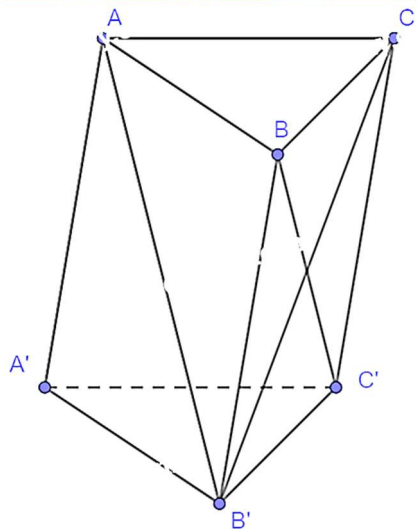


Câu 22: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC \cdot A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ và $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Hãy biểu diễn các vectơ sau qua các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

a) $\overrightarrow{AB'}$;

b) $\overrightarrow{B'C}$

c) $\overrightarrow{BC'}$.

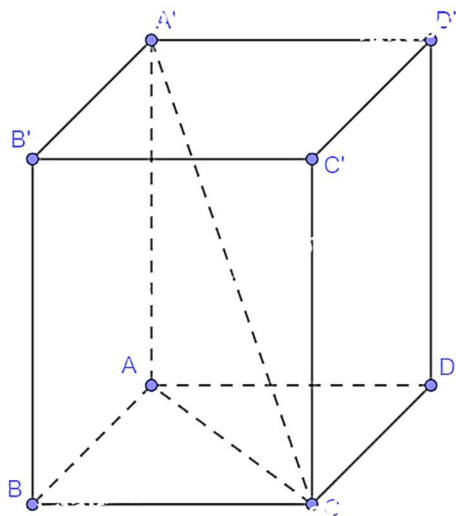


Câu 23: Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Chứng minh rằng:

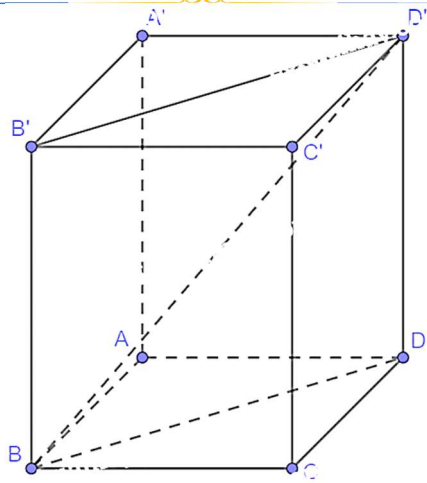
a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{CC'}$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD'} - \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$

c) $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{A'C}$

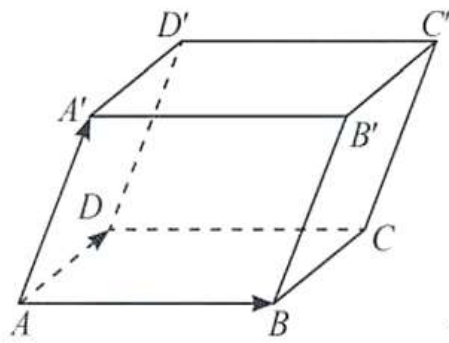


Câu 25: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có $AB = 2$, $AD = 3$ và $AA' = 4$. Tính độ dài của các vectơ $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{BD'}$.



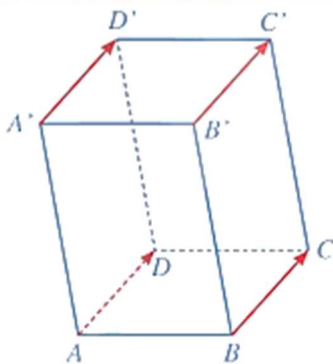
Câu 26: Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ (Hình 3).

- Giá của ba vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}$ có cùng nằm trong một mặt phẳng không?
- Tìm các vector bằng vector $\overrightarrow{AB}$.
- Tìm các vector đối của vector $\overrightarrow{AD}$.



Hình 3

Câu 27: Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Hãy chỉ ra ba vector có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp sao cho ba vector đó:

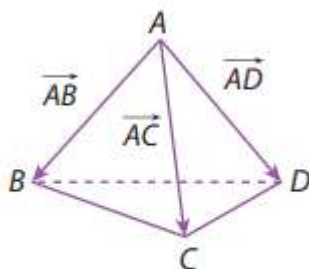


Hình 2

a) Bằng vectơ $\overrightarrow{AD}$;

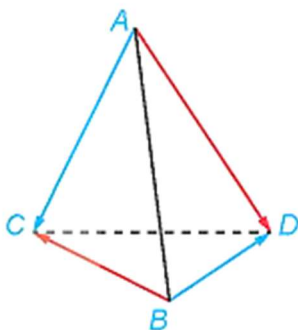
b) Là vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{AD}$.

Câu 28: Cho tứ diện $ABCD$. Hãy chỉ ra các vectơ có điểm đầu là A và điểm cuối là một trong các đỉnh còn lại của tứ diện.



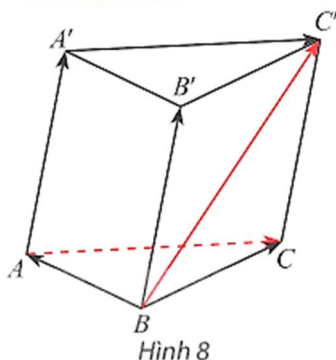
Hình 2.2

Câu 29: Cho tứ diện $ABCD$ (H.2.13). Chứng minh rằng $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.



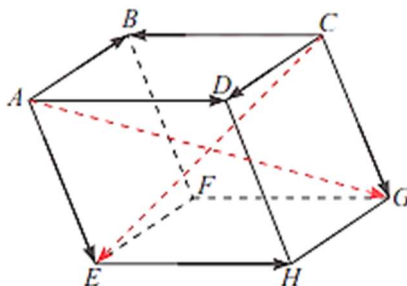
Hình 2.13

Câu 30: Cho hình lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$. Tìm các vectơ tổng $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A'C'}$, $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AA'}$.



Hình 8

Câu 31: Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Thực hiện các phép toán sau đây:

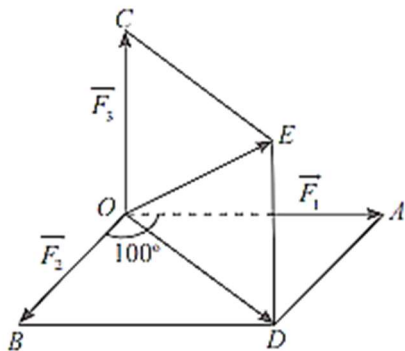


Hình 11

a) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CG}$;

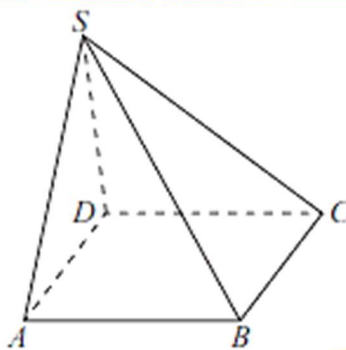
b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{EH}$.

Câu 32: Có ba lực cùng tác động vào một vật. Hai trong ba lực này hợp với nhau một góc 100° và có độ lớn lần lượt là 25 N và 12 N. Lực thứ ba vuông góc với mặt phẳng tạo bởi hai lực đã cho và có độ lớn 4 N. Tính độ lớn của hợp lực của ba lực trên.



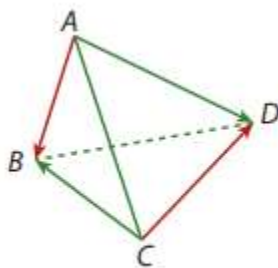
Hình 12

Câu 33: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Tìm các vector hiệu $\overrightarrow{SD} - \overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{BS} - \overrightarrow{AD}$.



Hình 15

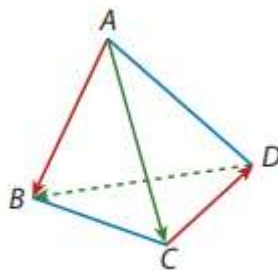
Câu 34: Cho hình tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.



Hình 2.9

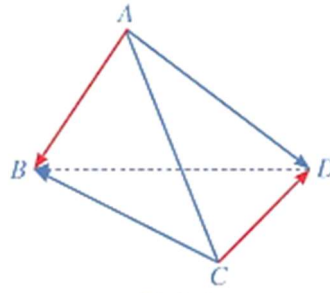
Câu 35: Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ (Hình 2.10). Tìm vector $\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{D'A'}$.

Câu 36: Cho hình tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$.



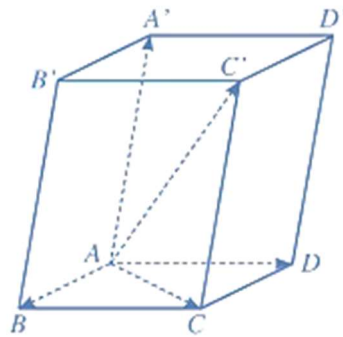
Hình 2.11

Câu 37: Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.



Hình 5

Câu 38: Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ (Hình 6). Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AC'}$



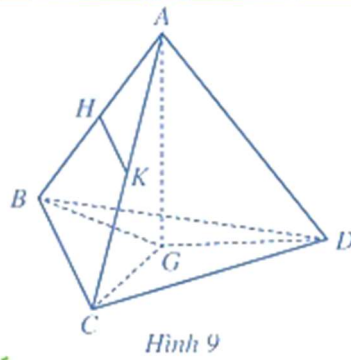
Hình 6

Câu 39: Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ (Hình 8).

Chứng minh rằng: $\overrightarrow{B'B} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{B'D}$.

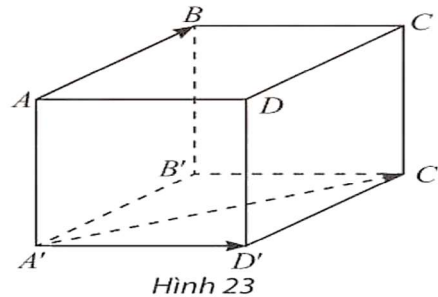
Câu 40: Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm của tam giác BCD . Gọi H, K lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC (Hình 9). Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{HK}$; b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$.



Hình 9

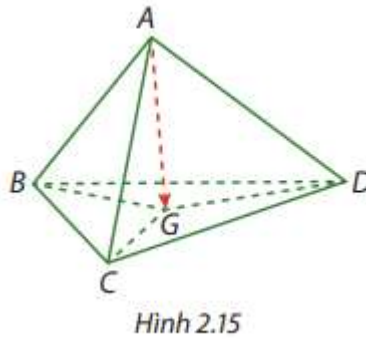
Câu 41: Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Xác định góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'D'})$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'C'})$.



Hình 23

Câu 42: Cho tứ diện $ABCD$. G là trọng tâm của tam giác BCD (Hình 2.15). Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$$

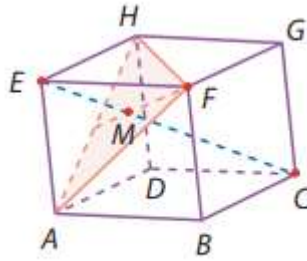


Hình 2.15

Câu 43: Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Điểm M là trọng tâm tam giác AFH (Hình 2.16).

a) Chứng minh rằng ba điểm E, M, C thẳng hàng.

b) Tính độ dài của $\overrightarrow{EM}$ trong trường hợp $ABCD.EFGH$ là hình hộp đứng có các cạnh $AB = 5, AD = 6, AE = 10$ và $\widehat{ABC} = 120^\circ$.

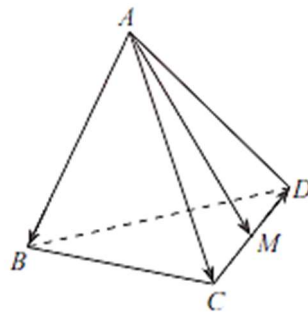


Hình 2.16

Câu 44: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a và M là trung điểm của CD .

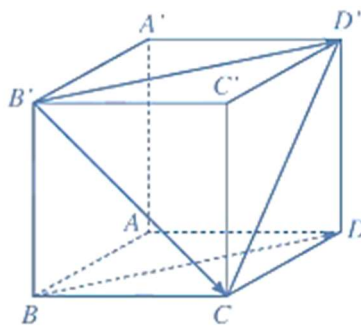
a) Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}$.

b) Tính góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$.



Hình 25

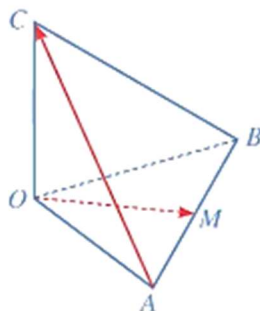
Câu 45: Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Tính góc giữa Hình 10 hai vectơ $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{B'C}$.



Hình 11

Câu 46: Cho tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = OB = OC = 1$. Gọi

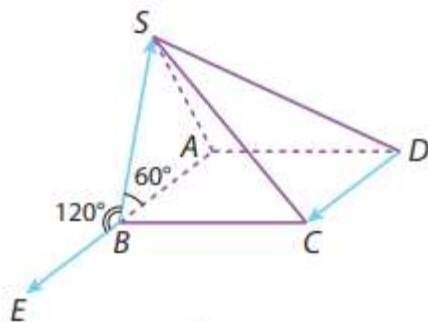
M là trung điểm của cạnh AB . Tính góc giữa hai vector $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{AC}$.



Hình 13

Câu 47: Cho hình chóp $S \cdot ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và mặt bên SAB là tam giác đều.

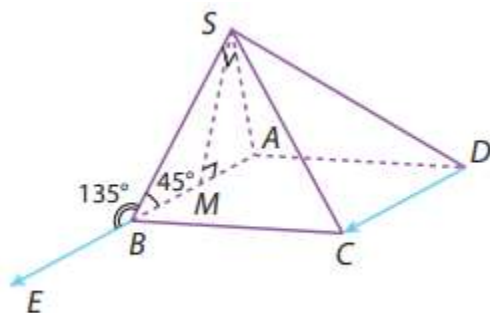
Tính góc giữa hai vector $\overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{BS}$.



Hình 2.20

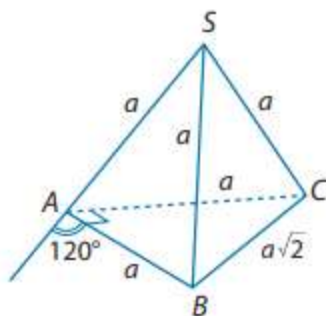
Câu 48: Cho hình chóp $S \cdot ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Mặt bên ASB là tam giác vuông cân tại S và có cạnh $AB = a$. Gọi M là trung điểm của AB . Hãy tính:

- a) $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BS}$; b) $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AS}$; c) $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{MS}$.



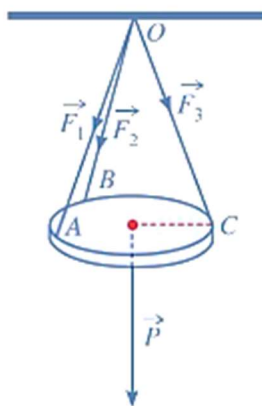
Hình 2.22

Câu 49: Cho hình chóp $S \cdot ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a$ và $BC = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa các vectơ $\overrightarrow{SC}$ và $\overrightarrow{AB}$



Hình 2.23

Câu 50: Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dẫn xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên đèn tròn sao cho các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ lần lượt trên mỗi dây OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = 15(\text{N})$ (Hìn 14).



Hình 14

Tính trọng lượng của chiếc đèn tròn đó.

Câu 51: Cho hình lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$. Gọi M, M' lần lượt là trung điểm các cạnh $AC, A'C'$ (Hình 2.4).

a) Trong tất cả những vectơ có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh của lăng trụ, hãy chỉ ra các vectơ:

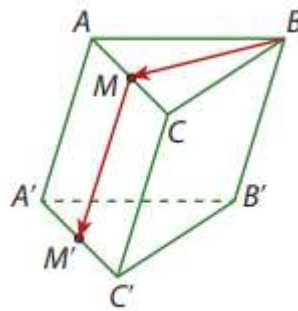
Khác $\vec{O}$ và cùng phương với $\overrightarrow{AM}$;

Khác $\vec{O}$ và cùng hướng với $\overrightarrow{AM}$;

Là vector đối của $\overrightarrow{AC}$;

Bằng $\overrightarrow{MM'}$.

b) Tìm độ dài của $\overrightarrow{BM}$ trong trường hợp ABC là tam giác cân tại B , có cạnh bên bằng 5 cm và góc ở đỉnh bằng 30° (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Hình 2.4

Câu 52: Theo định luật II Newton (Vật lí 10 - Chân trời sáng tạo, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2023, trang 60): Gia tốc của một vật có cùng hướng với lực tác dụng lên vật. Độ lớn của gia tốc tỉ lệ thuận với độ lớn của lực và tỉ lệ nghịch với khối lượng của vật:



Hình 20

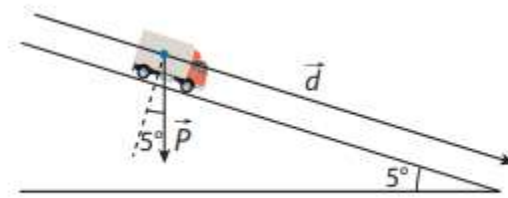
$$\vec{F} = m\vec{a}$$

trong đó $\vec{a}$ là vector gia tốc (m/s^2), $\vec{F}$ là vector lực (N)

Hình 20 tác dụng lên vật, m (kg) là khối lượng của vật.

Muốn truyền cho quả bóng có khối lượng 0,5 kg một gia tốc 50 m/s^2 thì cần một lực đá có độ lớn là bao nhiêu?

Câu 53: Cho biết công A (đơn vị: J) sinh bởi lực $\vec{F}$ tác dụng lên một vật được tính bằng công thức $A = \vec{F} \cdot \vec{d}$, trong đó $\vec{d}$ là vector biểu thị độ dịch chuyển của vật (đơn vị của $|\vec{d}|$ là m) khi chịu tác dụng của lực $\vec{F}$. Một chiếc xe có khối lượng 1,5 tấn đang đi xuống trên một đoạn đường dốc có góc nghiêng 5° so với phương ngang. Tính công sinh bởi trọng lực $\vec{P}$ khi xe đi hết đoạn đường dốc dài 30 m (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị), biết rằng trọng lực $\vec{P}$ được xác định bởi công thức $\vec{P} = m\vec{g}$, với m (đơn vị: kg) là khối lượng của vật và $\vec{g}$ là gia tốc rơi tự do có độ lớn $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.



Hình 2.24

▶ BÀI 2. HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

A. Tóm tắt kiến thức

1. HỆ TRỤC TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

- ✓ Trong không gian, ba trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc với nhau tại gốc O của mỗi trục.
- ✓ Gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là các vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz .
- ✓ Hệ ba trục như vậy được gọi là hệ trục tọa độ Descartes vuông góc $Oxyz$, hay đơn giản là hệ tọa độ $Oxyz$.
- ✓ Điểm O được gọi là gốc tọa độ.
- ✓ Các mặt phẳng $(Oxy), (Oyz), (Ozx)$ đôi một vuông góc với nhau được gọi là các mặt phẳng tọa độ.
- ✓ Không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ còn được gọi là không gian $Oxyz$.

2. TỌA ĐỘ CỦA ĐIỂM, TỌA ĐỘ CỦA VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

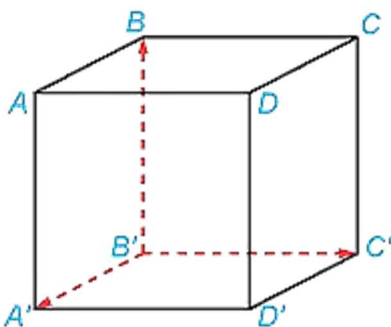
- ✓ Trong không gian $Oxyz$, cho một điểm M tùy ý. Bộ ba số $(x; y; z)$ duy nhất sao cho $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ được gọi là tọa độ của điểm M đối với hệ tọa độ $Oxyz$. Khi đó, ta viết $M = (x; y; z)$ hoặc $M(x; y; z)$, trong đó x là hoành độ, y là tung độ và z là cao độ của M .
- ✓ Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a}$ tùy ý. Bộ ba số $(x; y; z)$ duy nhất sao cho $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ được gọi là tọa độ của vectơ $\vec{a}$ đối với hệ tọa độ $Oxyz$. Khi đó, ta viết $\vec{a} = (x; y; z)$ hoặc $\vec{a}(x; y; z)$.
- ✓ Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(x_M; y_M; z_M)$ và $N(x_N; y_N; z_N)$.
- ✓ Khi đó: $\overrightarrow{MN} = (x_N - x_M; y_N - y_M; z_N - z_M)$.

ⓑ. Phân dạng toán cơ bản

♦ Dạng 1: Hệ trục tọa độ trong không gian

👉 Các ví dụ minh họa

Câu 1: Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có độ dài mỗi cạnh bằng 1 (H.2.36). Có thể lập một hệ toạ độ Oxyz có gốc O trùng với đỉnh B' và các vectơ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là các vectơ $\overrightarrow{B'A'}, \overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{B'B}$ không? **giải** thích vì sao.

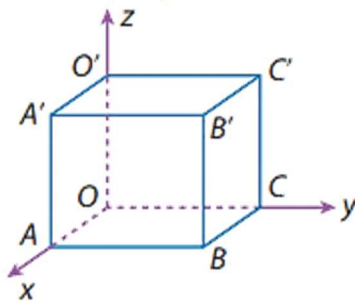


Hình 2.36

Câu 2: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và có độ dài bằng 1. Vẽ hệ trục tọa độ Oxyz có gốc là O , các điểm A, B, C lần lượt nằm trên các tia Ox, Oy, Oz và chỉ ra các vectơ đơn vị trên các trục tọa độ.

Câu 3: Cho hình hộp chữ nhật $OABC \cdot O'A'B'C'$. Hệ toạ độ Oxyz được chọn sao cho các tia Ox, Oy, Oz lần lượt chứa các điểm A, C, O' (Hình 2.30).

- Mặt bên $OCC'O'$ nằm trong mặt phẳng toạ độ nào?
- Ox có vuông góc với mặt bên $OCC'O'$ không?
- Mặt bên $OAA'O'$ có vuông góc với mặt phẳng toạ độ (Oxy) không?

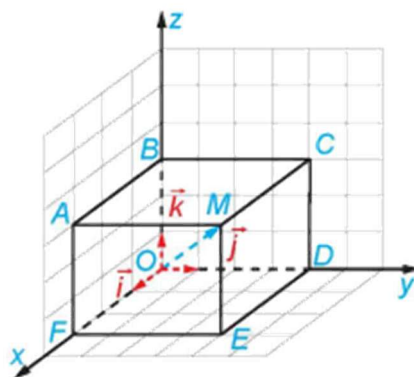


Hình 2.30

♦Dạng ②: Tọa độ của điểm và vector trong không gian

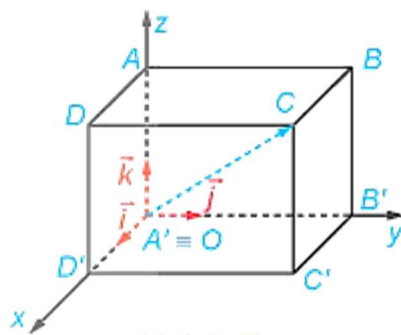
👉 Các ví dụ minh họa

Câu 1: Hình 2.38 minh họa một hệ tọa độ Oxyz trong không gian cùng với các hình vuông có cạnh bằng 1 đơn vị. Tìm tọa độ của điểm M .



Hình 2.38

Câu 2: Trong không gian Oxyz, cho hình hộp chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có đỉnh A' trùng với gốc O và các đỉnh D', B', A lần lượt thuộc các tia Ox, Oy, Oz (H. 2.40). Giả sử đỉnh C có tọa độ là $(2; 3; 5)$ đối với hệ tọa độ Oxyz, hãy tìm tọa độ của các đỉnh D', B', A đối với hệ tọa độ đó.



Hình 2.40

Câu 3: Trong không gian Oxyz, hãy tìm tọa độ của các vector $\vec{i}, \vec{j}$ và $\vec{k}$.

♦ Dạng 3: Ứng dụng thực tế

👉 Các ví dụ minh họa

Câu 1: Hãy mô tả hệ tọa độ Oxyz trong căn phòng ở Hình 2.44 sao cho gốc O trùng với góc trên của căn phòng, khung tranh nằm trong mặt phẳng (Oxy) và mặt trần nhà trùng với mặt phẳng (Oxz).



Hình 2.44

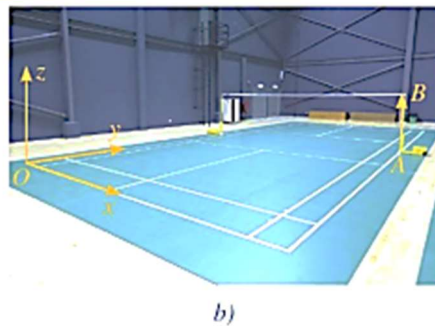
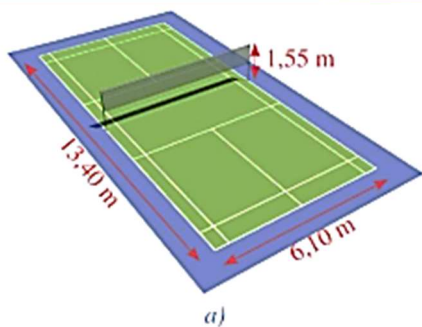
Câu 2: Một sân tennis với hệ tọa độ Oxyz được chọn như ở Hình 20.

- Hỏi mặt sân nằm trong mặt phẳng tọa độ nào?
- Trục Oz có vuông góc với mặt sân hay không?



Hình 20

Câu 3: Hình 33a mô tả một sân cầu lông với kích thước theo tiêu chuẩn quốc tế. Ta chọn hệ trục Oxyz cho sân đó như ở Hình 33b (đơn vị trên mỗi trục là mét). Giả sử AB là một trụ cầu lông để căng lưới. Hãy xác định tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$.



Hình 33

©. Dạng toán rèn luyện

♦ Dạng 1: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;-2)$ và $B(2;2;1)$. Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là:

- A. $(3;3;-1)$. B. $(-1;-1;-3)$. C. $(3;1;1)$. D. $(1;1;3)$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;-1)$ và $B(2;3;2)$. Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

- A. $(1;2;3)$. B. $(-1;-2;3)$. C. $(3;5;1)$. D. $(3;4;1)$.

Câu 3: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho véc-tơ $\overrightarrow{AO} = 3(\vec{i} + 4\vec{j}) - 2\vec{k} + 5\vec{j}$. Tọa độ của điểm A là

- A. $(3;17;-2)$. B. $(-3;-17;2)$. C. $(3;-2;5)$. D. $(3;5;-2)$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(-1;2;-2)$ trên trục Oz là điểm

- A. $H(0;0;-1)$. B. $E(-1;2;0)$. C. $F(0;0;-2)$. D. $G(0;0;2)$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, điểm nào sau đây nằm trên mặt phẳng tọa độ (Oyz) ?

- A. $M(3;4;0)$. B. $P(-2;3;0)$. C. $Q(2;0;0)$. D. $N(0;4;-1)$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;3)$. Xác định tọa độ điểm M' là hình chiếu của M lên mặt phẳng (Oxy) .

- A. $M'(-1;2;-3)$. B. $M'(1;2;0)$. C. $M'(1;0;0)$. D. $M'(0;0;3)$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(5;-1;3)$ trên mặt phẳng (Oyz) có tọa độ là

- A. $(0;-1;0)$. B. $(5;0;0)$. C. $(0;-1;3)$. D. $(-1;3;0)$.

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, hình chiếu của điểm $M(1;2;3)$ trên trục Oy là điểm

A. $R(1;0;0)$.

B. $P(1;0;3)$.

C. $Q(0;2;0)$.

D. $S(0;0;3)$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(5;-6;1)$ lên mặt phẳng có tọa độ là

A. $(0;-6;0)$.

B. $(0;-6;1)$.

C. $(5;-6;0)$.

D. $(5;0;1)$.

Câu 10: Trong không gian $d : Oxyz$, cho điểm $M(1;-2;-3)$. Hình chiếu vuông góc của điểm M lên mặt phẳng (Oyz) là

A. $Q(0;-2;-3)$.

B. $P(1;0;-3)$.

C. $N(1;-2;0)$.

D. $K(1;0;3)$.

Câu 11: Hình chiếu vuông góc của điểm $A(5;-4;3)$ trên trục Ox là điểm

A. $A'(5;4;-3)$.

B. $A'(-5;4;0)$.

C. $A'(-5;4;-3)$.

D. $A'(5;0;0)$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của $M(1;3;5)$ lên mặt phẳng tọa độ (Oxy) là điểm có tọa độ

A. $(0;3;5)$.

B. $(0;0;5)$.

C. $(1;3;0)$.

D. $(1;0;5)$.

Câu 13: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;-1)$ và $B(2;3;2)$. Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

A. $(3;5;1)$.

B. $(-1;-2;3)$.

C. $(3;4;1)$.

D. $(1;2;3)$.

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;-1;3)$ trên trục Oz có tọa độ là

A. $(2;0;0)$.

B. $(0;-1;0)$.

C. $(0;0;3)$.

D. $(2;-1;0)$.

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(2;-3;5)$ trên trục Oy có tọa độ là

A. $(0;-3;0)$.

B. $(0;0;5)$.

C. $(2;0;0)$.

D. $(-3;0;0)$.

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(4;2;-3)$. Hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ là

A. $(0;2;-3)$.

B. $(4;2;-3)$.

C. $(0;0;-3)$.

D. $(4;2;0)$.

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(3;-4;-3)$ trên trục Oz có tọa độ là

A. $(0;-4;0)$.

B. $(0;0;-3)$.

C. $(3;-4;0)$.

D. $(3;0;0)$.

Câu 18: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;2)$ và $D(2;2;2)$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Tọa độ trung điểm của MN là

A. $I(1;-1;2)$.

B. $I(1;1;0)$.

C. $I(1;1;1)$.

D. $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1\right)$.

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(-3;2;1)$ trên mặt phẳng (Oxz) có tọa độ là

A. $(3;0;-1)$.

B. $(0;2;1)$.

C. $(-3;0;1)$.

D. $(-3;2;0)$.

Câu 20: Trong không gian $Oxyz$ với hệ tọa độ $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ cho $\overrightarrow{OA} = \vec{j} - 2\vec{i} + 5\vec{k}$. Tìm tọa độ điểm A .

A. $(5; -2; 1)$.

B. $(-2; 1; 5)$.

C. $(1; -2; 5)$.

D. $(-2; 5; 1)$.

Câu 21: Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(-3; 2; 1)$ trên trục Ox có tọa độ là

A. $(-3; 0; 0)$.

B. $(0; 2; 1)$.

C. $(0; 2; 0)$.

D. $(0; 0; 1)$.

Câu 22: Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(3; 4; -2)$ lên mặt phẳng (Oxz) có tọa độ là

A. $Q(3; 0; 0)$.

B. $G(3; 4; 0)$.

C. $E(0; 4; -2)$.

D. $F(3; 0; -2)$.

Câu 23: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 2 điểm $A(2; 1; 1)$, $B(-1; 2; 1)$. Tìm tọa độ điểm A' đối xứng với điểm A qua điểm B .

A. $A'(3; 4; -3)$.

B. $A'(-4; 3; 1)$.

C. $A'(4; -3; 3)$.

D. $A'(4; 3; 3)$.

Câu 24: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1; 2; 0)$, $B(-1; 0; 1)$, $C(0; 2; -1)$. Tính độ dài của vector $\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.

A. $\sqrt{21}$.

B. 21.

C. $\sqrt{13}$.

D. 13.

Câu 25: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; -1; 1)$, $B(3; 2; -2)$, $C(-3; 1; 5)$. Tìm tọa độ điểm $M(x; y; z)$ thỏa mãn $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{CM}$. Khi đó tổng $S = \frac{9}{x} + \frac{3}{y} - \frac{27}{z}$ bằng

A. 6.

B. -15.

C. 16.

D. -13.

Câu 26: Trong không gian $Oxyz$, điểm đối xứng của $A(1; 2; 3)$ qua mặt phẳng (Oyz) là điểm nào dưới đây

A. $Q(-1; 2; 3)$.

B. $N(1; -2; 3)$.

C. $P(1; 2; -3)$.

D. $M(1; -2; -3)$.

Câu 27: Trong không gian cho $Oxyz$ vector $\overrightarrow{OM} = \vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$. Gọi M' là hình chiếu vuông góc của M trên mặt phẳng (Oxy) . Khi đó tọa độ của điểm M' trong hệ tọa độ $Oxyz$ là

A. $(1; -3; 4)$.

B. $(1; 4; -3)$.

C. $(0; 0; 4)$.

D. $(1; -3; 0)$.

Câu 28: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1; 2; 5)$, $B(3; -6; 3)$. Hình chiếu vuông góc của trung điểm I của đoạn AB trên mặt phẳng (Oyz) là điểm nào dưới đây?

A. $P(3; 0; 0)$.

B. $N(3; -1; 5)$.

C. $M(0; -2; 4)$.

D. $Q(0; 0; 5)$.

Câu 29: Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(1; 2; -3)$ lên mặt phẳng (Oyz) có tọa độ là

A. $(-1; 2; -3)$.

B. $(0; 2; -3)$.

C. $(1; 0; 0)$.

D. $(1; -2; 3)$.

Câu 30: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 3)$, $B(-2; -4; 9)$. Điểm M thuộc đoạn thẳng AB sao cho $MA = 2MB$. Độ dài đoạn thẳng OM là:

A. 5.

B. 3.

C. $\sqrt{17}$.

D. $\sqrt{54}$.

Câu 31: Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(5; -6; 2)$ lên mặt phẳng (Oxz) có tọa độ là

A. $(0; -6; 0)$.

B. $(5; 0; 2)$.

C. $(5; -6; 0)$.

D. $(0; -6; 2)$.

Câu 32: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(5; -1; 1)$. Hình chiếu của điểm A trên mặt phẳng (Oyz) là điểm

A. $M(5; 0; 0)$.

B. $N(0; -1; 1)$.

C. $P(0; -1; 0)$.

D. $Q(0; 0; 1)$.

Câu 33: Cho $A(1; 3; 5)$, $B(2; 4; 6)$. Gọi M là điểm nằm trên đoạn AB sao cho $MA = 2MB$. Tìm tọa độ điểm M .

A. $M\left(\frac{5}{3}; \frac{11}{3}; \frac{17}{3}\right)$.

B. $M\left(\frac{2}{3}; \frac{7}{3}; \frac{21}{3}\right)$.

C. $M\left(\frac{4}{3}; \frac{10}{3}; \frac{16}{3}\right)$.

D. $M\left(\frac{7}{3}; \frac{10}{3}; \frac{31}{6}\right)$.

Câu 34: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba vector $\vec{a}(5; 7; 2)$, $\vec{b}(3; 0; 4)$, $\vec{c}(-6; 1; -1)$. Tìm tọa độ của vector $\vec{m} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$.

A. $\vec{m}(3; 22; -3)$.

B. $\vec{m}(3; 22; 3)$.

C. $\vec{m}(-3; 22; -3)$.

D. $\vec{m}(3; -22; 3)$.

Câu 35: Tìm tọa độ điểm M' là điểm đối xứng của điểm $M(1; 2; 3)$ qua gốc tọa độ O .

A. $M'(-1; 2; 3)$.

B. $M'(-1; -2; 3)$.

C. $M'(-1; -2; -3)$.

D. $M'(1; 2; -3)$.

Câu 36: Trong không gian $Oxyz$, cho các vector $\vec{a} = (1; 3; 3)$, vector $\vec{b} = (-2; 2; 1)$ và vector $\vec{c} = (-1; 2; 3)$. Tìm vector $\vec{x}$ biết $\vec{x} + \vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$.

A. $\vec{x} = (4; -1; -1)$.

B. $\vec{x} = (-4; 1; 1)$.

C. $\vec{x} = (2; 3; 5)$.

D. $\vec{x} = (-2; 7; 7)$.

Câu 37: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(1; 2; 3)$. Tọa độ điểm M thỏa $\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{AO} = \vec{0}$ là

A. $M(-1; -2; -3)$.

B. $M(2; 4; 6)$.

C. $M(-2; -4; -6)$.

D. $M(2; -4; -6)$.

Câu 38: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các vector $\vec{a} = (1; 2; 1)$, $\vec{b} = (-2; 3; 4)$, $\vec{c} = (0; 1; 2)$ và $\vec{d} = (4; 2; 0)$. Biết rằng $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$. Giá trị $x + y + z$ là

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5.

Câu 39: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (10 - m; m + 2; m^2 - 10)$ và $\vec{b} = (7; -1; 3)$.

Giá trị của m để $\vec{a}$ cùng phương với $\vec{b}$ là

A. $m = 4$.

B. $m = -4$.

C. $m = -2$.

D. $m = 2$.

Câu 40: Trong không gian $Oxyz$, cho các vector $\vec{a} = (1; 0; 3)$ và $\vec{b} = (-2; 2; 5)$. Tích vô hướng $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$ bằng

A. 25.

B. 23.

C. 27.

D. 29.

Câu 41: Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}(2; -5; 3)$, $\vec{b}(0; 2; -1)$, $\vec{c}(1; 7; 2)$. Tọa độ vectơ $\vec{d} = \vec{a} - 4\vec{b} + 2\vec{c}$ là

A. $(1; -1; 3)$. B. $(4; 1; 11)$. C. $(-3; 5; 7)$. D. $(0; 2; 6)$.

Câu 42: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -2; 3)$; $B(2; -3; 4)$. Tìm điểm $M \in (Oxy)$ sao cho ba điểm A, B, M thẳng hàng

A. $M(1; 1; 0)$. B. $M(3; -5; 7)$. C. $M(-3; 5; 0)$. D. $M(-2; 1; 0)$.

♦ **Dạng 2: Câu trắc nghiệm đúng, sai**

Câu 1: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -4; 3)$ và $B(2; 2; 7)$. Trung điểm của đoạn AB có tọa độ là $(2; -1; 5)$
- Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; -2)$ và $B(2; 2; 1)$. Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là $(3; 1; 1)$
- Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; -1)$ và $B(2; 3; 2)$. Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là $(1; 2; 3)$
- Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho véc-tơ $\overrightarrow{AO} = 3(\vec{i} + 4\vec{j}) - 2\vec{k} + 5\vec{j}$. Tọa độ của điểm A là $(3; 17; -2)$

Câu 2: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(-1; 2; -2)$ trên trục Oz là điểm $G(0; 0; 2)$
- Trong không gian $Oxyz$, cho $A(-1; 0; 1)$ và $B(1; -1; 2)$ tọa độ véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ là $(2; -1; 1)$
- Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u}_1 = (1; -2; 1)$ và $\vec{u}_2 = (-1; 0; 3)$. Vectơ $\vec{u}_1 - \vec{u}_2$ có tọa độ là $(2; -2; -2)$
- Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(5; -1; 3)$ trên mặt phẳng (Oyz) có tọa độ là $(5; 0; 0)$

Câu 3: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, hình chiếu của điểm $M(1; 2; 3)$ trên trục Oy là điểm $Q(0; 2; 0)$
- Trong không gian $Oxyz$, điểm thuộc trục Oz là $M(0; 0; -2)$
- Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; 2; 3)$. Tọa độ điểm M' là hình chiếu của M lên mặt phẳng (Oxy) là $M'(-1; 2; -3)$

d) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;0)$, $B(-1;0;-2)$. Tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng là $M(0;1;-1)$.

Câu 4: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(5;-6;1)$ lên mặt phẳng (Oxz) có tọa độ là $(0;-6;1)$
- b) Trong không gian $d : Oxyz$, cho điểm $M(1;-2;-3)$. Hình chiếu vuông góc của điểm M lên mặt phẳng (Oyz) là $Q(0;-2;-3)$.
- c) Hình chiếu vuông góc của điểm $A(5;-4;3)$ trên trục Ox là điểm $A'(-5;4;-3)$
- d) Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của $M(1;3;5)$ lên mặt phẳng tọa độ (Oxy) là điểm có tọa độ $(1;3;0)$

Câu 5: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;-1)$ và $B(2;3;2)$. Vector $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là $(1;2;3)$
- b) Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(2;-3;5)$ trên trục Oy có tọa độ là $(-3;0;0)$
- c) Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(-3;2;1)$ trên mặt phẳng (Oxz) có tọa độ là $(3;0;-1)$
- d) Trong không gian $Oxyz$ với hệ tọa độ $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ cho $\overrightarrow{OA} = \vec{j} - 2\vec{i} + 5\vec{k}$. tọa độ điểm A là $(-2;1;5)$

Câu 6: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(-3;2;1)$ trên trục Ox có tọa độ là $(0;2;1)$
- b) Trong không gian $Oxyz$, vector $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{k}$ có tọa độ là $(2;-3;0)$
- c) Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;1;-1)$ trên trục Oy có tọa độ là $(0;1;0)$
- d) Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của $M(1;-2;3)$ lên mặt phẳng (Oyz) là $A(1;-2;0)$

Câu 7: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Trong không gian $Oxyz$, cho vector $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{k}$, khi đó $\vec{u} = (2;-3;0)$
- b) Trong không gian $Oxyz$, vector đơn vị trên trục Oy là $\vec{j} = (0;1;0)$
- c) Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}(-2;-3;3)$, $\vec{b}(0;2;-1)$, $\vec{c}(-3;2;5)$. tọa độ của vector $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{c}$ là $\vec{u}(-16;-4;29)$

d) Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $E(-1;3;2)$ trên mặt phẳng (Oyz) có tọa độ là $(-1;3;0)$

Câu 8: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;-2)$, $B(2;1;-1)$, $C(1;-2;2)$.

Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là $G\left(-\frac{4}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$

b) Cho hai điểm $M(1;-2;3)$ và $N(3;0;-1)$. Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng MN là $I(2;-1;1)$

c) Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho $A(1;2;-1)$, $B(3;1;-2)$, $C(2;3;-3)$ và G là trọng tâm tam giác ABC . Vectơ chỉ phương của đường thẳng OG là $\vec{u} = (2;2;-2)$

d) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;3;-5)$, $B(-3;1;-1)$. Tọa độ trọng tâm G của tam giác OAB là $G\left(\frac{2}{3}; -\frac{4}{3}; -2\right)$

Câu 9: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC biết $A(1;0;-2)$, $B(2;1;-1)$,

$C(1;-2;2)$. Tọa độ trọng tâm G của tam giác là $G\left(\frac{4}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$

b) Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC biết $A(1;-2;2)$, $B(0;4;1)$ và $C(2;1;-3)$.

Trọng tâm tam giác ABC có tọa độ là $\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; -2\right)$

c) Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2;1;3)$, $B(5;0;2)$ và $C(0;2;4)$. Trọng tâm của tam giác ABC có tọa độ là $(3;3;9)$

d) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;-2;3)$, $B(-1;2;5)$, $C(1;0;1)$. Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là $G(1;0;3)$

Câu 10: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Tọa độ của véc tơ $\vec{a}$ là $\vec{a} = (2;-3;-1)$

b) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho các điểm $M(1;2;3)$; $N(3;4;7)$. Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{MN}$ là $\overrightarrow{MN}(2;2;4)$

c) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;-4)$. Tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng tọa độ (Oxy) là $(1;2;-4)$

d) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-3)$ và $B(3;-2;-1)$. Tọa độ trung điểm đoạn thẳng AB là điểm $I(2;0;-2)$

Câu 11: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có trọng tâm $G(-3;1;4)$ và $A(1;0;-1)$, $B(2;3;5)$. Tọa độ điểm C là $C(4;2;-1)$
- b) Trong không gian với hệ trục $Oxyz$ cho ba điểm $A(2;1;3)$, $B(1;-2;2)$, $C(x;y;5)$ thẳng hàng. Khi đó $x+y$ bằng $x+y=11$
- c) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vector $\vec{a}=(2;-1;3)$, $\vec{b}=(1;3;-2)$. Tọa độ của vector $\vec{c}=\vec{a}-2\vec{b}$ là $\vec{c}=(0;-7;-7)$
- d) Trong không gian $Oxyz$, cho ba vector $\vec{a}(2;-5;3)$, $\vec{b}(0;2;-1)$, $\vec{c}(1;7;2)$. Tọa độ vector $\vec{d}=\vec{a}-4\vec{b}+2\vec{c}$ là $(-3;5;7)$

Câu 12: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho các vector $\overrightarrow{AB}=(3;-2;5)$ và $\overrightarrow{AC}=(1;4;-1)$. Độ dài trung tuyến AM của tam giác ABC là $AM=3$
- b) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;-3;2)$. Tọa độ điểm A' đối xứng với A qua mặt phẳng (Oyz) là $A'(-1;-3;2)$
- c) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;3;-1)$, $B(3;-1;5)$. Tọa độ của điểm M thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{MA}=3\overrightarrow{MB}$ là $M\left(\frac{7}{3};\frac{1}{3};-3\right)$
- d) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;1)$, $B(0;3;-1)$ và điểm C nằm trên mặt phẳng (Oxy) sao cho ba điểm A, B, C thẳng hàng. Điểm C có tọa độ là $(1;2;1)$

Câu 13: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tập hợp các điểm có tọa độ $(x;y;z)$ sao cho $-1 \leq x \leq 3, -1 \leq y \leq 3, -1 \leq z \leq 3$ là tập các điểm của một khối đa diện (lồi) có một tâm đối xứng. Tọa độ của tâm đối xứng đó là $(1;1;1)$
- b) Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(1;2;-3)$ lên mặt phẳng (Oyz) có tọa độ là $(-1;2;-3)$

- c) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba vector $\vec{a}(5;7;2)$, $\vec{b}(3;0;4)$, $\vec{c}(-6;1;-1)$.
Tọa độ của vector $\vec{m} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$ là $\vec{m}(3;22;-3)$
- d) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;0)$, $B(-1;3;5)$. Gọi $I(a;b;c)$ là điểm thỏa mãn $\vec{IA} + 3\vec{IB} = \vec{0}$. Khi đó, giá trị của biểu thức $a + 2b + 2c$ bằng 50

Câu 14: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, hình chiếu của điểm $M(1;-3;-5)$ trên mặt phẳng (Oyz) có tọa độ là $(0;-3;0)$
- b) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $\vec{AB} = (-3;0;4)$, $\vec{AC} = (5;-2;4)$. Độ dài đường trung tuyến AM là $3\sqrt{2}$
- c) Trong không gian, cho hai điểm $A(-2;2;-1)$, $B(0;-1;-2)$. Tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho ba điểm A, B, M thẳng hàng là $M(-4;5;0)$
- d) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các vector $\vec{a} = (1;2;1)$, $\vec{b} = (-2;3;4)$, $\vec{c} = (0;1;2)$ và $\vec{d} = (4;2;0)$. Biết rằng $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$. Giá trị $x + y + z$ là 1

Câu 15: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(5;-6;2)$ lên mặt phẳng (Oxz) có tọa độ là $(5;0;2)$
- b) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-1;2)$ và $B(3;1;0)$. Tọa độ trung điểm I của đoạn AB là $I(2;0;1)$
- c) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, điểm thuộc trục Oy và cách đều hai điểm $A(3;4;1)$ và $B(1;2;1)$ là $M(0;5;0)$
- d) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3)$, $B(-2;-4;9)$. Điểm M thuộc đoạn thẳng AB sao cho $MA = 2MB$. Độ dài đoạn thẳng OM là $\sqrt{17}$

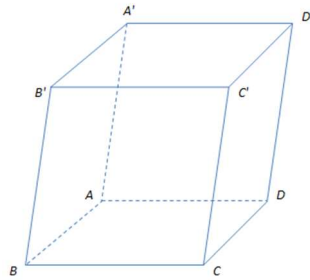
Câu 16: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Trong không gian $Oxyz$ cho $A(x;y;-3)$; $B(6;-2;4)$; $C(-3;7;-5)$. Giá trị của x, y để A, B, C thẳng hàng là $x = 1$; $y = -5$.
- b) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, điểm thuộc trục Ox và cách đều hai điểm $A(4;2;-1)$ và $B(2;1;0)$ là $M(4;0;0)$

- c) Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(1;2;-3)$ lên mặt phẳng (Oyz) có tọa độ là $(0;2;-3)$
- d) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(0;-1;1)$, $B(-2;1;-1)$, $C(-1;3;2)$. Biết rằng $ABCD$ là hình bình hành, khi đó tọa độ điểm D là $D(-1;-3;-2)$.

Câu 17: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $((S):x^2+y^2+(z+2)^2=17)$ cắt trục Oz tại hai điểm A, B . Độ dài đoạn AB bằng $2\sqrt{17}$
- b) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(3;1;0), B(1;5;2)$. Gọi A' là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (Oxy) , B' là hình chiếu vuông góc của B lên mặt phẳng (Oyz) . Khi đó $A'B'$ bằng $2\sqrt{6}$.
- c) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm A, B, C có tọa độ thỏa mãn $\overrightarrow{OA} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\overrightarrow{OB} = 5\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\overrightarrow{BC} = 2\vec{i} + 8\vec{j} + 3\vec{k}$. Tọa độ điểm D để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành là $D(3;9;4)$
- d) Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;1)$, $B'(1;0;0)$, $C'(1;1;0)$ (tham khảo hình vẽ bên dưới). Tọa độ của điểm D là $D(0;1;1)$



Câu 18: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Cho tam giác ABC biết $A(2;-1;3)$ và trọng tâm G của tam giác có tọa độ là $G(2;1;0)$. Khi đó $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ có tọa độ là $(0;6;-9)$
- b) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;0;2)$, $B(-2;1;3)$, $C(3;2;4)$, $D(6;9;-5)$. Tọa độ trọng tâm của tứ diện $ABCD$ là $(2;3;1)$
- c) Cho ba điểm $A(1;0;-2)$, $B(2;1;-1)$, $C(1;-2;2)$ và điểm E là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCE$ thì tọa độ của E là $(0;-1;3)$
- d) Cho tam giác ABC có $A(1;1;1)$, $B(-1;2;3)$ và $C(3;2;1)$. Gọi M là điểm thuộc đường thẳng BC sao cho $\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{BC}$. Để $BMDA$ là hình bình hành thì tọa độ D là $D(5;-1;-1)$

Câu 19: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCE$ với $A(3;1;2), B(1;0;1), C(2;3;0)$. Tọa độ đỉnh E là $E(4;4;1)$.
- b) Cho 3 điểm $M(2;0;0), N(0;-3;0), P(0;0;4)$. Nếu $MNPQ$ là hình bình hành thì tọa độ của điểm Q là $(2;3;4)$
- c) Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $G(1;-2;3)$ và ba điểm $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$. Biết G là trọng tâm của tam giác ABC thì $a+b+c$ bằng 6
- d) Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$ với $A(1;2;3), B(5;0;-1), C(4;3;6)$ và $D(a;b;c)$. Giá trị của $a+b+c$ bằng 15

Câu 20: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;0), B(-1;3;5)$. Gọi $I(a;b;c)$ là điểm thỏa mãn $\vec{IA} + 3\vec{IB} = \vec{0}$. Khi đó, giá trị của biểu thức $a+2b+2c$ bằng $\frac{25}{2}$
- b) Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(3;-4;3)$. Tổng khoảng cách từ A đến ba trục tọa độ bằng $\frac{\sqrt{34}}{2}$
- c) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, để hai vec tơ $\vec{a} = (m;2;3)$ và $\vec{b} = (1;n;2)$ cùng phương thì $2m+3n$ bằng 9
- d) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(0;-2;-5), B(3;4;4), C(x;y+1;1)$ thẳng hàng. Khi đó $3x-y$ bằng 5

Câu 21: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(6;-3;4), B(a;b;c)$. Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của đường thẳng AB với các mặt phẳng tọa độ $(Oxy), (Oxz)$ và (Oyz) . Biết rằng M, N, P nằm trên đoạn AB sao cho $AM = MN = NP = PB$. Giá trị của tổng $a+b+c$ là -11
- b) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 4 điểm $A(2;4;-1), B(1;4;-1), C(2;4;3), D(2;2;-1)$, biết $M(x;y;z)$ để $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $x+y+z$ bằng $\frac{21}{4}$
- c) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1), B(2;-1;3), C(-4;7;5)$. Tọa độ chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC là $\left(\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; \frac{1}{3}\right)$
- d) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;-2;2), B(-5;6;4)$ và $C(0;1;-2)$. Độ dài đường phân giác trong của góc A của ΔABC là $\frac{2\sqrt{64}}{3}$

Câu 22: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

• HỌ VÀ TÊN HS:

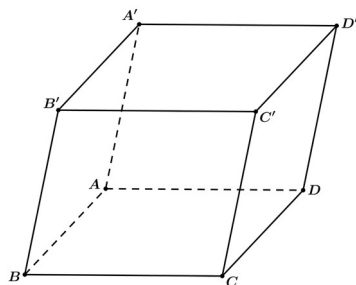
- a) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-4;7;5)$. Gọi $D(a;b;c)$ là chân đường phân giác trong của góc B của tam giác ABC . Giá trị $a+b+2c$ bằng 5
- b) Trong không gian $Oxyz$, cho hình thang $ABCD$ có AB song song với CD . Biết $A(1;2;1)$, $B(2;0;-1)$, $C(6;1;0)$ và diện tích hình thang $ABCD$ bằng $6\sqrt{2}$. Gọi $D(a;b;c)$, khi đó biểu thức $T = a - 2b + 4c$ là $T = 3$
- c) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(3;1;0)$, B nằm trên mặt phẳng (Oxy) và có hoành độ dương, C nằm trên trục Oz và $H(2;1;1)$ là trực tâm của tam giác ABC . Tọa độ các điểm B , C thỏa mãn yêu cầu bài toán là $B(3;1;0)$, $C(0;0;-3)$
- d) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-4;7;5)$. Tọa độ chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC là $\left(\frac{11}{3}; -2; 1\right)$

Câu 23: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Trong không gian với hệ trục $Oxyz$ cho ba điểm $A(2;1;3)$, $B(1;-2;2)$, $C(x;y;5)$ thẳng hàng. Khi đó $x+y$ bằng $x+y=11$
- b) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2;0;-1)$, $B(0;3;-2)$, $C(-4;-5;0)$. Tọa độ điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ là $M\left(-\frac{5}{3}; -\frac{3}{2}; -\frac{5}{6}\right)$
- c) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(1;1;1)$, $N(2;3;4)$, $P(7;7;5)$. Để tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành thì tọa độ điểm Q là $(6;5;2)$
- d) Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ biết $A(1;0;1)$, $B(2;1;2)$, $D(1;-1;1)$, $C'(4;5;-5)$. Tọa độ của đỉnh A' là $A' = (3;4;-1)$

Câu 24: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;1)$, $B'(1;0;0)$, $C'(1;1;0)$ (tham khảo hình vẽ bên dưới). Tọa độ của điểm D là $D(0;1;1)$



- b) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;0)$, $B(3;0;0)$, $D(0;3;0)$, $D'(0;3;-3)$. Tọa độ trọng tâm tam giác $A'B'C$ là $(2;1;-2)$

- c) Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ biết $A(1;0;1)$, $B(2;1;2)$, $D(1;-1;1)$, $C'(4;5;-5)$. Tọa độ của điểm A' là $A'(-3;4;-1)$
- d) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u} = (m;-2;1)$ và $\vec{v} = (3;n;-2)$, với m và n là hai số thực. Để vectơ $\vec{u}$ cùng phương với $\vec{v}$ thì biểu thức $T = 2m + n$ có giá trị bằng 4

Câu 25: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$. Điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) thỏa mãn độ dài AM nhỏ nhất. Tọa độ của điểm M là $(2; 3; 0)$.
- b) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;-2;4)$. Khoảng cách từ điểm M đến trục Ox bằng $2\sqrt{3}$
- c) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ biết $A(2;-1;2)$, $B'(1;2;1)$, $C(-2;3;2)$, $D'(3;0;1)$. Tọa độ điểm B là $B(-1;2;2)$
- d) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-4;7;5)$. Tọa độ chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC là $\left(\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; \frac{1}{3}\right)$

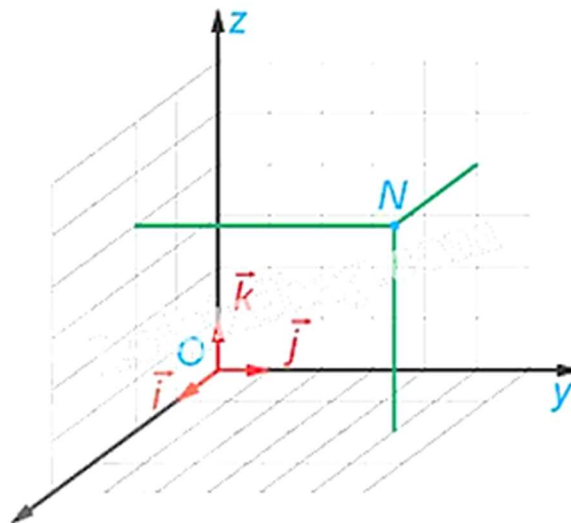
♦ **Dạng 3: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn**

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, hãy xác định tọa độ của vectơ $\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$.

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(-4; 3; -1)$ và $N(2; -1; -3)$.

Tìm tọa độ của các vectơ $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$.

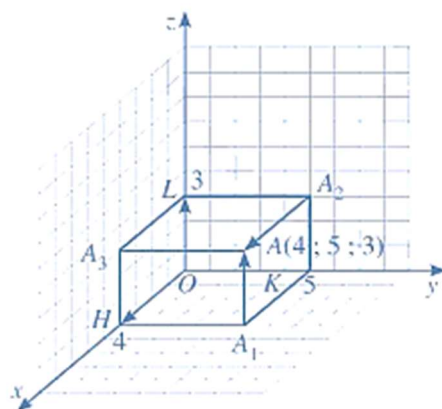
Câu 3: Tìm tọa độ của điểm N trong Hình 2.39.



Hình 2.39

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, xác định tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ trong mỗi trường hợp sau:

• HỌ VÀ TÊN HS:

a) $A(0; 0; 0)$ và $B(4; 2; -5)$;b) $A(1; -3; 7)$ và $B(1; -3; 7)$;c) $A(5; 4; 9)$ và $B(-5; 7; 2)$.**Câu 5:** Tìm tọa độ của các vectơ $\overrightarrow{A_1A}$, $\overrightarrow{A_2A}$ ở Hình 30.

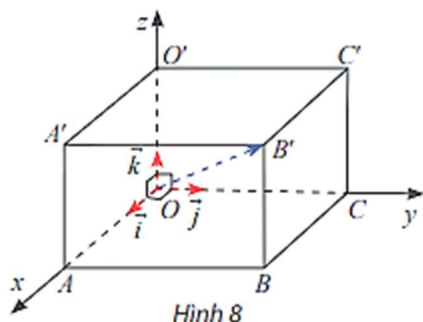
Hình 30

Câu 6: Trong không gian Oxyz, xác định tọa độ của điểm A trong mỗi trường hợp sau:

a) A trùng với gốc tọa độ;

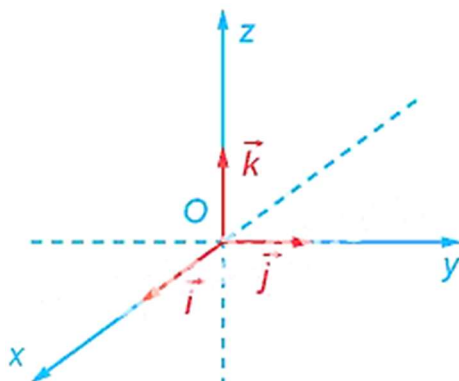
b) A nằm trên tia Ox và $OA = 2$;c) A nằm trên tia đối của tia Oy và $OA = 3$.**Câu 7:** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $A(1; 2; -3)$ và vectơ $\vec{u} = (3; -4; 2)$.Hãy biểu diễn theo các vectơ $\vec{i}, \vec{j}$ và $\vec{k}$ mỗi vectơ sau:a) $\overrightarrow{OA}$;b) $\vec{u}$.**Câu 8:** Trong không gian Oxyz, cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đều khác $\vec{0}$ và có giá đôi một vuông góc. Những mệnh đề nào sau đây là đúng?a) Có thể lập được một hệ tọa độ Oxyz có các trục tọa độ lần lượt song song với giá của các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.b) Có thể lập được một hệ tọa độ Oxyz có các trục tọa độ lần lượt trùng với giá của các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.c) Có thể lập được một hệ tọa độ Oxyz có các vectơ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt bằng các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.d) Có thể lập được một hệ tọa độ Oxyz có các vectơ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt cùng phương các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Câu 9: Cho hình hộp chữ nhật $OABC \cdot O'A'B'C'$ có cạnh $OA = 4, OC = 6, OO' = 3$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc tọa độ O ; các điểm A, C, O' lần lượt nằm trên các tia Ox, Oy, Oz . Xác định tọa độ các điểm A, B, B' .



Hình 8

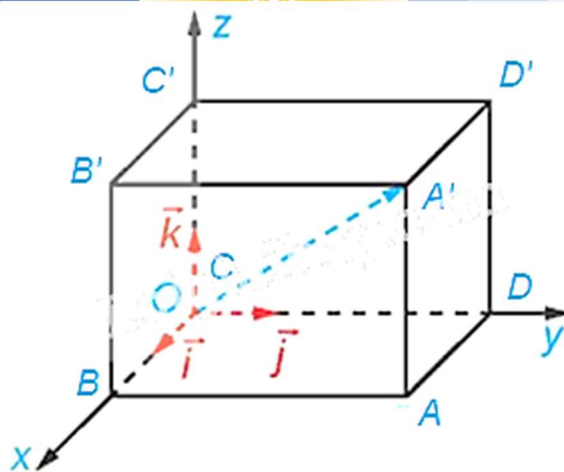
Câu 10: Trong không gian, xét ba trục Ox, Oy, Oz có chung gốc O và đôi một vuông góc với nhau. Gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vectơ đơn vị trên các trục đó (H.2.35).



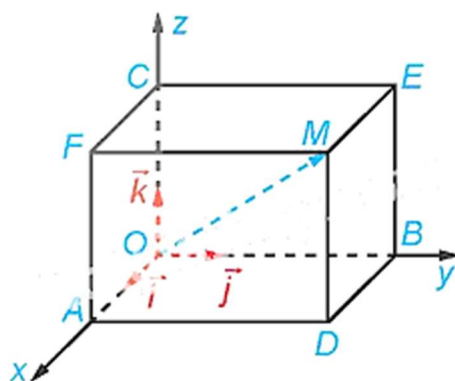
Hình 2.35

- Gọi tên các mặt phẳng tọa độ có trong Hình 2.35.
- Các mặt phẳng tọa độ trong Hình 2.35 có đôi một vuông góc với nhau không?

Câu 11: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Có thể lập một hệ tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với đỉnh C và các vectơ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt cùng hướng với các vectơ $\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CC'}$ không? Vì sao?



Câu 12: Trong không gian Oxyz, cho một điểm M không thuộc các mặt phẳng tọa độ. Vẽ hình hộp chữ nhật OADB.CFME có ba đỉnh A, B, C lần lượt thuộc các tia Ox, Oy, Oz (H.2.37).

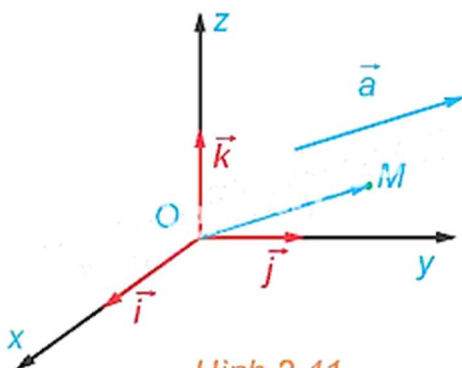


Hình 2.37

a) Hai vectơ $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ có bằng nhau hay không?

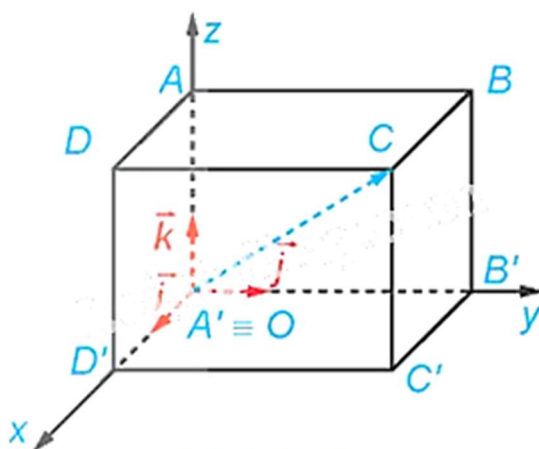
b) Giải thích vì sao có thể viết $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ với x, y, z là các số thực.

Câu 13: Trong không gian Oxyz, cho vectơ $\vec{a}$ tùy ý (H.2.41). Lấy điểm M sao cho $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$ và giải thích vì sao có bộ ba số $(x; y; z)$ sao cho $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.



Hình 2.41

Câu 14: Trong Ví dụ 3, hãy xác định tọa độ của các điểm B, D và C'.

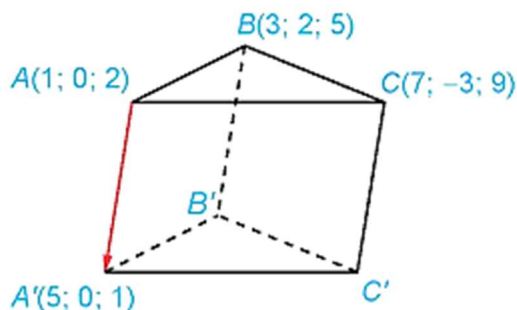


Hình 2.40

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $A(1; 0; 2)$, $B(3; 2; 5)$, $C(7; -3; 9)$ và $A'(5; 0; 1)$.

a) Tìm tọa độ của $\overrightarrow{AA'}$.

b) Tìm tọa độ của các điểm B', C' .



Hình 2.42

Câu 16: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình bình hành có ba đỉnh $A(1; 1; -2)$, $B(4; 3; 1)$ và $C(-1; -2; 2)$.

a) Tìm tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$.

b) Tìm tọa độ của điểm D .

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm không thẳng hàng

$$A(2; -1; 4), B(3; 5; -1), C(-1; 1; 2).$$

a) Tìm tọa độ của $\overrightarrow{AB}$.

b) Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

Câu 18: Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \frac{3}{4}\vec{k}$ và vectơ $\vec{v} = \left(3; -\frac{5}{4}; 2\right)$.

a) Tìm tọa độ của $\vec{u}$.

b) Biểu diễn $\vec{v}$ theo các vectơ đơn vị $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

c) Tìm tọa độ của $\vec{a} = 2\vec{u} +$

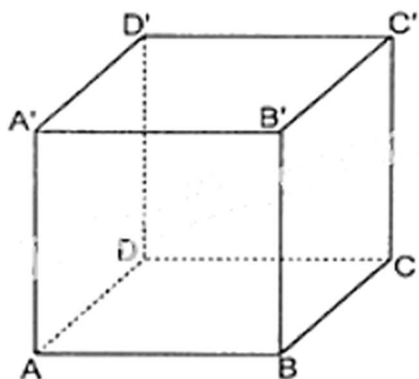
$$\frac{1}{3}\vec{v}.$$

Câu 19: Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $M(x; y; z)$ và $N(x'; y'; z')$.

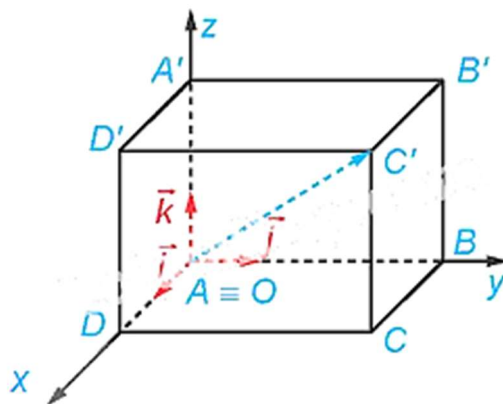
a) Hãy biểu diễn hai vector $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{ON}$ qua các vector $\vec{i}, \vec{j}$ và $\vec{k}$

b) Xác định tọa độ của vector $\overrightarrow{MN}$.

Câu 20: Trong Ví dụ 5, xác định tọa độ của các điểm D và D' sao cho $ABCD \cdot A'B'C'D'$ là hình hộp.



Câu 21: Trong không gian Oxyz, cho hình hộp chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có đỉnh A trùng với gốc O và các đỉnh D, B, A' có tọa độ lần lượt là $(2; 0; 0), (0; 4; 0), (0; 0; 3)$ (H.2.45). Xác định tọa độ của các đỉnh còn lại của hình hộp chữ nhật.



Hình 2.45

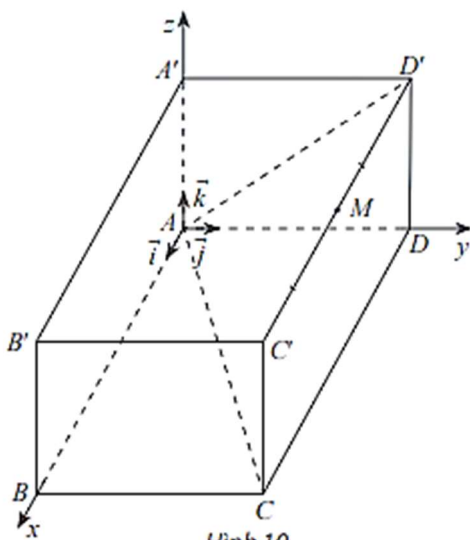
Câu 22: Trong không gian Oxyz, cho hình hộp $OABC \cdot O'A'B'C'$ có

$$A(1; 1; -1), B(0; 3; 0), C'(2; -3; 6).$$

a) Xác định tọa độ của điểm C .

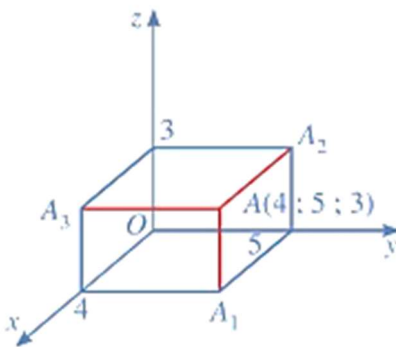
b) Xác định các tọa độ đỉnh còn lại của hình hộp.

Câu 23: Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có đỉnh A trùng với gốc O , các vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}$ theo thứ tự cùng hướng với $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ và có $AB = 8, AD = 6, AA' = 4$. Tìm tọa độ các vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC'}$ và $\overrightarrow{AM}$ với M là trung điểm của cạnh $C'D'$.



Hình 10

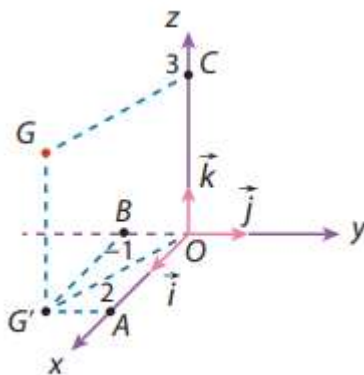
Câu 24: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(4; 5; 3)$. Gọi A_1, A_2, A_3 lần lượt là hình chiếu của điểm A trên các mặt phẳng tọa độ $(Oxy), (Oyz), (Ozx)$ (Hình 25). Tìm tọa độ của các điểm A_1, A_2, A_3 .



Hình 25

Câu 25: Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $OB CD \cdot O' B' C' D'$ có $B(2; 0; 0), D(0; 1; 0), O'(0; 0; 1)$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại.

Câu 26: Trong không gian $Oxyz$, xác định vị trí điểm $G(2; -1; 3)$.



Hình 2.35

► BÀI 3. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTOR

A. Tóm tắt kiến thức

1. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA PHÉP CỘNG HAI VECTOR, PHÉP TRỪ HAI VECTOR, PHÉP NHÂN MỘT SỐ VỚI MỘT VECTOR

✎ Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a} = (x; y; z)$ và $\vec{b} = (x'; y'; z')$. Ta có:

- ✓ $\vec{a} + \vec{b} = (x + x'; y + y'; z + z')$;
- ✓ $\vec{a} - \vec{b} = (x - x'; y - y'; z - z')$;
- ✓ $k\vec{a} = (kx; ky; kz)$ với k là một số thực.

✎ Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm không thẳng hàng $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$ và $C(x_C; y_C; z_C)$. Khi đó:

- ✓ Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB là $\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$;
- ✓ Tọa độ trọng tâm của tam giác ABC là $\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$.

2. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA TÍCH VÔ HƯỚNG

✎ Trong không gian $Oxyz$, tích vô hướng của hai vector $\vec{a} = (x; y; z)$ và $\vec{b} = (x'; y'; z')$ được xác định bởi công thức:

✓ $\vec{a} \cdot \vec{b} = xx' + yy' + zz'$

✎ **Chú ý:** Nếu $A(x_A; y_A; z_A)$ và $B(x_B; y_B; z_B)$

thì $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

Đặc biệt, khi B trùng O ta nhận được công thức $OA = \sqrt{x_A^2 + y_A^2 + z_A^2}$.

B. Phân dạng toán cơ bản

♦ **Dạng 1:** Biểu thức tọa độ của tổng, hiệu hai vector, tích của một số với một vector

☞ **Các ví dụ minh họa**

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a} = (2; 1; 5)$ và $\vec{b} = (2; 2; 1)$. Tìm tọa độ của mỗi vector sau:

a) $\vec{a} - \vec{b}$; b) $3\vec{a} + 2\vec{b}$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho ba vector $\vec{p} = (3; -2; 1)$, $\vec{q} = (6; -4; 2)$, $\vec{r} = (2; 1; -3)$.

a) Tìm tọa độ của vector $\vec{c} = 2\vec{p} - 3\vec{q} + \vec{r}$.

b) Tìm hai vector cùng phương trong các vector đã cho.

Câu 3: Cho $\vec{a} = (-2; 3; 2)$, $\vec{b} = (2; 1; -1)$, $\vec{c} = (1; 2; 3)$. Tính tọa độ của mỗi vector sau:

a) $3\vec{a}$; b) $2\vec{a} - \vec{b}$; c) $\vec{a} + 2\vec{b} - \frac{3}{2}\vec{c}$.

♦ **Dạng 2:** Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng, tọa độ trọng tâm của tam giác

☞ **Các ví dụ minh họa**

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; 3)$, $B(3; 2; 1)$ và $C(2; -1; 5)$. Tìm tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB và tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

Câu 2: Cho tam giác ABC có $A(-2; 1; 0)$, $B(0; 2; 5)$, $C(5; 0; 2)$. Tìm tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB và trọng tâm G của tam giác ABC .

Câu 3: Cho tam giác ABC có $A(1; -1; 1)$, $B(0; 1; 2)$, $C(1; 0; 1)$. Tìm tọa độ:

- a) Trung điểm M của AB ; b) Trọng tâm G của tam giác ABC .

♦Dạng ③: Biểu thức tọa độ của tích vô hướng

📖 Các ví dụ minh họa

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a} = (1; 4; 2)$ và $\vec{b} = (-4; 1; 0)$.

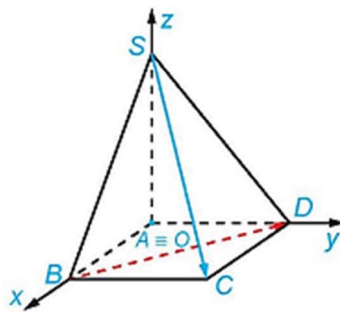
- a) Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}$ và cho biết hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có vuông góc với nhau hay không.

- b) Tính độ dài của vector $\vec{a}$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Giả sử $SA = 2$, $AB = 3$, $AD = 4$. Xét hệ tọa độ $Oxyz$ với O trùng A và các tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với các tia AB, AD, AS (H. 2.48).

- a) Xác định tọa độ của các điểm S, A, B, C, D .

- b) Tính BD và SC . c) Tính $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{SC})$.



Hình 2.48

Câu 3: Cho ba vector $\vec{a} = (3; 0; 1)$, $\vec{b} = (1; -1; -2)$, $\vec{c} = (2; 1; -1)$.

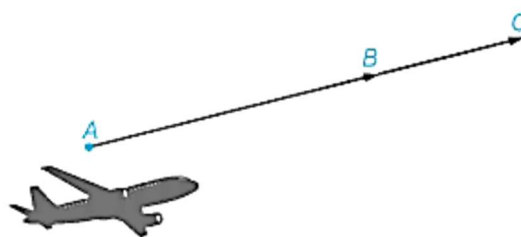
- a) Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{b} \cdot \vec{c}$. b) Tính $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

- c) Cho $\vec{d} = (1; 7; -3)$. Chứng minh $\vec{d} \perp \vec{a}$.

♦ Dạng 4: Ứng dụng thực tế

👉 Các ví dụ minh họa

Câu 1: Trong không gian với một hệ trục tọa độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilômét), ra đa phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(800; 500; 7)$ đến điểm $B(940; 550; 8)$ trong 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo là gì?

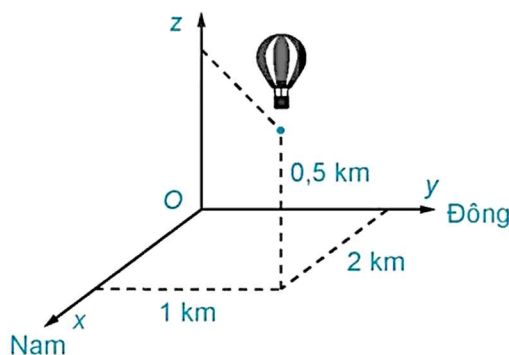


Hình 2.49

Câu 2: Hai chiếc kHinh khí cầu bay lên từ cùng một địa điểm. Chiếc thứ nhất nằm cách điểm xuất phát 2 km về phía nam và 1 km về phía đông, đồng thời cách mặt đất 0,5 km. Chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 1 km về phía bắc và 1,5 km về phía tây, đồng thời cách mặt đất 0,8 km.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai kHinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất với trục Ox hướng về phía nam, trục Oy hướng về phía đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời (H.2.50), đơn vị đo lấy theo kilômét.

- Tìm tọa độ của mỗi chiếc kHinh khí cầu đối với hệ tọa độ đã chọn.
- Xác định khoảng cách giữa hai kHinh khí cầu (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).



(H.2.50)

Câu 3: Trong Ví dụ 2, kHinh khí cầu thứ nhất hay thứ hai ở xa điểm xuất phát hơn? Giải thích vì sao.

©. Dạng toán rèn luyện

♦ Dạng 1: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; -2; 3)$ và $B(-1; 2; 5)$. Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB .

- A. $I(-2; 2; 1)$. B. $I(1; 0; 4)$. C. $I(2; 0; 8)$. D. $I(2; -2; -1)$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; -1)$ và $B(2; 3; 2)$. Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

- A. $(1; 2; 3)$. B. $(-1; -2; 3)$. C. $(3; 5; 1)$. D. $(3; 4; 1)$.

Câu 3: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho véc-tơ $\overrightarrow{AO} = 3(\vec{i} + 4\vec{j}) - 2\vec{k} + 5\vec{j}$. Tọa độ của điểm A là

- A. $(3; 17; -2)$. B. $(-3; -17; 2)$. C. $(3; -2; 5)$. D. $(3; 5; -2)$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(-1; 2; -2)$ trên trục Oz là điểm

- A. $H(0; 0; -1)$. B. $E(-1; 2; 0)$. C. $F(0; 0; -2)$. D. $G(0; 0; 2)$.

Câu 5: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(1; 2; 4)$, $B(3; 4; 2)$. Tìm tọa độ điểm M , biết B là trung điểm của AM .

- A. $M(-1; 0; 6)$. B. $M(2; 2; -2)$. C. $M(2; 3; 3)$. D. $M(5; 6; 0)$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, điểm nào sau đây thuộc trục Oz ?

- A. $M(0; 0; -2)$. B. $M(1; 2; 0)$. C. $M(1; 0; 2)$. D. $M(1; 0; 0)$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(-1; 0; 1)$ và $B(1; -1; 2)$ tọa độ véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ là

- A. $(2; -1; 1)$. B. $(0; -1; -1)$. C. $(-2; 1; -1)$. D. $(0; -1; 3)$

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 0)$, $B(-1; 0; -2)$. Tìm tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB .

- A. $M(-1; -1; -1)$. B. $M(0; 1; -1)$. C. $M(0; 2; -2)$. D. $M(-2; -2; -2)$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1; 2; 0)$, $B(-1; 0; 1)$, $C(0; 2; -1)$. Tính độ dài của vector $\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.

- A. $\sqrt{21}$. B. 21. C. $\sqrt{13}$. D. 13.

Câu 10: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; -1; 1)$, $B(3; 2; -2)$, $C(-3; 1; 5)$. Tìm

tọa độ điểm $M(x; y; z)$ thỏa mãn $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{CM}$. Khi đó tổng $S = \frac{9}{x} + \frac{3}{y} - \frac{27}{z}$ bằng

- A. 6. B. -15. C. 16. D. -13.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, điểm đối xứng của $A(1; 2; 3)$ qua mặt phẳng (Oyz) là điểm nào dưới đây

A. $Q(-1;2;3)$.

B. $N(1;-2;3)$.

C. $P(1;2;-3)$.

D. $M(1;-2;-3)$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, điểm đối xứng với điểm $M(4;-5;3)$ qua trục Oz có tọa độ là

A. $(4;-5;-3)$.

B. $(-4;5;3)$.

C. $(-4;5;-3)$.

D. $(0;0;3)$.

Câu 13: Trong không gian cho $Oxyz$ vector $\overrightarrow{OM} = \vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$. Gọi M' là hình chiếu vuông góc của M trên mặt phẳng (Oxy) . Khi đó tọa độ của điểm M' trong hệ tọa độ $Oxyz$ là

A. $(1;-3;4)$.

B. $(1;4;-3)$.

C. $(0;0;4)$.

D. $(1;-3;0)$.

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;2;5)$, $B(3;-6;3)$. Hình chiếu vuông góc của trung điểm I của đoạn AB trên mặt phẳng (Oyz) là điểm nào dưới đây?

A. $P(3;0;0)$.

B. $N(3;-1;5)$.

C. $M(0;-2;4)$.

D. $Q(0;0;5)$.

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(1;2;-3)$ lên mặt phẳng (Oyz) có tọa độ là

A. $(-1;2;-3)$.

B. $(0;2;-3)$.

C. $(1;0;0)$.

D. $(1;-2;3)$.

Câu 16: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có trọng tâm $G(-3;1;4)$ và $A(1;0;-1)$, $B(2;3;5)$. Tọa độ điểm C là

A. $C(-6;2;0)$.

B. $C(4;2;-1)$.

C. $C(-12;0;8)$.

D. $C(3;-1;-5)$.

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3)$, $B(-2;-4;9)$. Điểm M thuộc đoạn thẳng AB sao cho $MA = 2MB$. Độ dài đoạn thẳng OM là:

A. 5.

B. 3.

C. $\sqrt{17}$.

D. $\sqrt{54}$.

Câu 18: Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(5;-6;2)$ lên mặt phẳng (Oxz) có tọa độ là

A. $(0;-6;0)$.

B. $(5;0;2)$.

C. $(5;-6;0)$.

D. $(0;-6;2)$.

Câu 19: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;3)$, $B(2;-3;4)$. Tìm điểm $M \in (Oxy)$ sao cho ba điểm A, B, M thẳng hàng

A. $M(1;1;0)$.

B. $M(3;-5;7)$.

C. $M(-3;5;0)$.

D. $M(-2;1;0)$.

Câu 20: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(3;1;4)$ và $N(0;2;-1)$. Tọa độ trọng tâm của tam giác OMN là

A. $(-3;1;-5)$.

B. $(-1;-1;-1)$.

C. $(3;3;3)$.

D. $(1;1;1)$.

Câu 21: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(1;2;4)$, $B(2;4;-1)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác OAB .

A. $G(6;3;3)$.

B. $G(2;1;1)$.

C. $G(2;1;1)$.

D. $G(1;2;1)$.

Câu 22: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;0;2)$, $B(-2;1;3)$, $C(3;2;4)$, $D(6;9;-5)$. Hãy tìm tọa độ trọng tâm của tứ diện $ABCD$?

A. $(2;3;-1)$.

B. $(2;-3;1)$.

C. $(2;3;1)$.

D. $(-2;3;1)$.

- Câu 23:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;-2)$, $B(2;1;-1)$, $C(1;-2;2)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .
- A. $G(4;-1;-1)$. B. $G\left(-\frac{4}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$. C. $G\left(\frac{4}{3};-\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$. D. $G\left(\frac{1}{3};-\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$.
- Câu 24:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;3)$, $B(2;3;-4)$, $C(-3;1;2)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.
- A. $D(-2;4;-5)$. B. $D(4;2;9)$. C. $D(6;2;-3)$. D. $D(-4;-2;9)$.
- Câu 25:** Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC biết $A(2;1;-4)$, $B(5;-3;3)$, $C(-1;-1;10)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .
- A. $G(2;1-3)$. B. $G(2;-1;3)$. C. $G(2;-1-3)$. D. $G(-2;-1;3)$.
- Câu 26:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(1;3;4)$, $B(1;0;-2)$ và $C(4;0;1)$. Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là
- A. $G(3;0;2)$. B. $G(2;1;1)$. C. $G(1;1;3)$. D. $G(3;0;-1)$.
- Câu 27:** Cho tam giác ABC , biết $A(1;-2;4)$, $B(0;2;5)$, $C(5;6;3)$. Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là
- A. $G(6;3;3)$. B. $G(4;2;2)$. C. $G(3;3;6)$. D. $G(2;2;4)$.
- Câu 28:** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-4;1;-5)$, $B(2;-4;7)$, $C(3;-2;9)$. Tọa độ điểm D để $ABCD$ là hình bình hành là
- A. $(2;3;-3)$. B. $(-3;-3;3)$. C. $(-6;5;-12)$. D. $(-3;3;-3)$.
- Câu 29:** Cho hai điểm $M(1;-2;3)$ và $N(3;0;-1)$. Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng MN .
- A. $I(4;-2;2)$. B. $I(2;-1;2)$. C. $I(4;-2;1)$ D. $I(2;-1;1)$
- Câu 30:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;2)$ và $D(2;2;2)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Tọa độ trung điểm I của MN là:
- A. $I(1;-1;2)$. B. $I(1;1;0)$. C. $I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};1\right)$. D. $I(1;1;1)$.
- Câu 31:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $M(2;3;-1)$, $N(-1;1;1)$ và $P(1;m-1;2)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N .
- A. $m = -6$. B. $m = 0$. C. $m = -4$. D. $m = 2$.
- Câu 32:** Cho tam giác ABC có $A(1;1;1)$, $B(-1;2;3)$ và $C(3;2;1)$. Gọi M là điểm thuộc đường thẳng BC sao cho $\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{BC}$. Để $BMDA$ là hình bình hành thì tọa độ D là
- A. $D(5;1;1)$. B. $D(5;1;-1)$. C. $D(5;-1;-1)$. D. $D(-5;1;-1)$.
- Câu 33:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(-1;2;4)$, $B(3;0;-2)$ và $C(1;3;7)$. Gọi D chân đường phân giác trong hạ từ A . Tính OD
- A. $\frac{\sqrt{207}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{205}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{201}}{3}$. D. $\frac{\sqrt{203}}{3}$.

- Câu 34:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCE$ với $A(3;1;2), B(1;0;1), C(2;3;0)$. Tọa độ đỉnh E là
A. $E(4;4;1)$. **B.** $E(0;2;-1)$. **C.** $E(1;3;-1)$. **D.** $E(1;1;2)$.
- Câu 35:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;-2;3)$, $B(-1;0;2)$ và $G(1;-3;2)$ là trọng tâm của tam giác ABC . Tìm tọa độ điểm C .
A. $C(3;-7;1)$. **B.** $C(2;-4;-1)$. **C.** $C(1;-1;-3)$. **D.** $C(3;2;1)$.
- Câu 36:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-4;7;5)$. Tọa độ chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC là
A. $\left(\frac{11}{3}; -2; 1\right)$. **B.** $(-2; 11; 1)$. **C.** $\left(\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; \frac{1}{3}\right)$. **D.** $\left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; 1\right)$.
- Câu 37:** Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a} = (1; 2; -2)$. Tính độ dài vectơ $\vec{a}$.
A. $|\vec{a}| = 2\sqrt{2}$. **B.** $|\vec{a}| = 8$. **C.** $|\vec{a}| = 3$. **D.** $|\vec{a}| = 9$.
- Câu 38:** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-4; 3; 12)$. Độ dài đoạn thẳng OA bằng
A. 13. **B.** 11. **C.** 17. **D.** 6.
- Câu 39:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 0; 1)$ và $B(4; 2; -2)$. Độ dài đoạn thẳng AB bằng
A. 2. **B.** 4. **C.** $\sqrt{22}$. **D.** 22.
- Câu 40:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0; 6; 0)$, $B(0; 0; 8)$. Độ dài đoạn thẳng AB bằng
A. 100. **B.** 10. **C.** 48. **D.** 6.
- Câu 41:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 3; 4)$ và $B(3; 0; 1)$. Độ dài vectơ $\overline{AB}$ là
A. $\sqrt{19}$. **B.** 19. **C.** $\sqrt{13}$. **D.** 13.
- Câu 42:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là các vectơ đơn vị trên các trục Oy, Oz . Tích vô hướng $\vec{j} \cdot \vec{k}$ bằng
A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.
- Câu 43:** Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (-3; 1; 2)$ và $\vec{b} = (0; -4; 5)$. Giá trị của $\vec{a} \cdot \vec{b}$ bằng
A. 10. **B.** -14. **C.** 6. **D.** 3.
- Câu 44:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u} = (-\sqrt{3}; 0; 1)$, $\vec{v} = (0; 1; 1)$, khi đó
A. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 - \sqrt{3}$. **B.** $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 - \sqrt{3}$. **C.** $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. **D.** $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$.
- Câu 45:** Trong không gian $Oxyz$, gọi φ là góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, với $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$, khi đó $\cos \varphi$ bằng
A. $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$. **B.** $\frac{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}{\vec{a} \cdot \vec{b}}$. **C.** $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| + |\vec{b}|}$. **D.** $\frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

Câu 46: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (-1; 1; 0)$, $\vec{b} = (1; 1; 0)$, $\vec{c} = (1; 1; 1)$.

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- A. $|\vec{a}| = \sqrt{2}$. B. $\vec{a} \perp \vec{b}$. C. $|\vec{c}| = \sqrt{3}$. D. $\vec{b} \perp \vec{c}$.

Câu 47: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(3; -4; 0)$, $B(-1; 1; 3)$, $C(3; 1; 0)$. Tìm tọa độ điểm D trên trục hoành sao cho $AD = BC$.

- A. $D(-2; 1; 0)$, $D(-4; 0; 0)$ B. $D(0; 0; 0)$, $D(-6; 0; 0)$
C. $D(6; 0; 0)$, $D(12; 0; 0)$ D. $D(0; 0; 0)$, $D(6; 0; 0)$

Câu 48: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2; 2; 1)$. Tính độ dài đoạn thẳng OA .

- A. $OA = 3$ B. $OA = 9$ C. $OA = \sqrt{5}$ D. $OA = 5$

Câu 49: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u} = (2; -1; 1)$, $\vec{v} = (-3; 4; -5)$. Số đo của góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ bằng:

- A. 150° . B. 120° . C. 60° . D. 30° .

Câu 50: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai vectơ $\vec{a} = (m; 3; 4)$; $\vec{b} = (4; m; -7)$. Với giá trị nào của m thì $\vec{a}$ vuông góc với $\vec{b}$?

- A. 1. B. 3. C. 4. D. 2.

♦ **Dạng 2: Câu trắc nghiệm đúng, sai**

Câu 1: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u} = \vec{i}\sqrt{3} + \vec{k}$, $\vec{v} = \vec{j}\sqrt{3} + \vec{k}$. Khi đó tích vô hướng của $\vec{u}, \vec{v}$ bằng 2
- b) Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{j}$, $\vec{k}$ lần lượt là các vectơ đơn vị trên các trục Oy , Oz . Tích vô hướng $\vec{j}, \vec{k}$ bằng 3
- c) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -1; -3)$ và $B(-2; 1; -1)$. Độ dài đoạn thẳng AB bằng $\sqrt{17}$
- d) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (2; -3; 1)$ và $\vec{b} = (-1; 4; -2)$. Giá trị của biểu thức $\vec{a}, \vec{b}$ bằng -16

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (-1; 1; 0)$, $\vec{b} = (1; 1; 0)$, $\vec{c} = (1; 1; 1)$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) $|\vec{a}| = \sqrt{2}$

b) $\vec{a} \perp \vec{b}$

c) $|\vec{c}| = \sqrt{3}$

d) $\vec{b} \perp \vec{c}$

Câu 3: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a} = (2; 4; -2)$ và $\vec{b} = (1; -2; 3)$. Tích vô hướng của hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng -22

b) Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho vector $\vec{u} = (3; 0; 1)$, $\vec{v} = (2; 1; 0)$. Tích vô hướng $\vec{u} \cdot \vec{v}$ bằng 6

c) Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{u}_1(1; 1; -4)$, $\vec{u}_2(0; 1; 1)$. Góc giữa hai vector đã cho bằng 60°

d) Trong không gian $Oxyz$, cho các vector $\vec{a} = (1; 3; 3)$, $\vec{b} = (-2; 2; 1)$ và $\vec{c} = (-1; 2; 3)$. Tích vô hướng $\vec{c} \cdot (\vec{a} - \vec{b})$ bằng 5

Câu 4: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho $\vec{a} = (1; -2; 3)$ và $\vec{b} = (2; -1; -1)$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $[\vec{a}, \vec{b}] = (-5; -7; -3)$

b) Vector $\vec{a}$ không cùng phương với vector $\vec{b}$.

c) Vector $\vec{a}$ không vuông góc với vector $\vec{b}$.

d) $|\vec{a}| = \sqrt{14}$

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba vector $\vec{a} = (-1; 1; 0)$, $\vec{b} = (1; 1; 0)$, $\vec{c} = (1; 1; 1)$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $|\vec{a}| = \sqrt{2}$

b) $\vec{a} \perp \vec{b}$

c) $|\vec{c}| = \sqrt{3}$

d) $\vec{b} \perp \vec{c}$

Câu 6: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$, $A(1; 0; -2)$ và $B(2; -1; 1)$. Tích vô hướng $\vec{a} \cdot \overrightarrow{AB}$ bằng 17
- b) Cho hai vec tơ $\vec{a} = (1; -2; 3)$, $\vec{b} = (-2; 1; 2)$ Khi đó tích vô hướng $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b}$ bằng 10
- c) Trong không gian $Oxyz$, góc giữa hai vector $\vec{i}$ và $\vec{u} = (-\sqrt{3}; 0; 1)$ là 60°
- d) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -1; 2)$ và $B(2; 1; 1)$. Độ dài đoạn AB bằng $\sqrt{6}$

Câu 7: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vector $\vec{u} = (x; 2; 1)$ và $\vec{v} = (1; -1; 2x)$. Tích vô hướng của $\vec{u}$ và $\vec{v}$ bằng $3x - 2$
- b) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2; 7; 3)$ và $B(4; 1; 5)$. độ dài của đoạn AB bằng $2\sqrt{19}$
- c) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2; 2; 1)$. Độ dài đoạn thẳng OA bằng 3
- d) Trong không gian $Oxyz$, cho các vector $\vec{a} = (-2; 1; 2)$, $\vec{b} = (1; -1; 0)$. Tích vô hướng $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{b}$ bằng 12

Câu 8: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A(2; 1; -3)$, $B(0; -2; 5)$ và $C(1; 1; 3)$. Diện tích hình bình hành $ABCD$ là $\sqrt{349}$
- b) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vecto $\vec{a} = (1; 0; -2)$ và $\vec{b} = (2; -1; 3)$. Tích có hướng của hai vecto $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một vecto có tọa độ là $(2; -7; 1)$
- c) Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a}(2; 3; 1)$, $\vec{b}(-2; 1; 2)$. Khi đó $[\vec{a}, \vec{b}]$ có tọa độ bằng $(2; 0; 1)$

d) Trong không gian $Oxyz$, tọa độ một vectơ $\vec{n}$ vuông góc với cả hai vectơ

$$\vec{a} = (1; 1; -2), \vec{b} = (1; 0; 3) \text{ là } (2; -3; -1)$$

Câu 9: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $[\vec{u}, \vec{v}] = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}$ cùng phương.

b) Nếu $\vec{u}, \vec{v}$ không cùng phương thì giá của vectơ $[\vec{u}, \vec{v}]$ vuông góc với mọi mặt phẳng song song với giá của các vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$.

c) $||[\vec{u}, \vec{v}]|| = ||\vec{u}|| ||\vec{v}|| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}).$

d) $[\vec{u}, \vec{v}] \cdot \vec{u} = [\vec{u}, \vec{v}] \cdot \vec{v} = \vec{0}.$

Câu 10: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (1; 2; -1), \vec{b} = (3; -1; 0), \vec{c} = (1; -5; 2)$

. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $\vec{a}$ cùng phương với $\vec{b}$.

b) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng.

c) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.

d) $\vec{a}$ vuông góc với $\vec{b}$.

Câu 11: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(2; 1; -2), N(4; -5; 1)$. Độ dài đoạn thẳng MN bằng 7

b) Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u} = (1; 0; 3)$ và $\vec{v} = (x; -1; 1)$. Nếu $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$ thì độ dài của $|\vec{v}|$ bằng $\sqrt{2}$.

c) Cho $\vec{u} = (-1; 1; 0), \vec{v} = (0; -1; 0)$, góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là 60°

d) Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a} = (1; 3; 2)$ và $\vec{b} = (2; 1; 1)$. Tích vô hướng $\vec{a} \cdot (2\vec{a} - \vec{b})$ là 31

Câu 12: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a} = (-2; -3; 1)$ và $\vec{b} = (1; 0; 1)$. Côsin góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng $\frac{1}{2\sqrt{7}}$
- b) Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{u} = (2; -1; 5)$ và $\vec{v} = (1; -3; -2)$. Tích vô hướng $\vec{u} \cdot (\vec{u} - \vec{v})$ bằng 41
- c) Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a} = (1; 0; 1)$ và $\vec{b} = (1; 2; 1)$. Tích vô hướng $\vec{a} \cdot (2\vec{a} + \vec{b})$ bằng 6
- d) Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u} = (1; -2; 1)$ và $\vec{v} = (-2; 1; 1)$, góc giữa hai vectơ đã cho bằng 120°

Câu 13: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a} = (2; 0; -1)$ và $\vec{b} = (1; -1; 0)$. Tích vô hướng $\vec{a} \cdot (\vec{b} + 2\vec{a})$ bằng 7
- b) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (2; 1; -2)$ và $\vec{b} = (0; -\sqrt{2}; \sqrt{2})$. Tất cả giá trị của m để hai vectơ $\vec{u} = 2\vec{a} + 3m\vec{b}$ và $\vec{v} = m\vec{a} - \vec{b}$ vuông góc là $\frac{\pm\sqrt{26} + \sqrt{2}}{6}$
- c) Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u} = (2; -1; 1)$, $\vec{v} = (-3; 4; -5)$. Số đo của góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ bằng 120°
- d) Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a} = (1; 0; 0)$ và $\vec{b} = (2; 0; 1)$. Tích vô hướng $\vec{a} \cdot (\vec{a} + 2\vec{b})$ bằng 5

Câu 14: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a} = (1; 3; 3)$ và $\vec{b} = (-2; 2; 1)$. Tích vô hướng $\vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b})$ bằng 12
- b) Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a} = (-2; 1; 2)$, $\vec{b} = (1; -1; 0)$. Tích vô hướng $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{b}$ bằng 12

c) Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a} = (1; -2; -1)$ và $\vec{b} = (2; 1; -1)$. Giá trị của $\cos(\vec{a}, \vec{b})$ là $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $A(3; 1; -1), B(2; 2; -2)$. Nếu M là điểm nằm trên đoạn AB sao cho $AB = 2MB$ thì độ dài OM bằng 3

Câu 15: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ tạo với nhau một góc 120° , đồng thời $|\vec{a}| = 2$ và $|\vec{b}| = 5$. Đặt $\vec{u} = k\vec{a} - \vec{b}$ và $\vec{v} = \vec{a} + 2\vec{b}$. Để $\vec{u} \perp \vec{v}$ thì giá trị của k là $k = \frac{9}{2}$

b) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $\overrightarrow{AB} = (1; -2; 2); \overrightarrow{AC} = (3; -4; 6)$. Độ dài đường trung tuyến AM của tam giác ABC là $\frac{\sqrt{29}}{2}$

c) Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1; -2; 3), B(0; 3; 1), C(4; 2; 2)$. Cosin của góc $\widehat{BAC}$ bằng $\frac{9}{\sqrt{35}}$

d) Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a} = (1; 0; 1)$ và $\vec{b} = (1; 2; 1)$. Tính vô hướng $\vec{a} \cdot (2\vec{a} + \vec{b})$ là 6

Câu 16: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1; 0; 1), B(2; 1; 2), D(1; -1; 1)$ và $A'(1; 1; -1)$. Giá trị của $\cos(\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{B'D'})$ bằng $-\frac{\sqrt{2}}{3}$

b) Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}(-2; 2; 0), \vec{b}(2; 2; 0), \vec{c}(2; 2; 2)$. Giá trị của $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$ bằng 11

c) Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (2; 1; 0), \vec{b} = (-1; 0; -2)$. Khi đó $\cos(\vec{a}, \vec{b})$ bằng $\frac{2}{5}$

d) Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a} = (1; 1; 3), \vec{b} = (-2; 1; 5)$ và $\vec{c} = (1; -3; 2)$. Tính tích vô hướng $\vec{a} \cdot (\vec{b} - 2\vec{c})$ bằng 6

Câu 17: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(2;0;0)$, $B(0;3;1)$, $C(-3;6;4)$. Gọi M là điểm trên cạnh BC sao cho $MC = 2MB$. Độ dài đoạn AM bằng $\sqrt{30}$
- b) Cho hai vectơ $\vec{a} = (1;1;-2)$ và $\vec{b} = (1;0;m)$. Góc giữa chúng bằng 45° khi $m = 2 - \sqrt{6}$
- c) Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 3$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$. Độ dài của vectơ $3\vec{a} - 2\vec{b}$ bằng 22
- d) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $B(-1;-1;0)$ và $C(3;1;-1)$. Tọa độ điểm M thuộc trục Oy và M cách đều B, C là $M\left(0; \frac{9}{2}; 0\right)$

Câu 18: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Gọi φ là góc giữa hai vectơ $\vec{a} = (1;2;0)$ và $\vec{b} = (2;0;-1)$, khi đó $\cos \varphi$ bằng $\frac{2}{5}$.
- b) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;0)$ và $B(-3;0;4)$. Độ dài đoạn thẳng AB bằng 6
- c) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(-1;2;4)$, $B(-1;1;4)$, $C(0;0;4)$. Số đo của góc $\widehat{ABC}$ là 45°
- d) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;2;1)$. độ dài đoạn thẳng OA bằng 5

Câu 19: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho tứ diện $ABCD$ với $A(0;0;1)$, $B(0;1;0)$, $C(1;0;0)$ và $D(-2;3;-1)$. Thể tích khối tứ diện $ABCD$ bằng $\frac{1}{6}$
- b) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm có tọa độ $A(1;0;1)$, $B(2;2;1)$, $C(1;3;-1)$ Gọi M là điểm nằm trên tia Oy sao cho thể tích tứ diện $ABCM$ bằng $\frac{1}{2}$. Tung độ của điểm M là 1

- c) Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;-2); B(3;1;0); C(2;2;1)$. Tam giác ABC có diện tích bằng $2\sqrt{6}$
- d) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 4 điểm tạo thành tứ giác lồi $A(2;0;-1), B(-2;1;-3), C(1;2;2), D(0;-1;-5)$. Diện tích của tứ giác này có giá trị bằng $\frac{13\sqrt{6}}{2}$

Câu 20: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(-1;-2;4), B(-4;-2;0), C(3;-2;1)$ và $D(1;1;1)$. Độ cao của tứ diện kẻ từ D bằng 3
- b) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho năm điểm tạo thành một hình chóp có đáy là tứ giác với $A(0;0;3), B(2;-1;0), C(3;2;4), D(1;3;5), E(4;2;1)$. Đỉnh của hình chóp tương ứng là Điểm C
- c) Trong không gian $Oxyz$ cho hai vectơ $\vec{a} = (4, -2, -4), \vec{b} = (6, -3, 2)$. Giá trị của biểu thức $\left| (2\vec{a} - 3\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b}) \right|$ bằng 200
- d) Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a} = (1; 0; 3)$ và $\vec{b} = (-2; 2; 5)$. Tích vô hướng $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$ bằng 23

Câu 21: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}, |\vec{b}| = 3$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$. Độ dài của vectơ $3\vec{a} - 2\vec{b}$ bằng 6
- b) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$, biết $A(2;3;1), B(4;1;-2), C(6;3;7), D(-5;-4;-8)$. Độ dài đường cao DH của tứ diện $ABCD$ bằng $\frac{45}{7}$
- c) Trong không gian $Oxyz$, Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có A trùng với gốc tọa độ O . Biết rằng $B(m;0;0), D(0;m;0), A'(0;0;n)$ với m, n là các số dương và $m+n=4$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC' . Thể tích lớn nhất của khối tứ diện $BDA'M$ bằng $\frac{64}{27}$

d) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tọa độ các đỉnh

$$A(0;0;0), B(0;a;0), C\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};0\right) \text{ và } A'(0;0;2a). \text{ Gọi } D \text{ là trung điểm cạnh } BB' \text{ và } M$$

di động trên cạnh AA' . Diện tích nhỏ nhất của tam giác MDC' là $\frac{a^2\sqrt{6}}{4}$

Câu 22: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Trong không gian $Oxyz$ cho tứ diện $ABCD$ có $A(2;1;-1), B(3;0;1), C(2;-1;3), D(0;m;0)$. Tổng tất các các giá trị của tham số m để thể tích khối tứ diện $ABCD$ bằng 5 là 3

b) Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(2;1;1), B(5;3;6), C(-1;2;3)$. Diện tích tam giác ABC là $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{523}$.

c) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-1;2)$ và $B(2;1;1)$. Độ dài đoạn AB bằng $\sqrt{6}$

d) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{u} = (1;1;2), \vec{v} = (-1;m;m-2)$. Khi $[\vec{u}, \vec{v}] = \sqrt{14}$ thì $m = 2$ hoặc $m = -3$

Câu 23: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho $\vec{a}(3;2;1), \vec{b}(3;2;5)$. Tọa độ vector tích có hướng $[\vec{a}, \vec{b}]$ là $(8;-12;0)$

b) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A(2;1;-3), B(0;-2;5)$ và $C(1;1;3)$. Diện tích hình bình hành $ABCD$ là $\sqrt{359}$

c) Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(2;1;0), B(0;4;0), C(0;2;-1)$. Biết đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (ABC) và cắt đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{3}$ tại điểm $D(a;b;c)$ thỏa mãn $a > 0$ và tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng $\frac{17}{6}$. Tổng $a+b+c$ bằng 5

d) Trong không gian $Oxyz$, cho các vector $\vec{a} = (-5; 3; -1), \vec{b} = (1; 2; 1), \vec{c} = (m; 3; -1)$. Tìm tất cả giá trị của m sao cho $\vec{a} = [\vec{b}, \vec{c}]$ là $m = 6$

Câu 24: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm có tọa độ là $A(1;2;0)$, $B(2;1;-1)$, $C(0;1;-1)$. Giá trị $\sin \widehat{ABC}$ bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- b) Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{m} = (4;3;1)$ và $\vec{n} = (0;0;1)$. Gọi $\vec{p}$ là vector cùng hướng với với $[\vec{m}, \vec{n}]$ và $|\vec{p}| = 15$. Tọa độ của vector $\vec{p}$ là $(9; -12; 0)$
- c) Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;-2)$, $B(3;1;0)$, $C(2;2;1)$. Tam giác ABC có diện tích bằng $\sqrt{7}$
- d) Trong không gian $Oxyz$ cho hai vector $\vec{a} = (4, -2, -4)$, $\vec{b} = (6; -3; 2)$. Giá trị của biểu thức $\left| (2\vec{a} - 3\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b}) \right|$ bằng 204

Câu 25: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 2 vector $\vec{u} = m\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{v} = m\vec{j} + 2\vec{i} + 4\vec{k}$. Biết rằng $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8$, khi đó giá trị của m bằng 5
- b) Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{u} = (1; -2; 1)$ và $\vec{v} = (-2; 1; 1)$, góc giữa hai vector đã cho bằng 60°
- c) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $A(0;0;0)$, $B(2;0;0)$, $C(0;2;0)$ và $A'(0;0;2)$. Góc giữa BC' và $A'C$ là 90°
- d) Trong không gian $Oxyz$, gọi φ là góc giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$, với $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$, khi đó $\cos \varphi$ bằng $\frac{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}{\vec{a} \cdot \vec{b}}$

♦ Dạng ③: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho ba vector $\vec{u} = (1; 8; 6)$, $\vec{v} = (-1; 3; -2)$ và $\vec{w} = (0; 5; 4)$. Tìm tọa độ của vecto $\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}$

Câu 2: Cho $\vec{a} = (2; -1; 5)$, $\vec{b} = (0; 3; -3)$, $\vec{c} = (1; 4; -2)$. Tìm tọa độ của vector $\vec{d} = 2\vec{a} - \frac{1}{5}\vec{b} + 3\vec{c}$.

Câu 3: Nếu tọa độ của vector $\vec{a}$ là $(x; y; z)$ thì tọa độ của vector đối của $\vec{a}$ là gì?

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; 1; -2)$ và $\vec{b} = (-2; 3; -2)$.

- a) Tìm $\vec{a} \cdot \vec{b}$. b) Tìm $(\vec{a}, \vec{b})$.

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vector $\vec{u} = (1; -2; 3)$ và $\vec{v} = (2; 0; -3)$. Hãy chỉ ra tọa độ của một vector $\vec{w}$ khác $\vec{0}$ vuông góc với cả hai vector $\vec{u}$ và $\vec{v}$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; 9; -1)$, $B(9; 4; 5)$ và $G(3; 0; 4)$. Tìm tọa độ điểm C sao cho tam giác ABC nhận G là trọng tâm.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác MNP có $M(3; 7; 2)$, $N(5; 1; -1)$ và $P(4; -4; -2)$.

Tìm tọa độ:

- a) Trung điểm / của đoạn thẳng MN ; b) Trọng tâm G của tam giác MNP .

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a} = (1; 0; 5)$ và $\vec{b} = (1; 3; 9)$.

- a) Biểu diễn hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ qua các vector đơn vị $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$
b) Biểu diễn hai vector $\vec{a} + \vec{b}$ và $2\vec{a}$ qua các vector đơn vị $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, từ đó xác định tọa độ của hai vector đó.

Câu 9: Với các giả thiết như trong Ví dụ 5, hãy xác định tọa độ của các chiếc máy bay sau 10 phút tiếp theo (tính từ thời điểm máy bay ở điểm B).

Câu 10: Cho ba điểm $A(2; 0; 2)$, $B(1; 2; 3)$, $C(2; 1; 2)$.

- a) Tìm tọa độ của các vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$. b) Tính các độ dài AB, BC, CA .

Câu 11: Trong Vật lí, ta biết rằng nếu lực $\vec{F}$ tác động vào một vật và làm vật dịch chuyển theo đoạn thẳng từ M đến N , thì công A sinh bởi lực $\vec{F}$ được tính bằng công thức $A = \vec{F} \cdot \overrightarrow{MN}$. Hãy giải quyết bài toán được đặt ra ở phần Khởi động.

Câu 12: Trong tình huống mở đầu, hãy tính độ lớn của góc α .

Câu 13: Trong không gian Oxyz, cho tam giác ABC có $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$ và $C(x_C; y_C; z_C)$.

- a) Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB. Tìm tọa độ của M theo tọa độ của A và B.
- b) Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Tìm tọa độ của G theo tọa độ của A và B và C.

Câu 14: Trong không gian Oxyz, cho bốn điểm $A(0; 1; -2)$, $B(2; -1; 3)$, $C(1; 3; -2)$, $D(5; -1; 8)$.

- a) Ba điểm A, B, C có thẳng hàng không?
- b) Chứng minh rằng hai đường thẳng AB và CD song song với nhau.

Câu 15: Cho tam giác ABC có $A(7; 3; 3)$, $B(1; 2; 4)$, $C(2; 3; 5)$.

- a) Tìm tọa độ điểm H là chân đường cao kẻ từ A của tam giác ABC.
- b) Tìm độ dài cạnh AB và AC.
- c) Tính góc A.

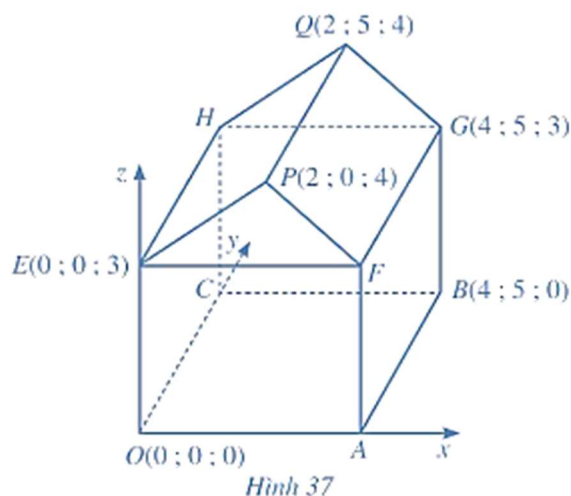
Câu 16: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho $A(1; 0; 0)$, $B(0; 0; 1)$ và $C(2; 1; 1)$.

- a) Chứng minh rằng A, B, C không thẳng hàng.
- b) Tính chu vi của tam giác ABC.
- c) Tính $\cos \widehat{ABC}$.

Câu 17: Hình 37 minh họa sơ đồ một ngôi nhà trong hệ trục tọa độ Oxyz, trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật.

- a) Tìm tọa độ của các điểm A, H và F.

b) Tính góc dốc của mái nhà, tức là tìm số đo của góc nhị diện có cạnh là đường thẳng FG , hai mặt lần lượt là $(FGQP)$ và $(FGHE)$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của độ).



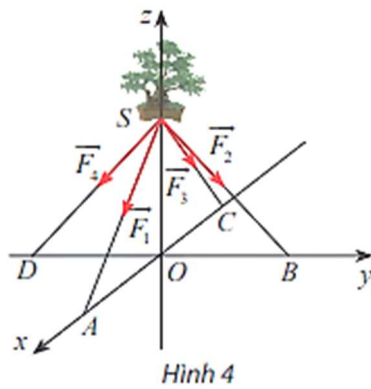
Câu 18: Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(1; 3; -2)$, $B(3; 2; -4)$, $C(2; 1; 0)$, $D(3; 5; -1)$.

a) Chứng minh rằng $AB \perp CD$.

b) Chứng minh rằng BCD là tam giác đều.

c) Tính số đo của $\widehat{AMD}$ với M là trung điểm của BC (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Câu 19: Một chậu cây được đặt trên một giá đỡ có bốn chân với điểm đặt $S(0; 0; 20)$ và các điểm chạm mặt đất của bốn chân lần lượt là $A(20; 0; 0)$, $B(0; 20; 0)$, $C(-20; 0; 0)$, $D(0; -20; 0)$ (đơn vị cm). Cho biết trọng lực tác dụng lên chậu cây có độ lớn 40 N và được phân bố thành bốn lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ có độ lớn bằng nhau như Hình 4. Tìm tọa độ của các lực nói trên (mỗi centimet biểu diễn 1 N).



◆ CHƯƠNG 3. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO MỨC ĐỘ PHÂN TÁN CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

▶ BÀI 1: KHOẢNG BIẾN THIÊN – KHOẢNG TỨ PHÂN VỊ

A. Tóm tắt kiến thức

1. KHOẢNG BIẾN THIÊN

✍ Khoảng biến thiên, kí hiệu R , của mẫu số liệu ghép nhóm là hiệu số giữa đầu mút phải của nhóm cuối cùng và đầu mút trái của nhóm đầu tiên có chứa dữ liệu của mẫu số liệu.

✍ **Chú ý:**

- ✓ Xét mẫu số liệu ghép nhóm được cho ở bảng sau:

Bảng 1

Nhóm	$[u_1; u_2)$	$[u_2; u_3)$	...	$[u_k; u_{k+1})$
Tần số	n_1	n_2	...	n_k

- ✓ Nếu n_1 và n_{k+1} cùng khác 0 thì $R = u_{k+1} - u_1$.
- ✓ Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm luôn lớn hơn hoặc bằng khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc.
- ✓ Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc và có thể dùng để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu.
- ✓ Khoảng biến thiên $R = u_{k+1} - u_1$ chưa phản ánh được đầy đủ mức độ phân tán của phần lớn các số liệu. Hơn nữa, giá trị của R thường tăng vọt khi xuất hiện giá trị ngoại lệ trong mẫu số liệu. Do đó, để phản ánh mức độ phân tán của số liệu, người ta còn dùng các số đặc trưng khác.

2. KHOẢNG TỨ PHÂN VỊ

- ✓ Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm cho ở Bảng 1, kí hiệu Δ_Q , là hiệu giữa tứ phân vị thứ ba Q_3 và tứ phân vị thứ nhất Q_1 của mẫu số liệu ghép nhóm đó, tức là: $\Delta_Q = Q_3 - Q_1$.
- ✓ Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu gốc và có thể dùng để đo mức độ phân tán của nửa giữa của mẫu số liệu (tập hợp gồm 50% số liệu nằm chính giữa mẫu số liệu).
- ✓ Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm càng nhỏ thì dữ liệu càng tập trung xung quanh trung vị.
- ✓ Khoảng tứ phân vị được dùng để xác định giá trị ngoại lệ trong mẫu số liệu. Giá trị x trong mẫu số liệu là giá trị ngoại lệ nếu $x > Q_3 + 1,5\Delta_Q$ hoặc $x < Q_1 - 1,5\Delta_Q$.
- ✓ Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm không bị ảnh hưởng nhiều bởi các giá trị ngoại lệ trong mẫu số liệu.

B. Phân dạng toán cơ bản

♦ Dạng 1: Khoảng biến thiên

Các ví dụ minh họa

Câu 1: Cô Hà thống kê lại đường kính thân gỗ của một số cây xoan đào 6 năm tuổi được trồng ở một lâm trường ở bảng sau.

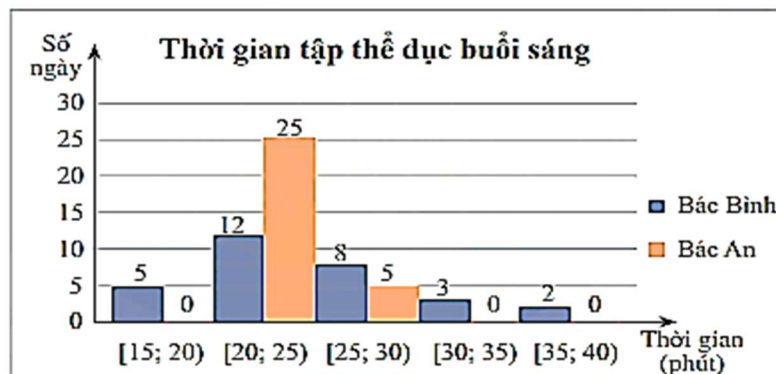
Đường kính (cm)	[40; 45)	[45; 50)	[50; 55)	[55; 60)	[60; 65)
Tần số	5	20	18	7	3

Hãy tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Câu 2: Sử dụng dữ liệu ở biểu đồ dưới đây, để chọn số thích hợp thay vào các vị trí được đánh dấu? ở bảng sau:

Biểu đồ dưới đây thống kê thời gian tập thể dục buổi sáng mỗi ngày trong tháng 9/2022 của bác Bình và bác An.

Ai là người có thời gian tập đều hơn?



Thời gian (phút)	[15; 20)	[20; 25)	[25; 30)	[30; 35)	[35; 40)
Bác Bình	?	12	8	3	2
Bác An	?	?	?	?	?

Hãy tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian tập thể dục buổi sáng mỗi ngày của bác Bình và bác An.

Câu 3: Thống kê thời gian sử dụng mạng xã hội trong ngày của các bạn Tổ 1, Tổ 2 lớp 12A, được kết quả như bảng sau:

Thời gian sử dụng (phút)	[0; 10)	[10; 30)	[30; 60)	[60; 90)
Số học sinh Tổ 1	2	4	3	1
Số học sinh Tổ 2	5	1	3	0

Tìm khoảng biến thiên cho thời gian sử dụng mạng xã hội của học sinh mỗi tổ và giải thích ý nghĩa.

♦Dạng ②: Khoảng tứ phân vị

👉Các ví dụ minh họa

Câu 4: Hãy tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trong Bảng sau thống kê cân nặng của 50 quả xoài Thanh Ca được lựa chọn ngẫu nhiên sau khi thu hoạch ở một nông trường.

Cân nặng (g)	[250; 290)	[290; 330)	[330; 370)	[370; 410)	[410; 450)
Số quả xoài	3	13	18	11	5

Câu 5: Hằng ngày ông Thắng đều đi xe buýt từ nhà đến cơ quan. Dưới đây là bảng thống kê thời gian của 100 lần ông Thắng đi xe buýt từ nhà đến cơ quan.

Thời gian (phút)	[15; 18)	[18; 21)	[21; 24)	[24; 27)	[27; 30)	[30; 33)
Số lượt	22	38	27	8	4	1

a) Hãy tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

b) Biết rằng trong 100 lần đi trên, chỉ có đúng một lần ông Thắng đi hết hơn 29 phút. Thời gian của lần đi đó có phải là giá trị ngoại lệ không?

Câu 6: Thời gian chờ khám bệnh của các bệnh nhân tại phòng khám X được cho trong bảng sau:

Thời gian (phút)	[0; 5)	[5; 10)	[10; 15)	[15; 20)
Số bệnh nhân	3	12	15	8

a) Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm này.

b) Từ một mẫu số liệu về thời gian chờ khám bệnh của các bệnh nhân tại phòng khám Y người ta tính được khoảng tứ phân vị bằng 9,23. Hỏi thời gian chờ của bệnh nhân tại phòng khám nào phân tán hơn?

♦Dạng 3: Ứng dụng

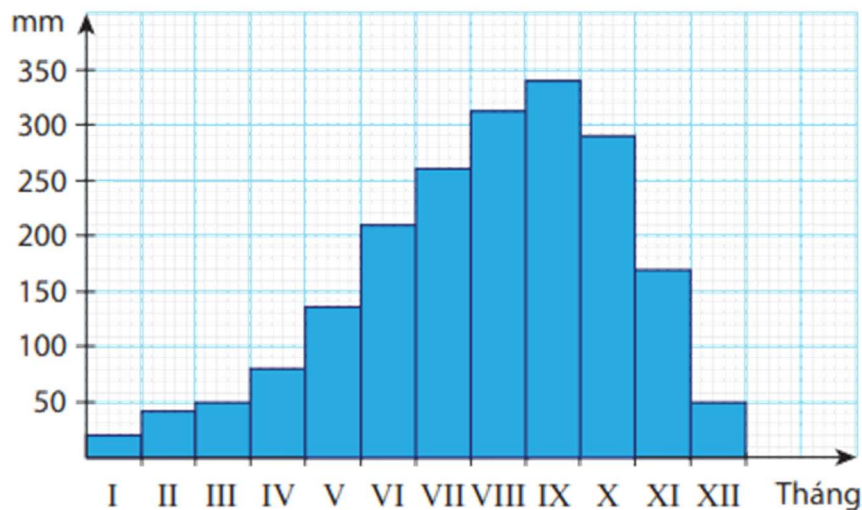
📖 Các ví dụ minh họa

Câu 7: Để chuẩn bị mở một trung tâm thể dục thể thao, anh Dũng đã tiến hành điều tra tuổi thọ của máy chạy bộ do hai hãng X, Y sản xuất. Bảng 3.5 biểu thị hai mẫu số liệu mà anh thu thập được qua Internet. Bảng 3.5. Tuổi thọ của máy chạy bộ (đơn vị: năm)

Tuổi thọ	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)	[10; 12)
Số máy của hãng X	7	20	36	20	17
Số máy của hãng Y	0	20	35	35	10

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu nào lớn hơn? Từ đó có thể nói là máy chạy bộ do hãng nào sản xuất có tuổi thọ phân tán hơn?

Câu 8: Hình 3.2 là biểu đồ biểu diễn lượng mưa trung bình của các tháng trong năm ở thành phố A.



Hình 3.2. Biểu đồ lượng mưa ở thành phố A

a) Lập bảng số liệu ghép nhóm về lượng mưa của thành phố A, với độ dài các nhóm là 50 và đầu mút phải của nhóm cuối cùng là 350.

b) Xác định khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị). Nêu ý nghĩa của kết quả tìm được.

©. Dạng toán rèn luyện

♦ Dạng 1: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1: Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

- A. Nếu các giá trị của mẫu càng tập trung quanh giá trị trung bình thì độ lệch chuẩn càng lớn.
- B. Khoảng biến thiên chỉ sử dụng thông tin của giá trị lớn nhất và bé nhất, bỏ qua thông tin của các giá trị còn lại.
- C. Khoảng tứ phân vị có sử dụng thông tin của giá trị lớn nhất và bé nhất.
- D. Các số đo độ phân tán có thể nhỏ hơn 0.

Câu 2: Phát biểu nào sau đây **sai**?

- A. Khoảng biến thiên đặc trưng cho độ phân tán của toàn bộ mẫu số liệu;
- B. Khoảng tứ phân vị đặc trưng cho độ phân tán của một nửa các số liệu, có giá trị thuộc đoạn từ Q_1 đến Q_3 trong mẫu;
- C. Khoảng tứ phân vị bị ảnh hưởng bởi các giá trị rất lớn hoặc rất bé trong mẫu;
- D. Khoảng tứ phân vị được dùng để xác định các giá trị ngoại lệ trong mẫu, đó là các giá trị quá nhỏ hay quá lớn so với đa số các giá trị trong mẫu.

Câu 3: Cho một mẫu dữ liệu đã được sắp xếp theo thứ tự không giảm $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_n$. Khi đó khoảng biến thiên R của mẫu số liệu bằng:

- A. $R = x_n - x_1$
- B. $R = x_1 - x_n$
- C. $R = \frac{x_n - x_1}{2}$
- D. $R = \frac{x_1 - x_n}{2}$

Câu 4: Một nhà nghiên cứu ghi lại tuổi của 30 bệnh nhân mắc bệnh đau mắt hột như sau:

21	17	22	18	20	17	15	13	15	20	15	12	18	17	25
17	21	15	12	18	16	23	14	18	19	13	16	19	18	17

Khoảng biến thiên R của mẫu số liệu trên là:

- A. 11
- B. 9
- C. 13
- D. 10.

Câu 5: Số học sinh giỏi của 30 lớp ở một trường Trung học phổ thông được ghi lại trong bảng sau:

0	2	1	0	0	3	0	0	1	1	0	1	6	6	0
1	5	2	4	5	1	0	1	2	4	0	3	3	1	0

Tìm khoảng tứ phân vị Δ_Q của mẫu số liệu trên.

- A. 0
- B. 1
- C. 2
- D. 3

Câu 6: Số điện năng tiêu thụ của 10 hộ ở một khu dân cư trong một tháng như sau:

165	85	65	65	70	50	45	100	45	100
-----	----	----	----	----	----	----	-----	----	-----

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu trên bằng:

- A. 48
- B. 50
- C. 52
- D. 54.

Câu 7: Nhiệt độ của 24 tỉnh thành ở Việt Nam (đơn vị: °C) vào một ngày của tháng 7 được cho trong bảng sau đây:

36	30	31	32	31	40	37	29	41	37	35	34
34	35	32	33	35	33	33	31	34	34	32	35

Khoảng biến thiên R của bảng số liệu trên là:

- A. $R = 11$ B. $R = 12$ C. $R = 13$ D. $R = 14$.

Câu 8: Xác định khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị cho mẫu số liệu sau: 50; 20; 10; 5; 3; 16; 8; 7; 20; 5; 10.

- A. $R = 47, \Delta_Q = 15$ B. $R = 15, \Delta_Q = 47$;
C. $R = 45, \Delta_Q = 10$ D. $R = 47, \Delta_Q = 10$.

Câu 9: Số cuộn phim mà 20 nhà nhiếp ảnh nghiệp dư sử dụng trong một tháng được cho trong bảng sau:

0	5	7	6	2	5	9	7	6	9
20	6	10	7	5	8	9	7	8	5

Giá trị ngoại lệ trong mẫu số liệu trên là:

- A. 0; 2 và 20 B. 0 và 20;
C. 20 D. 0.

Câu 10: Điều tra về số học sinh của một trường THPT như sau:

Khối lớp	10	11	12
Số học sinh	1120	1075	900

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên là.

- A. 220 B. 45 C. 175 D. 3095.

Câu 11: Năng suất lúa hè thu (tạ/ha) năm 1998 của 31 tỉnh thành ở Việt Nam được thống kê trong bảng sau:

Năng suất lúa (tạ/ha)	25	30	35	40	45
Tần số	4	7	9	6	5

Hãy tính khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên.

- A. 40 B. 20 C. 61 D. 1.

Câu 12: Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu sau: 200 240 220 210 225 235 225 270 250 280.

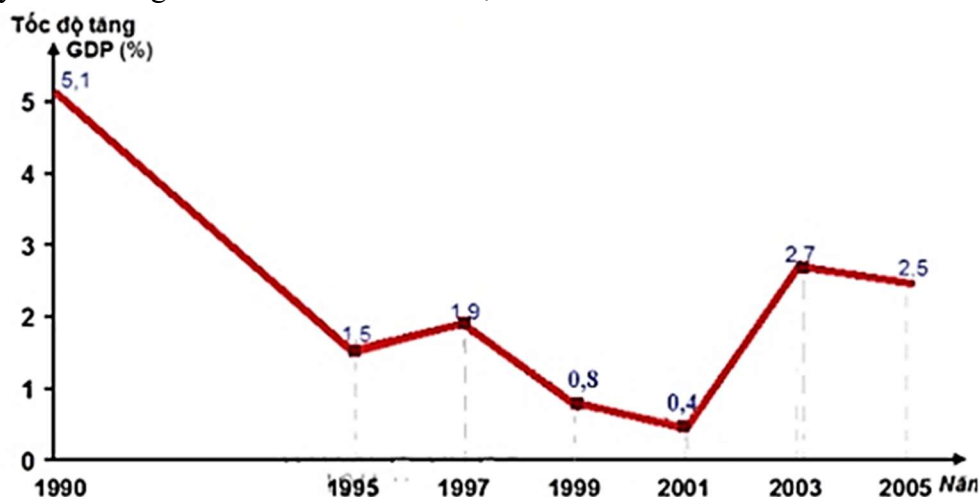
- A. 80 B. 20 C. 30 D. 10.

Câu 13: Tiến hành đo huyết áp của 8 người ta thu được kết quả sau: 77 105 117 84 96 72 105 124

Hãy tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu trên.

- A. 10 B. 20 C. 10,5 D. 30,5.

Câu 14: Biểu đồ sau biểu diễn tốc độ tăng trưởng GDP của Nhật Bản trong giai đoạn 1990 đến 2005. Hãy tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu đó.



- A. 5,1 B. 5,5 C. 0,4 D. 4,7.

Câu 15: Nhiệt độ trung bình hàng tháng trong một năm được ghi lại trong bảng sau:

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nhiệt độ	16	20	24	28	30	30	29	25	25	20	18	16

Tìm khoảng tứ phân vị của bảng số liệu trên.

- A. 19,5 B. 28,5 C. 24,5 D. 19.

♦ **Dạng 2: Câu trắc nghiệm đúng, sai**

Câu 1: Khoảng biến thiên tổng số giờ nắng trong năm của một tỉnh thành được thống kê từ năm 2011 đến 2024 được cho như sau:

1884	1600	1645	2049,9	1913,8	1664,1	1846,5
1964,8	1951	2023,6	1996,2	1699,1	1845	2190,4

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Số giờ nắng trung bình trong năm là: 1826,67 giờ.
 b) Số giờ nắng nhỏ nhất 1600 giờ
 c) Số giờ nắng lớn nhất là 2190,4 giờ.
 d) Vậy khoảng biến thiên là: 520,4.

Câu 2: Thống kê lượng mưa (mm) mỗi tháng trong năm giữa hai thành phố A và B ta được bảng số

liệu sau:

Tháng, điểm	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	22	28	42	97	181	242	258	297	225	125	57	19
B	54	46	52	45	62	57	54	51	57	59	59	55

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- Giá trị nhỏ nhất Thành phố A là 19
- Giá trị lớn nhất Thành phố B là 62
- Khoảng biến thiên Thành phố B là 16
- Lượng mưa của thành phố A ổn định hơn của thành phố B

Câu 3: Một cơ sở chăn nuôi gia cầm tiến hành nuôi thử nghiệm giống gà đẻ trứng mới. Khi gà đã cho trứng họ tiến hành khảo sát với 20 quả được cân nặng (gam) như sau:

40	42	36	38	40	42	29	48	43	43
41	41	39	44	45	41	40	39	42	41

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- Giá trị nhỏ nhất của mẫu là 29
- Giá trị lớn nhất của mẫu là 48
- Khoảng tứ phân vị: $\Delta_Q = 2$.
- Các giá trị bất thường là 29 và 48.

Câu 4: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- Chiều cao của 5 học sinh lớp 10 C đo được là: 153 160 162 162 165. Khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên là $R = 12$
- Sải cánh của 90 con chim Sẻ được thống kê và ghi lại trong bảng dưới đây:

Sải cánh	18	19	20	21	22	23	24
Số lượng	6	11	19	20	15	12	7

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu là: 6

- Số sản phẩm sản xuất mỗi ngày của một phân xưởng trong 7 ngày liên tiếp được ghi lại như sau:

22 21 24 28 27 32 21

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu này là: 11

d) Khoảng tứ phân vị Δ_Q là $Q_3 - Q_1$

Câu 5: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Khoảng biến thiên là hiệu số giữa hai giá trị bất kỳ của mẫu số liệu.
- b) Khoảng biến thiên là hiệu số giữa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của mẫu số liệu.
- c) Khoảng biến thiên là giá trị trung bình của mẫu số liệu.
- d) Khoảng biến thiên là hiệu số giữa hai tứ phân vị của mẫu số liệu.

Câu 6: Một mẫu số liệu không có giá trị nào bất thường, có tứ phân vị thứ ba là 64 và giá trị lớn nhất trong mẫu số liệu là 94. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) $Q_1 \leq 44$
- b) $Q_1 \geq 30$
- c) $Q_1 \leq 30$
- d) $Q_1 < 44$

Câu 7: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Mẫu số liệu dưới đây là kết quả thống kê size áo đồng phục của học sinh lớp 10A.

9, 7, 14, 12, 8, 10, 13

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên là $R = 14$

b) Cho mẫu số liệu về điểm thi thử môn Toán của 11 học sinh lớp 10A như sau:

5 6 8 5 8 9 10 8 7 9 10

Tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên

c) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 là: 8

d) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu 6; 7; 9; 5; 7; 5; 6; 6 là: 7

Câu 8: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Khoảng biến thiên đặc trưng cho độ phân tán của toàn bộ mẫu số liệu;
- b) Khoảng tứ phân vị đặc trưng cho độ phân tán của một nửa các số liệu, có giá trị thuộc đoạn từ Q_1 đến Q_3 trong mẫu;

c) Khoảng tứ phân vị bị ảnh hưởng bởi các giá trị rất lớn hoặc rất bé trong mẫu;

d) Khoảng tứ phân vị được dùng để xác định các giá trị ngoại lệ trong mẫu, đó là các giá trị quá nhỏ hay quá lớn so với đa số các giá trị trong mẫu.

Câu 9: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Điểm thi HK2 của một học sinh lớp 12 như sau:

9	9	7	8	9	7	10	8	8
---	---	---	---	---	---	----	---	---

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu là 0

b) Cho dãy số liệu thống kê: 2;3;4;5;6. Khoảng biến thiên là 4

c) Khoảng tứ phân vị của dãy số 2;3;4;5;6 là $\Delta_Q = 3$

d) Cho mẫu số liệu thống kê điểm kiểm tra môn Toán của 15 bạn lớp 12A như sau

8	8	9	7	5	6	8	9	8	2	4	10	2	1	5
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	---	---	---

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu bằng 6

Câu 10: Điểm trung bình môn học kì của hai bạn An và Bình được cho như bảng sau

	Toán	Vật lí	Hóa học	Ngữ văn	Lịch sử	Địa lí	Tin học	Tiếng Anh
An	9,2	8,7	9,5	6,8	8,0	8,0	7,3	6,5
Bình	8,2	8,1	8,0	7,8	8,3	7,9	7,6	8,1

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Điểm trung bình môn học kì của hai bạn đều là 8,0.

b) Khoảng biến thiên điểm của bạn An là $R_1 = 0,7$.

c) Khoảng biến thiên điểm của bạn Bình là $R_2 = 3$.

d) bạn An học đều hơn bạn Bình

Câu 11: Điểm kiểm tra học kì môn Toán của các bạn Tổ 1, Tổ 2 lớp 12B được cho như sau:

Tổ 1	7	8	8	9	8	8	8		
Tổ 2	10	6	8	9	9	7	8	7	8

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Điểm trung bình môn học kì của các bạn tổ 1 và tổ 2 đều là 7.

b) Đối với Tổ 1: điểm kiểm tra thấp nhất, cao nhất tương ứng là 7;9

c) Đối với Tổ 2: điểm kiểm tra thấp nhất, cao nhất tương ứng là 6;10.

d) Tổ 1 học đều hơn Tổ 2.

Câu 12: Mẫu số liệu sau ghi rõ chiều cao của 10 cầu thủ đăng ký khóa học của một học viện bóng đá (đơn vị: : cm) : 176 187 174 186 185 180 185 182 179 186.

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Tứ phân vị thứ nhất là: $Q_1 = 179$.

b) Tứ phân vị thứ hai là $Q_2 = 183,5$.

c) Khoảng biến thiên là: $R = 12$.

d) Khoảng tứ phân vị là: $\Delta Q = 8$.

Câu 13: Mẫu số liệu sau ghi rõ số tiền thưởng tết Nguyên Đán của 13 nhân viên của một công ty (đơn vị : triệu đồng): 10 10 11 12 12 13 14,5 15 18 20 20 21 28.

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Trung vị là 13,5;

b) Tứ phân vị thứ hai: $Q_2 = 13,5$.

c) Khoảng biến thiên là: $R = 18$.

d) Khoảng tứ phân vị là: $\Delta Q = 8,5$.

Câu 14: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Trong năm học 2021 – 2022, lớp 10A đạt được điểm số các đợt thi đua nề nếp như sau

Đợt 1	Đợt 2	Đợt 3	Đợt 4	Đợt 5
50	46	50	42	48

khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên là: 8

b) Mẫu số liệu cho biết chiều cao của các bạn học sinh trong tổ

164 159 170 166 163 168 170 158 162

Khoảng biến thiên R của mẫu số liệu là $R = 11$

c) Điều tra chiều cao của 7 em học sinh lớp 10A cho kết quả:

152;156;160;154;159;162;161. Khoảng biến thiên của dãy số là 10

d) Cho dãy số liệu thống kê

11 13 14 15 12 10 16

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu là 3

Câu 15: Mẫu số liệu sau là giá tiền (triệu đồng) của 8 loại rượu ngoại được nhập về tại một cửa hàng rượu:

1,2 1,35 1,42 1,53 1,8 1,84 1,96 2,4.

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Khoảng biến thiên của mẫu là: $R = 1,2$.

b) Khoảng tứ phân vị là: $\Delta Q = 0,215$.

c) $Q_1 - 1,5\Delta Q = 0,6125$

d) Mẫu số liệu không có giá trị nào là bất thường.

Câu 16: Điểm kiểm tra học kì môn toán của các bạn tổ 1 và tổ 2 lớp 10A được cho như sau:

Tổ 1: 7 8 8 8 9 8 8 8;

Tổ 2: 10 6 8 9 9 7 8 7 8.

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Điểm trung bình kiểm tra hai tổ có như nhau

b) Khoảng biến thiên tổ 1 là $R_1 = 3$.

c) Khoảng biến thiên tổ 2 là $R_2 = 4$.

d) Các bạn tổ 2 học toán đồng đều hơn các bạn tổ 1

Câu 17: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Nếu các giá trị của mẫu càng tập trung quanh giá trị trung bình thì độ lệch chuẩn càng lớn.

b) Khoảng biến thiên chỉ sử dụng thông tin của giá trị lớn nhất và bé nhất, bỏ qua thông tin của các giá trị còn lại.

c) Khoảng tứ phân vị có sử dụng thông tin của giá trị lớn nhất và bé nhất.

d) Các số đo độ phân tán có thể nhỏ hơn 0.

Câu 18: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Cho mẫu số liệu sau: 1 2 2 3 3 5 6 6 7 10. Khoảng tứ phân vị ΔQ của mẫu số liệu trên bằng 3

b) khoảng biến thiên của mẫu số liệu: 4; 8; 10; 8; 6; 12; 10 là: $R = 10$

c) khoảng tứ phân vị thứ 2 của mẫu số liệu sau: 5; 13; 6; 7; 12; 2; 2 là: $Q_2 = 6$

d) khoảng biến thiên của mẫu số liệu thông kê là: 83

22	24	33	17	11	4	18	87	72	30
----	----	----	----	----	---	----	----	----	----

Câu 19: Mẫu số liệu sau cho biết khối lượng (kg) của 15 người trong độ tuổi ngoài

40 42 42 43 44 45 46 47 48 50 51 53 55 56 60. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Khoảng biến thiên $R = 20$.

b) Trung vị của mẫu là 45.

c) Tứ phân vị thứ nhất là $Q_1 = 45$.

d) Khoảng tứ phân vị là $\Delta Q = 10$.

Câu 20: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Cho mẫu số liệu về điểm thi thử môn Toán của 11 học sinh lớp 10A như sau:

5 6 8 5 8 9 10 8 7 9 10

Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trong mẫu số liệu trên là 10 và 5.

b) Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu 5; 13; 5; 7; 10; 2; 3 là 10

c) Từ mẫu số liệu về thuế thuốc lá của 51 thành phố tại một quốc gia, người ta tính được:

Giá trị nhỏ nhất bằng 2,5; giá trị lớn nhất bằng 205. Khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên là: 207,5

d) Điều tra về số đoàn viên đầu năm ở 11 lớp khối 10 của trường THPT X ta được mẫu số liệu dưới đây

10	12	11	15	18	28	26	20	8	19
----	----	----	----	----	----	----	----	---	----

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên là 15

Câu 21: Trong một tuần, nhiệt độ cao nhất trong ngày (đơn vị $^{\circ}C$) tại hai thành phố Hà Nội và Điện

Biên như sau:

Hà Nội: 23 25 28 28 32 33 35

Điện Biên: 16 24 26 26 26 27 28

a) Khoảng biến thiên nhiệt độ cao nhất trong ngày của Hà Nội và Điện Biên là giống nhau.

b) Nếu bỏ đi giá trị 16 thì khoảng biến thiên của Điện Biên chỉ bằng 4.

c) Khoảng tứ phân vị của mẫu Hà Nội là: $\Delta_Q = 3$.

d) Khoảng tứ phân vị của mẫu Điện Biên là: $\Delta_Q = 8$.

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Câu 22: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Chiều cao của các bạn tổ 1 của lớp 10A lần lượt là:

165 155 171 167 159 175 165 160 158

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu trên là 11,5.

b) Mẫu số liệu sau đây cho biết sĩ số của 7 lớp 10 ban A tại một trường

36	42	47	48	44	44	40
----	----	----	----	----	----	----

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu trên là 7

c) Số lượng ly trà sữa một quán nước bán được trong 11 ngày qua là $Q_1 = 21$; $Q_2 = 31$; $Q_3 = 37$

d) khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu: 15; 20; 1; 2; 4; 3; 7; 5. là: 4,5

Câu 23: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Mẫu số liệu thống kê cân nặng (đơn vị: tấn) của 10 con voi châu Á trưởng thành là:

3,5	4,9	3,7	4,6	4,6	5,0	3,2	3,6	3,7	4,5
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu bằng $\Delta Q = 0,1$

b) Thống kê GDP năm 2020 (đơn vị: tỉ đô la Mỹ) của 10 nước tại khu vực Đông Nam Á được kết quả như sau:

Brunei	Campuchia	Indonesia	Lào	Malaysia
12,02	25,95	1059,64	19,08	338,28
Myanma	Philippines	Singapore	Thái Lan	Việt Nam
81,26	362,24	339,98	501,89	340,82

Khoảng tứ phân vị cho mẫu số liệu trên bằng 262,24

c) Tỷ lệ thất nghiệp ở một số quốc gia vào năm 2007 được cho như sau:

7,8 3,2 7,7 8,7 8,6 8,4 7,2 3,6
5,0 4,4 6,7 7,0 4,5 6,0 5,4.

số các giá trị bất thường của mẫu số liệu trên là: 3

d) Một mẫu số liệu có tứ phân vị thứ nhất là 56 và tứ phân vị thứ ba là 84. Trong các giá trị 8, 10, 100, 110 có 1 giá trị bất thường

Câu 24: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Giá trị bất thường của mẫu số liệu: 4; 4; 4; 4; 5; 20 là 20

b) Điểm kiểm tra môn Toán của 20 học sinh được cho bởi bảng sau

Điểm	1	4	5	6	7	8	9	10
Số học sinh	1	1	2	4	6	3	2	1

Trong mẫu số liệu trên có 4 giá trị bất thường?

c) Cho một mẫu dữ liệu đã được sắp xếp theo thứ tự không giảm $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_n$. Khi đó khoảng biến thiên R của mẫu số liệu bằng $R = x_n - x_1$

d) Điều tra về số học sinh của một trường THPT như sau:

Khối lớp	10	11	12
Số học sinh	1120	1075	900

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên là 3095.

Câu 25: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Điều tra chiều cao của 10 học sinh lớp 10A cho kết quả như sau:

154; 160; 155; 162; 165; 162; 155; 160; 165; 162. Khoảng tứ phân vị là 7

b) Mẫu số liệu sau cho biết giá của một số loại giày trong cửa hàng

150 165 150 180 200 225 250 270 160 155 x

x nhận giá trị 275 để mẫu số liệu này có khoảng biến thiên là 125

c) Một vườn thú ghi lại tuổi thọ (đơn vị: năm) của 20 con hổ và thu được kết quả như sau:

Tuổi thọ	[14; 15)	[15; 16)	[16; 17)	[17; 18)	[18; 19)
Số con hổ	1	3	8	6	2

Nhóm chứa tứ phân vị thứ ba là [17; 18).

d) Cho dãy số liệu thống kê: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Phương sai của mẫu số liệu thống kê đã cho là 4

•Dạng ③: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Bảng 3.3 biểu thị kết quả điều tra thời gian sử dụng Internet hằng ngày của một số người.

Bảng 3.3. Thời gian sử dụng Internet hằng ngày

Thời gian (phút)	[30; 60)	[60; 90)	[90; 120)	[120; 150)	[150; 180)
Số người	2	4	10	5	3

Tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu đã cho. Kết quả cho biết điều gì?

Câu 2: Điểm kiểm tra học kì môn Toán của các bạn Tổ 1, Tổ 2 lớp 10A được cho như sau:

Tổ 1: 7 8 8 9 8 8 8
 Tổ 2: 10 6 8 9 9 7 8 7 8.

a) Điểm kiểm tra trung bình của hai tổ có như nhau không?

b) Tính các khoảng biến thiên của hai mẫu số liệu. Căn cứ trên chỉ số này, các bạn tổ nào học đồng đều hơn?

Câu 3:

Mẫu số liệu sau cho biết chiều cao (đơn vị cm) của các bạn trong tổ:

163 159 172 167 165 168 170 161

Tính khoảng biến thiên của mẫu số liệu này.

Câu 4: Bảng sau thống kê cân nặng của 50 quả xoài Thanh Ca được lựa chọn ngẫu nhiên sau khi thu hoạch ở một nông trường.

Cân nặng (g)	[250; 290)	[290; 330)	[330; 370)	[370; 410)	[410; 450)
Số quả xoài	3	13	18	11	5

Có ý kiến cho rằng: “Trong 50 quả xoài trên, hiệu số cân nặng của hai quả bất kì không vượt quá 200 g”. Ý kiến đó đúng hay sai? Giải thích.

Câu 5: Bạn Trang thống kê lại chiều cao (đơn vị: cm) của các bạn học sinh nữ lớp 12C và lớp 12D ở bảng sau.

Chiều cao (cm) \ Lớp	[155; 160)	[160; 165)	[165; 170)	[170; 175)	[175; 180)	[180; 185)
12C	2	7	12	3	0	1
12D	5	9	8	2	1	0

Nếu so sánh theo khoảng biến thiên thì chiều cao của học sinh lớp nào có độ phân tán lớn hơn?

Câu 6: Thời gian hoàn thành Câu kiểm tra môn Toán của các bạn trong lớp 12C được cho trong bảng sau:

Thời gian (phút)	[25; 30)	[30; 35)	[35; 40)	[40; 45)
Số học sinh	8	16	4	2

a) Tính khoảng biến thiên R cho mẫu số liệu ghép nhóm trên.

b) Nếu biết học sinh hoàn thành Câu kiểm tra sớm nhất mất 27 phút và muộn nhất mất 43 phút thì khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc là bao nhiêu?

Câu kiểm tra sớm nhất mất 27 phút và muộn nhất mất 43 phút thì khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc là $43 - 27 = 16$.

Câu 7: Để chuẩn bị mở một trung tâm thể dục thể thao, anh Dũng đã tiến hành điều tra tuổi thọ của máy chạy bộ do hai hãng X, Y sản xuất. Bảng 3.5 biểu thị hai mẫu số liệu mà anh thu thập được qua Internet.

Bảng 3.5. Tuổi thọ của máy chạy bộ (đơn vị: năm)

Tuổi thọ	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)	[10; 12)
Số máy của hãng X	7	20	36	20	17
Số máy của hãng Y	0	20	35	35	10

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu nào lớn hơn? Từ đó có thể nói là máy chạy bộ do hãng nào sản xuất có tuổi thọ phân tán hơn?

Câu 8: Hãy tìm khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị của các mẫu số liệu sau:

a) 10;13;15;2;10;19;2;5;7

b) 15;19;10;5;9;10;1;2;5;15

Câu 9: Mẫu số liệu sau cho biết số ghế trống tại một rạp chiếu phim trong 9 ngày:

7 8 22 20 15 18 19 13 11. Tìm khoảng tứ phân vị cho mẫu số liệu này.

Câu 10: Mẫu số liệu sau đây cho biết số Câu hát ở mỗi album trong bộ sưu tập của An:

12 7 10 9 12 9 10 11 10 14. Hãy tìm khoảng tứ phân vị cho mẫu số liệu này.

Câu 11: Biểu đồ dưới đây biểu diễn số lượt khách hàng đặt bàn qua hình thức trực tuyến mỗi ngày trong quý III năm 2022 của một nhà hàng. Cột thứ nhất biểu diễn số ngày có từ 1 đến dưới 6 lượt đặt bàn; cột thứ hai biểu diễn số ngày có từ 6 đến dưới 11 lượt đặt bàn; ...

Hãy tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm cho bởi biểu đồ trên.

Câu 12: Kết quả đo chiều cao của 100 cây keo 3 năm tuổi tại một nông trường được cho ở bảng sau:

Chiều cao (m)	[8,4; 8,6)	[8,6; 8,8)	[8,8; 9,0)	[9,0; 9,2)	[9,2; 9,4)
Số cây	5	12	25	44	14

a) Hãy tìm khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

b) Trong 100 cây keo trên có 1 cây cao 8,4 m. Hỏi chiều cao của cây keo này có phải là giá trị ngoại lệ không?

Câu 13: Một người ghi lại thời gian đàm thoại của một số cuộc gọi cho kết quả như bảng sau:

Thời gian t (phút)	Số cuộc gọi
$0 \leq t < 1$	8
$1 \leq t < 2$	17
$2 \leq t < 3$	25
$3 \leq t < 4$	20
$4 \leq t < 5$	10

Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Câu 14: Hãy tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trong Bảng sau thống kê cân nặng của

50 quả xoài Thanh Ca được lựa chọn ngẫu nhiên sau khi thu hoạch ở một nông trường.

Cân nặng (g)	[250; 290)	[290; 330)	[330; 370)	[370; 410)	[410; 450)
Số quả xoài	3	13	18	11	5

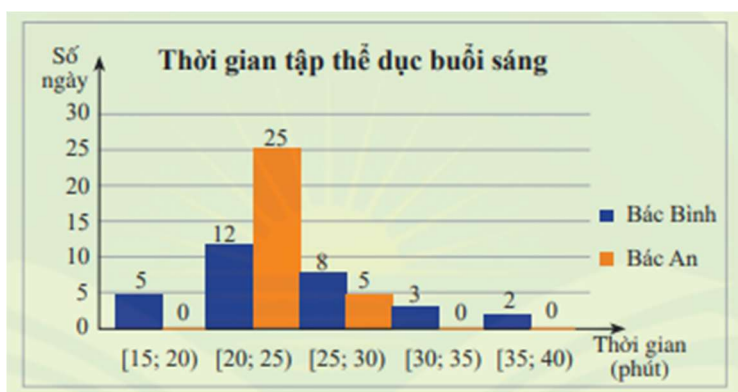
Câu 15: Kết quả điều tra tổng thu nhập trong năm 2022 của một số hộ gia đình trong một địa phương được ghi lại ở bảng sau:

Tổng thu nhập (triệu đồng)	[200; 250)	[250; 300)	[300; 350)	[350; 400)	[400; 450)
Số hộ gia đình	24	62	34	21	9

a) Hãy tìm các tứ phân vị Q_1 và Q_3 .

b) Một doanh nghiệp địa phương muốn hướng dịch vụ của mình đến các gia đình có mức thu nhập ở tầm trung, tức là 50% các hộ gia đình có mức thu nhập ở chính giữa so với tất cả các hộ gia đình của địa phương. Hỏi doanh nghiệp cần hướng đến các gia đình có mức thu nhập trong khoảng nào?

Câu 16: Hãy so sánh khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian tập thể dục buổi sáng mỗi ngày của bác Bình và bác An trong Khởi động.



Câu 17: Bảng tần số ghép nhóm dưới đây thể hiện kết quả điều tra về tuổi thọ trung bình của nam giới và nữ giới ở 50 quốc gia.

Giới tính Nhóm (Tuổi thọ)	Nam	Nữ
[50; 55)	4	3
[55; 60)	7	4
[60; 65)	4	5
[65; 70)	6	3
[70; 75)	15	7
[75; 80)	12	14
[80; 85)	2	13
[85; 90)	0	1

- a) Hãy tính các khoảng tứ phân vị của tuổi thọ trung bình của nam giới và nữ giới trong mẫu số liệu ghép nhóm trên.
- b) Hãy cho biết tuổi thọ trung bình của nam giới hay nữ giới trong mẫu số liệu ghép nhóm trên đồng đều hơn.

Câu 18: Thống kê số ngày trong tháng Sáu năm 2021 và năm 2022 theo nhiệt độ cao nhất trong ngày tại Hà Nội, người ta thu được bảng sau:

Nhiệt độ (°C)	[28; 30)	[30; 32)	[32; 34)	[34; 36)	[36; 38)	[38; 40)
Số ngày trong tháng 6/2021	0	2	8	5	6	9
Số ngày trong tháng 6/2022	2	3	4	11	8	2

Hỏi tháng Sáu năm nào ở Hà Nội nhiệt độ cao nhất trong ngày biến đổi nhiều hơn?

Câu 19: Hãy giải Câu toán trong tình huống mở đầu bằng cách sử dụng khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm.

Câu 20: Thống kê số thẻ vàng của mỗi câu lạc bộ trong giải ngoại hạng Anh mùa giải 2021 – 2022 cho kết quả sau:

101 79 79 78 75 73 68 67 67 63
63 61 60 59 57 55 55 50 47 42.

- a) Hãy ghép nhóm dãy số liệu trên thành các nhóm có độ dài bằng nhau với nhóm đầu tiên là [40; 50).

b) Tính khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu gốc và mẫu số liệu ghép nhóm thu được ở câu a. Giá trị nào là giá trị chính xác? Giá trị nào là giá trị xấp xỉ?

Câu 21: Thu nhập theo tháng (đơn vị: triệu đồng) của người lao động ở hai nhà máy như sau:

Thu nhập	[5; 8)	[8; 11)	[11; 14)	[14; 17)	[17; 20)
Số người của nhà máy A	20	35	45	35	20
Số người của nhà máy B	17	23	30	23	17

Tính mức thu nhập trung bình của người lao động ở hai nhà máy trên. Dựa vào khoảng tứ phân vị, hãy xác định xem mức thu nhập của người lao động ở nhà máy nào biến động nhiều hơn.

Câu 22: Bảng sau đây cho biết chiều cao của các học sinh lớp 12A và 12B.

Chiều cao (cm)	[145; 150)	[150; 155)	[155; 160)	[160; 165)	[165; 170)	[170; 175)
Số học sinh của lớp 12A	1	0	15	12	10	5
Số học sinh của lớp 12B	0	0	17	10	9	6

a) Tìm khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị cho các mẫu số liệu ghép nhóm về chiều cao của học sinh lớp 12A, 12B.

b) Để so sánh độ phân tán về chiều cao của học sinh hai lớp này ta nên dùng khoảng biến thiên hay khoảng tứ phân vị? Vì sao?

Câu 23: Điểm kiểm tra cuối khoá môn Tiếng Anh của hai lớp ở một trung tâm ngoại ngữ được thống kê trong các Bảng 3.7a và 3.7b.

Bảng 3.7a. Điểm của lớp A

Điểm	Số học viên (tần số)
[50; 60)	8
[60; 70)	20
[70; 80)	50
[80; 90)	17
[90; 100)	5

Bảng 3.7b. Điểm của lớp B

Điểm	Số học viên (tần số)
[50; 60)	15
[60; 70)	20
[70; 80)	30
[80; 90)	20
[90; 100)	15

- a) Tìm khoảng biến thiên của mỗi mẫu số liệu. Có thể dùng khoảng biến thiên để biết điểm của lớp nào đồng đều hơn không?
- b) Tìm các tứ phân vị và khoảng tứ phân vị của mỗi mẫu số liệu.
- c) Mẫu số liệu nào có độ phân tán lớn hơn? Minh họa câu trả lời bằng cách biểu diễn các tứ phân vị và khoảng tứ phân vị của mỗi mẫu số liệu trên trục số.

▶ BÀI 2: PHƯƠNG SAI VÀ ĐỘ LỆCH CHUẨN

A. Tóm tắt kiến thức

1. ĐỊNH NGHĨA

- ✍ Xét mẫu số liệu ghép nhóm cho bởi Bảng 14.
- ✓ Gọi $\bar{x}$ là số trung bình cộng của mẫu số liệu đó. Số
- ✓ $s^2 = \frac{n_1(x_1 - \bar{x})^2 + n_2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_m(x_m - \bar{x})^2}{n}$ được gọi là phương sai của mẫu số liệu đó.
- ✓ Căn bậc hai (số học) của phương sai gọi là độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu là s , nghĩa là $s = \sqrt{s^2}$.

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
$[a_1; a_2)$	x_1	n_1
$[a_2; a_3)$	x_2	n_2
...	...	...
$[a_m; a_{m+1})$	x_m	n_m
		$n = n_1 + n_2 + \dots + n_m$

Bảng 14

2. Ý NGHĨA

- ✓ Phương sai (độ lệch chuẩn) của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ phương sai (độ lệch chuẩn) của mẫu số liệu gốc và được dùng để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm đó.
- ✓ Độ lệch chuẩn có cùng đơn vị với đơn vị của mẫu số liệu.
- ✓ Khi hai mẫu số liệu ghép nhóm có cùng đơn vị đo và có số trung bình cộng bằng nhau (hoặc xấp xỉ nhau), mẫu số liệu nào có độ lệch chuẩn nhỏ hơn thì mức độ phân tán (so với số trung bình cộng) của các số liệu trong mẫu đó sẽ thấp hơn.

B. Phân dạng toán cơ bản

♦ Dạng 1: Phương sai và độ lệch chuẩn

Các ví dụ minh họa

Câu 1: a) Tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm biểu diễn kết quả 40 lần nhảy xa của vận động viên Dũng cho bởi Bảng 11 (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

b) Tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm biểu diễn kết quả 40 lần nhảy xa của vận động viên Huy cho bởi Bảng 12 (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

c) Trong hai vận động viên đó, kết quả nhảy xa của vận động viên nào đồng đều hơn?

Câu 2: Người ta theo dõi sự thay đổi cân nặng, được tính bằng hiệu cân nặng trước và sau ba tháng áp dụng chế độ ăn kiêng của một số người cho kết quả như sau:

Thay đổi cân nặng (kg)	$[-1; 0)$	$[0; 1)$	$[1; 2)$	$[2; 3)$	$[3; 4)$
Số người nam	2	3	5	3	2
Số người nữ	2	7	12	7	2

Tính số trung bình, phương sai, độ lệch chuẩn và nhận xét về sự thay đổi cân nặng của người nam, người nữ sau ba tháng áp dụng chế độ ăn kiêng.

Câu 3: Anh An đầu tư số tiền bằng nhau vào hai lĩnh vực kinh doanh A, B . Anh An thống kê số tiền thu được mỗi tháng trong vòng 60 tháng theo mỗi lĩnh vực cho kết quả như sau:

Số tiền (triệu đồng)	$[5; 10)$	$[10; 15)$	$[15; 20)$	$[20; 25)$	$[25; 30)$
Số tháng đầu tư vào lĩnh vực A	5	10	30	10	5
Số tháng đầu tư vào lĩnh vực B	20	5	10	5	20

So sánh giá trị trung bình và độ lệch chuẩn của số tiền thu được mỗi tháng khi đầu tư vào mỗi lĩnh vực A, B . Đầu tư vào lĩnh vực nào "rủi ro" hơn?

♦ Dạng 2: Ứng dụng thực tế

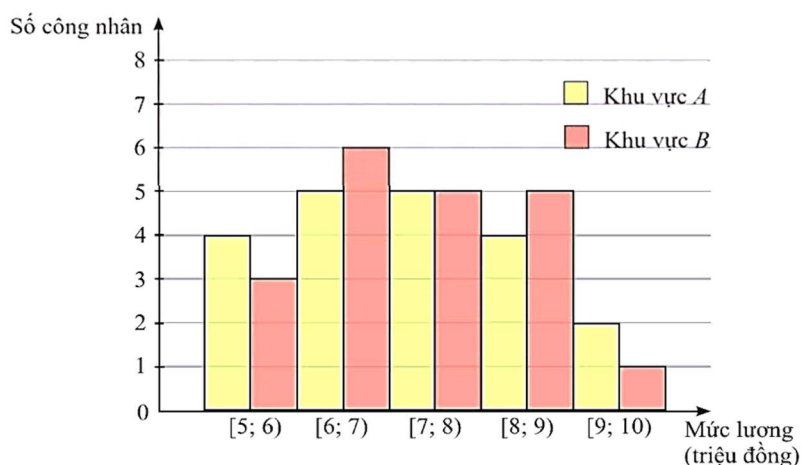
Các ví dụ minh họa

Câu 4: Biểu đồ dưới đây mô tả kết quả điều tra về mức lương khởi điểm (đơn vị: triệu đồng) của một số công nhân ở hai khu vực A và B .

a) Hãy xác định giá trị đại diện cho mỗi nhóm và lập bảng tần số ghép nhóm cho mẫu số liệu đó.

b) Nếu so sánh theo độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm thì công nhân ở khu vực nào có mức lương khởi điểm đồng đều hơn?

Mức lương khởi điểm của công nhân ở hai khu vực A và B



Câu 5: Giá đóng cửa của một cổ phiếu là giá của cổ phiếu đó cuối một phiên giao dịch. Bảng sau thống kê giá đóng cửa (đơn vị: nghìn đồng) của hai mã cổ phiếu A và B trong 50 ngày giao dịch liên tiếp.

Giá đóng cửa	[120; 122)	[122; 124)	[124; 126)	[126; 128)	[128; 130)
Cổ phiếu A	8	9	12	10	11
Cổ phiếu B	16	4	3	6	21

Người ta có thể dùng phương sai và độ lệch chuẩn để so sánh mức độ rủi ro của các loại cổ phiếu có giá trị trung bình gần bằng nhau. Cổ phiếu nào có phương sai, độ lệch chuẩn cao hơn thì được coi là có độ rủi ro lớn hơn.

Theo quan điểm trên, hãy so sánh độ rủi ro của cổ phiếu A và cổ phiếu B.

Câu 6. Để xác định độ ổn định của một máy đo độ ẩm không khí, người ta dùng máy này để đo 20 lần. Nếu độ lệch chuẩn của mẫu số liệu đo lớn hơn 0,15 thì người ta sẽ đưa máy đo đi sửa chữa. Trong một lần lấy mẫu, kĩ thuật viên có được mẫu số liệu ghép nhóm như sau:

Độ ẩm (%)	[52; 52,1)	[52,1; 52,2)	[52,2; 52,3)	[52,3; 52,4)	[52,4; 52,5)
Tần số	1	5	8	4	2

Liệu có cần đưa máy đo này đi sửa chữa hay không?

©. Dạng toán rèn luyện

♦ Dạng 1: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1: Sản lượng lúa (đơn vị ha) của 40 thửa ruộng có cùng diện tích được trình bày tròn bảng số liệu sau:

Sản lượng	20	21	22	23	24	
Tần số	5	8	11	10	6	$N = 40$

Tính phương sai của bảng số liệu

- A. 1,74 . B. 1,73 . C. 1,75 . D. 1,76 .

Câu 2: Tính độ lệch chuẩn của bảng số liệu (I). (Tính chính xác đến chữ số hàng phần trăm)

- A. 1,34 . B. 1,33 . C. 1,35 . D. 1,36 .

Câu 3: Cho mẫu số liệu thống kê $\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$. Tính (gần đúng) độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên?

- A. 2,45 . B. 2,58 . C. 6,67 . D. 6,0 .

Câu 4: Điểm kiểm tra giữa kỳ 2 của một học sinh lớp 10 như sau: 2,4,6,8,10 . Phương sai của mẫu số liệu trên là bao nhiêu?

- A. 6. B. 8. C. 10. D. 40.

Câu 5: Tính độ lệch chuẩn của bảng số liệu (I). (Tính chính xác đến chữ số hàng phần trăm).

- A. 1,24 . B. 1,23 . C. 1,25 . D. 1,26 .

Câu 6: Theo kết quả thống kê điểm thi giữa kỳ 2 môn toán khối 11 của một trường THPT, người ta tính được phương sai của bảng thống kê đó là $s_x^2 = 0,573$. Độ lệch chuẩn của bảng thống kê đó bằng

- A. 0,812 . B. 0,757 . C. 0,936 . D. 0,657 .

Câu 7: Cho phương sai của các số liệu bằng 4. Tìm độ lệch chuẩn.

- A. 4. B. 2. C. 16. D. 8.

Câu 8: Cho mẫu số liệu $\{10;7;8;5;4\}$. Phương sai của mẫu là

- A. 2,39. B. 2,14. C. 4,56. D. 5,7.

Câu 9: Cho mẫu số liệu thống kê $\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$. Tính (gần đúng) độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên.

- A. 2,45. B. 2,58. C. 6,67 . D. 6,0 .

Câu 10: Cho mẫu số liệu thống kê: $\{2, 4, 6, 8, 10\}$. Phương sai của mẫu số liệu trên bằng bao nhiêu?

- A. 6. B. 8. C. 10. D. 40.

Câu 11: Cho dãy số liệu thống kê: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Phương sai của mẫu số liệu thống kê đã cho là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 12: Cho mẫu số liệu 10, 8, 6, 2, 4. Độ lệch chuẩn của mẫu là

- A. 8. B. 2, 4. C. 6. D. 2, 8.

Câu 13: Bảng số liệu sau cho biết thời gian làm bài tính bằng phút của 50 học sinh.

Thời gian	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
Tần số (n)	1	3	4	7	8	9	8	5	3	2	N = 50

Tìm độ lệch chuẩn của mẫu số liệu thống kê trên.

- A. $\delta \approx 2,15$. B. $\delta \approx 2,14$.
C. $\delta \approx 2,16$. D. $\delta \approx 2,13$.

Câu 14: Cho bảng tần số khối lượng của 30 con tôm:

Khối lượng(gam)	140	150	160	170	180	190	Cộng
Tần số	2	3	5	9	8	3	30

Khẳng định nào sau đây là sai?

- A. Số trung bình $\bar{x} = 169$. B. Độ lệch chuẩn $s \approx 13,5$.
C. Tần suất của giá trị 160 là $\frac{1}{5}$. D. Mỗi con tôm là đơn vị của điều tra

Câu 15: Cho dãy số liệu thống kê: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Độ lệch chuẩn của dãy số liệu thống kê này (làm tròn đến 2 chữ số thập phân) là

- A. 2,30. B. 2,63. C. 27,56. D. 5,25.

Câu 16: Sản lượng lúa (đơn vị tạ) của 40 thửa ruộng có cùng diện tích được trình bày trong bảng số liệu sau. Bảng (I) (Dùng cho câu 8 và câu 9). Tính phương sai của bảng số liệu (I)

- A. 1,55. B. 1,53. C. 1,52. D. 1,54.

Câu 17: Tính phương sai của dãy số liệu: 1, 3, 3, 5, 7, 9, 10, 11, 11, 11.

- A. $\frac{71}{10}$. B. $\frac{1329}{10}$. C. $\frac{710}{10}$. D. $\frac{1329}{100}$.

Câu 18: Cho dãy số liệu thống kê: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7. Phương sai của các số liệu thống kê là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 19: Số liệu thống kê 100 học sinh tham gia kì thi học sinh giỏi toán (thang điểm 20). Kết quả được thống kê trong bảng sau:

Điểm	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
Tần số	1	1	3	5	8	13	19	24	14	10	2	$N = 100$

Tính độ lệch chuẩn của bảng số liệu thống kê.

A. 2,01.

B. 1,89.

C. 1,98.

D. 1,99.

Câu 20: Cho mẫu số liệu thống kê $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Tính (gần đúng) độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên?

A. 2,45.

B. 2,58.

C. 6,67.

D. 6,0.

Câu 21: Một cửa hàng bán gạo, thống kê số kg gạo mà cửa hàng bán mỗi ngày trong 30 ngày, được bảng tần số:

Bảng tần số	
Số kg gạo	Tần số
100	7
120	4
130	2
160	8
180	3
200	2
250	4
Tổng	30

Phương sai của bảng số liệu gần đúng với giá trị nào dưới đây nhất?

A. 155.

B. 2318.

C. 3325.

D. 1234.

Câu 22: Đo chiều cao (tính bằng cm) của 500 học sinh trong một trường THPT ta thu được kết quả như sau:

Chiều cao	[150;154)	[154;158)	[158;162)	[162;166)	[166;170)
Tần số	25	50	200	175	50

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên là:

A. $s_x = 161,4$ B. $s_x = 14,48$.C. $s_x = 8,2$

D.

$$s_x = 3,85$$

♦Dạng 2: Câu trắc nghiệm đúng, sai

Câu 1: Nhiệt độ trung bình ($^{\circ}C$) mỗi tháng trong năm tại một trạm quan trắc được thống kê như sau:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
19,6	19,6	23,2	22,3	29,9	32,1	31,6	29,3	29,2	24,8	23,9	18,6

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Nhiệt độ trung bình trong năm: $25,34^{\circ}C$.
- b) Tháng 7 có nhiệt độ cao nhất là: $32,1^{\circ}C$
- c) Phương sai $s^2 = 21,98$
- d) Độ lệch chuẩn $s = 3,69$.

Câu 2: Số liệu thống kê tỉ lệ (%) tốt nghiệp THPT của một địa phương từ năm học 2009- 2010 đến năm học 2024 - 2025 được cho như sau:

98,82	97,46	99,19	98,90	98,65	79,51	85,06	86,18
98,68	99,23	99,93	99,34	99,74	93,08	97,34	97,82

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Tỉ lệ tốt nghiệp trung bình: 95,56%.
- b) 99,19 là tỉ lệ (%) tốt nghiệp THPT cao nhất
- c) Phương sai: $s^2 = 36,03$
- d) Độ lệch chuẩn: $s = 6,09$.

Câu 3: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Độ lệch chuẩn là bình phương của phương sai;
- b) Độ lệch chuẩn là một nửa của phương sai;
- c) Độ lệch chuẩn là căn bậc hai của phương sai;
- d) Độ lệch chuẩn là căn bậc ba của phương sai.

Câu 4: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Phương sai của mẫu số liệu: 2; 3; 4; 5; 6 là $s_x^2 = 2$
- b) Trong một mẫu số liệu, phương sai bằng Bình phương của độ lệch chuẩn.
- c) Điểm kiểm tra giữa kỳ 2 của một học sinh lớp 10 như sau: 2, 4, 6, 8, 10. Phương sai của mẫu số liệu trên bằng 8

d) Theo kết quả thống kê điểm thi giữa kỳ 1 môn toán khối 10 của một trường THPT Yên Khánh A, người ta tính được phương sai của bảng thống kê đó là 0,58. Độ lệch chuẩn của bảng thống kê đó bằng 0,76

Câu 5: Thực hành việc đo chiều cao (cm) của 40 học sinh nữ khối lớp 10 của một trường Trung học phổ thông, ta được kết quả như sau:

154	152	154	151	150	149	153	154	152	152
150	152	150	153	152	156	153	156	105	153
156	154	154	152	152	152	154	155	155	153
156	147	155	154	156	157	149	153	170	154

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Chiều cao trung bình: $\bar{x} = 152,27 \text{ cm}$.
- b) 170 cm là chiều cao lớn nhất
- c) Phương sai: $s^2 = 65,32$;
- d) Độ lệch chuẩn: $s = 8,08$.

Câu 6: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Phương sai luôn là một số không âm.
- b) Phương sai là bình phương của độ lệch chuẩn.
- c) Phương sai càng lớn thì độ phân tán quanh số trung bình càng lớn.
- d) Phương sai luôn lớn hơn độ lệch chuẩn.

Câu 7: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Phương sai được sử dụng làm đại diện cho các số liệu của mẫu.
- b) Phương sai được sử dụng để đánh giá mức độ phân tán của các số liệu thống kê.
- c) Phương sai được tính bằng tổng số phần tử của một mẫu số liệu.
- d) Phương sai là số liệu xuất hiện nhiều nhất trong bảng các số liệu thống kê.

Câu 8: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Cho phương sai của các số liệu bằng 4. độ lệch chuẩn là: 2
- b) Cho mẫu số liệu $\{10; 7; 8; 5; 4\}$. Phương sai của mẫu là 2,14
- c) Cho mẫu số liệu 10, 8, 6, 2, 4. Độ lệch chuẩn của mẫu là 6

d) Điểm kiểm tra giữa kỳ 2 của một học sinh lớp 10 như sau: 2, 4, 6, 8, 10. Phương sai của mẫu số liệu trên là 8

Câu 9: Phương sai là đặc trưng dùng để. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- Đo độ phân tán của mẫu số liệu.
- Cho biết vị trí trung tâm của mẫu số liệu.
- Phát hiện số liệu bất thường hoặc không chính xác của mẫu số liệu.
- Là hiệu số giữa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trong mẫu số liệu.

Câu 10: Độ lệch chuẩn của một dãy số liệu thống kê được tính là giá trị nào. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- Bình phương của phương sai.
- Một nửa của phương sai.
- Căn bậc hai của phương sai.
- Hai lần phương sai.

Câu 11: Bạn Hưng và bạn Thịnh thống kê kết quả chiều cao (đơn vị: xăng-ti-mét) của 5 cây nguyệt quế mà mỗi người trồng sau một thời gian như sau.

Cây của bạn Hưng	35	36	38	36	37
Cây của bạn Thịnh	30	35	38	41	30

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- Số trung bình cộng của mẫu số liệu cây của bạn Hưng là: $\bar{x}_H = 36,4(cm)$.
- Số trung bình cộng của mẫu số liệu cây của bạn Thịnh là: $\bar{x}_T = 32,4(cm)$.
- Phương sai của mẫu số liệu cây của bạn Hưng **lớn hơn** Phương sai của mẫu số liệu cây của bạn Thịnh
- Các cây nguyệt quế của bạn Hưng phát triển chiều cao đồng đều hơn

Câu 12: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- Cho mẫu số liệu thống kê $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên là 2,58
- Cho dãy số liệu thống kê: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Phương sai của mẫu số liệu thống kê đã cho là 4
- Sản lượng lúa (đơn vị ha) của 40 thửa ruộng có cùng diện tích được trình bày trong bảng số liệu sau:

Sản lượng	20	21	22	23	24	
Tần số	5	8	11	10	6	$N = 40$

phương sai của bảng số liệu là: 1,52

d) Cho dãy số liệu thống kê: 1,2,3,4,5,6,7,8. Độ lệch chuẩn của dãy số liệu thống kê này (làm tròn đến 2 chữ số thập phân) là: 2,63

Câu 13: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Sản lượng lúa (tạ) của 40 thửa ruộng thí nghiệm có cùng diện tích được trình bày trong bảng phân bố tần số sau đây:

Sản lượng	20	21	22	23	24
Tần số	5	8	11	10	6

Phương sai của mẫu số liệu là: 22,1

b) Cho dãy số liệu thống kê

1 2 3 4 5 6 7

Phương sai của mẫu số liệu thống kê đã cho là 4

c) Sĩ số học sinh của 5 lớp khối 10 là: 40; 43; 45; 41; 46. Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu là: 2,28

d) Cho dãy số liệu thống kê 1,2,3,4,5,6,7,8. Độ lệch chuẩn của dãy số liệu thống kê gần bằng 3,30

Câu 14: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Sản lượng ngô của 40 thửa ruộng thí nghiệm có cùng diện tích được trình bày trong bảng phân bố tần số sau đây:

Sản lượng	20	21	22	23	24
Tần số	5	8	11	10	6

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu là: $S \approx 1,24$.

b) Sản lượng lúa của 50 thửa ruộng thí nghiệm có cùng diện tích được trình bày trong bảng phân bố tần số sau đây:

Sản lượng	20	21	22	23	24
Tần số	7	10	13	12	8

Phương sai của mẫu số liệu là: 1,6336

c) Cho mẫu số liệu 10;8;6;2;4. Độ lệch chuẩn của mẫu là: 28

d) Cho mẫu số liệu thống kê $\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$. độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên là: 2,58.

Câu 15: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Thống kê điểm trắc nghiệm môn Tiếng Anh của 40 học sinh, người ta thu được mẫu số liệu sau

56	42	78	45	55	66	82	34	25	30
90	72	98	62	64	31	45	28	72	88
56	58	62	65	31	74	72	90	92	40
52	56	55	82	22	32	46	60	68	54

Hãy xác định giá trị trung bình, độ lệch chuẩn của bảng số liệu trên là: $s \approx 20,447$

b) Điểm trung bình môn toán của một số học sinh lớp 12A1 được cho trong bảng sau:

STT	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Điểm	7,5	8,6	6,5	9	9,4	7,9	6,8	8,0	8,3

Phương sai của mẫu số liệu trên là $\frac{172}{225}$

c) Điểm kiểm tra môn Toán của học sinh lớp 10A ở trường X được cho ở bảng sau

Điểm	5	6	7	8	9	10
Tần số	1	5	10	9	7	3

độ lệch chuẩn. $s \approx 1,255$

d) Theo kết quả thống kê điểm thi giữa kỳ 2 môn toán khối 11 của một trường THPT, người ta tính được phương sai của bảng thống kê đó là $s_x^2 = 0,573$. Độ lệch chuẩn của bảng thống kê đó bằng 0,757

Câu 16: Kết quả kiểm tra môn Tiếng Anh (thang điểm 100) của hai lớp 12A và 12B được cho dưới bảng sau:

Lớp 12A

67	69	71	68	68	72
71	69	71	75	73	68
73	72	72	75	74	75
68	72	69	70	70	69
75	76	69	49	73	76
70	71	69	67	68	91
72	73	75	74	76	73

Lớp 12B

74	71	75	63	59	72
55	66	71	69	75	68
73	72	72	75	74	75
54	58	69	58	55	62
75	78	69	51	73	76
86	61	59	79	82	93
76	81	88	67	72	84

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Điểm trung bình Lớp 12A bằng 71,38

b) Phương sai Lớp 12B bằng 28,09

c) Độ lệch chuẩn Lớp 12A bằng 5,30

d) Lớp 10A học đồng đều hơn 12B.

Câu 17: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Cho mẫu số liệu thống kê: $\{2, 4, 6, 8, 10\}$. Phương sai của mẫu số liệu trên bằng 10

b) Cho mẫu số liệu thống kê: $\{2, 4, 6, 8, 10\}$. Phương sai của mẫu số liệu trên bằng 8

c) Cho dãy số liệu thống kê: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Phương sai của mẫu số liệu thống kê đã cho là 1

d) Sản lượng lúa của 5 thửa ruộng thí nghiệm có cùng diện tích như sau:

Thửa ruộng	1	2	3	4	5
Sản lượng lúa (đơn vị tạ)	20	21	22	23	24

phương sai và độ lệch chuẩn cho mẫu số liệu trên là: $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{2}$

Câu 18: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Cho mẫu số liệu thống kê $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên là: 2,45

b) Sản lượng lúa (đơn vị ha) của 40 thửa ruộng có cùng diện tích được trình bày trong bảng số liệu sau:

Sản lượng	20	21	22	23	24	
Tần số	5	8	11	10	6	$N = 40$

phương sai của bảng số liệu là: 1,54

c) Cho dãy số liệu thống kê: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Độ lệch chuẩn của dãy số liệu thống kê này (làm tròn đến 2 chữ số thập phân) là: 27,56

d) Xạ thủ A bắn 5 viên đạn vào bia. Điểm số của xạ thủ A như sau

Viên đạn	1	2	3	4	5
Điểm số	6	7	8	9	10

độ lệch chuẩn của các số liệu thống kê ở trên là: $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{2}$

Câu 19: Cho hai mẫu số liệu A và B được cho dưới dạng tần số như sau:

Mẫu A:

Giá trị	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Tần số	1	2	3	3	2	4	2	4	1	3	4	2	1	1

Mẫu B:

Giá trị	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Tần số	1	0	1	1	2	2	3	5	10	4	2	1	0	1

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Với mẫu A ta có: giá trị trung bình $\overline{x_A} = 7,27$ b) Với mẫu B ta có phương sai $s_B^2 = 6,21$ c) Với mẫu A ta có độ lệch chuẩn $s_A = 2,5$.

d) Mẫu A có độ phân tán cao hơn mẫu B.

Câu 20: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Số liệu sau đây ghi lại mức thu nhập hàng tháng làm theo sản phẩm của 20 công nhân trong một tổ sản xuất

Thu nhập (X)	8	9	10	12	15	18	20
Tần số(n)	1	2	6	7	2	1	1

độ lệch chuẩn là: $s \approx 2,96$.

b) Theo dõi thời gian làm một bài toán của 40 học sinh, giáo viên lập được bảng sau:

Thời gian (x)	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
Tần số (n)	6	3	4	2	7	5	5	7	1	N = 40

Phương sai của mẫu số liệu trên là: 12

c) Số liệu thống kê 100 học sinh tham gia kì thi học sinh giỏi toán. Kết quả được thống kê trong bảng sau:

Điểm	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
Tần số	1	1	3	5	8	13	19	24	14	10	2	$N = 100$

Phương sai của mẫu số liệu trên là: 1,98

d) Điểm kiểm tra môn anh của bạn Tuyền được ghi lại như sau:

7	8	9	8	8	10	9	8
---	---	---	---	---	----	---	---

Độ lệch chuẩn của điểm kiểm tra môn anh của bạn Tuyền là $\frac{\sqrt{47}}{8}$

Câu 21: Kết quả điểm kiểm tra học kì môn Ngữ văn của các em học sinh tổ 1 và tổ 2 lớp 12D một trường Trung học phổ thông được cho như sau:

Điểm Ngữ văn tổ 1: 7 8 7,5 7 6 6,5 8 7.

Điểm Ngữ văn tổ 2: 6 7 8 6,5 8,5 7,7 8 8,5.

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Điểm trung bình học sinh tổ 1 : $\bar{x} \approx 4,17$.

b) Phương sai học sinh tổ 1 : $s^2 \approx 0,49$.

c) Độ lệch chuẩn học sinh tổ 2: $s \approx 0,87$.

d) Tổ 1 học Ngữ văn đồng đều hơn tổ 2.

Câu 22: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Trong 5 lần nhảy xa, bốn bạn Hùng, Tú, Tường có kết quả lần lượt là

Hùng	2,4	2,6	2,4	2,5	2,6
Tú	2,4	2,5	2,5	2,5	2,6
Tường	2,4	2,4	2,5	2,5	2,6

Bạn có kết quả nhảy xa ổn định nhất là Tường.

b) Thống kê điểm của 100 học sinh tham gia kì thi học sinh giỏi môn Toán , kết quả được cho trong bảng sau:

Điểm	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
Tần số	1	1	3	5	8	13	19	24	14	10	2	$N = 100$

Độ lệch chuẩn có giá trị là 1,99

c) Theo dõi thời gian làm một bài toán của 40 học sinh, giáo viên lập được bảng sau:

Thời gian (x)	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
Tần số (n)	6	3	4	2	7	5	5	7	1	$N = 40$

Phương sai của mẫu số liệu trên là: 40

d) Cho dãy số liệu thống kê: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7. Phương sai của các số liệu thống kê là 1

Câu 23: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Điểm kiểm tra môn toán của bạn An được ghi lại như sau:

9	3	4	8	7	10	9	8
---	---	---	---	---	----	---	---

Độ lệch chuẩn của điểm kiểm tra môn toán của bạn An là $\frac{\sqrt{101}}{4}$

b) Số liệu thống kê 100 học sinh tham gia kì thi học sinh giỏi toán. Kết quả được thống kê trong bảng sau:

Điểm	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
Tần số	1	1	3	5	8	13	19	24	14	10	2	$N = 100$

Phương sai của mẫu số liệu trên là: 3,96

c) Bảng sau thống kê sản lượng lúa của 40 thửa ruộng có cùng diện tích

Sản lượng	20	21	22	23	24
Tần số	5	8	11	10	6

Tính phương sai của mẫu số liệu trên là: 22,1

d) Cho mẫu số liệu thống kê $\{2, 4, 6, 8, 10\}$. Phương sai của mẫu số liệu trên bằng 40

Câu 24: Mỗi mẫu số liệu sau ghi rõ số bàn thắng của hai đội tuyển Việt Nam và Thái Lan trong một năm dương lịch khi thi đấu với các đội bóng khác ở khu vực.

Số bàn thắng đội tuyển Việt Nam : 4 3 2 1 6 2 3 3 2 2 3 5.

Số bàn thắng đội tuyển Thái Lan: 6 8 0 0 3 4 3 2 3 1 1 5.

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Số bàn thắng trung bình của đội tuyển Việt Nam và đội tuyển Thái Lan là không bằng nhau

b) Xét mẫu số liệu về số bàn thắng của đội tuyển Việt Nam có độ lệch chuẩn là: $s_1 \approx 1,354$ (bàn).

c) Xét mẫu số liệu về số bàn thắng của đội tuyển Thái Lan có phương sai là: $s_2^2 = 5,5$

d) Khả năng ghi bàn của đội tuyển Thái Lan có tính ổn định hơn so với đội tuyển Việt Nam

Câu 25: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Số điểm thi năng lực của một nhóm học sinh như sau:

83 98 98 77 79 79 83 69 98. Phương sai và độ lệch chuẩn lần lượt là 100,77 và 10,04.

b) Số học sinh giỏi của 12 lớp trong một trường phổ thông được ghi lại như sau:

0;2;5;3;4;5;4;6;1;2;5;4. Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên là 1,52

c) Mẫu số liệu thống kê chiều cao của 10 học sinh tổ 1 như sau:

170 164 156 158 168 167 173 157 161 174

Phương sai của mẫu số liệu trên là 39,36

d) Kết quả thi học kì I của bạn A được ghi lại trong bảng sau

Toán	Văn	Anh	Lý	Hóa	Địa
7,0	6,0	7,5	7,5	8,5	8,0

Phương sai của mẫu số liệu trên là: 0,52

♦ **Dạng 3: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn**

Câu 1: Thống kê lợi nhuận hàng tháng (đơn vị: triệu đồng) trong 20 tháng của hai nhà đầu tư được cho như sau:

Lợi nhuận	[10; 20)	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50)	[50; 60)
Số tháng	2	4	8	4	2

Bảng 3.2. Lợi nhuận theo tháng của nhà đầu tư nhỏ

Lợi nhuận	[510; 520)	[520; 530)	[530; 540)	[540; 550)	[550; 560)
Số tháng	4	3	6	3	4

Bảng 3.3. Lợi nhuận theo tháng của nhà đầu tư lớn

Tính độ lệch chuẩn của hai mẫu số liệu ghép nhóm trên. Có nên dựa vào độ lệch chuẩn để so sánh độ rủi ro của hai nhà đầu tư này không?

Câu 2: Cân nặng của một số quả mít trong một khu vườn được thống kê ở bảng sau:

Cân nặng (kg)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)	[10; 12)	[12; 14)
Số quả mít	6	12	19	9	4

Hãy tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên. (Kết quả các phép tính làm tròn đến hàng phần trăm.)

Câu 3: Thống kê tổng số giờ nắng trong tháng 9 tại một trạm quan trắc đặt ở Cà Mau trong các năm từ 2002 đến 2021 được thống kê như sau:

111,6 134,9 130,3 134,2 140,9 109,3 154,4 156,3 116,1 96,7
 105,2 80,8 80,8 110 109 139 145 161 126 114

- Hãy tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên.
- Hãy lập bảng tần số ghép nhóm với nhóm đầu tiên là [80; 98) và độ dài mỗi nhóm bằng 18. Tính phương sai, độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm.
- Hãy tính sai số tương đối của độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm so với độ lệch chuẩn của mẫu số liệu gốc.

(Kết quả các phép tính làm tròn đến hàng phần nghìn.)

Câu 4: Thầy Tuấn thống kê lại điểm trung bình cuối năm của các học sinh lớp 11 A và 11B ở bảng sau:

Điểm trung bình \ Lớp	[5; 6)	[6; 7)	[7; 8)	[8; 9)	[9; 10)
11A	1	0	11	22	6
11B	0	6	8	14	12

- Nếu so sánh theo khoảng biến thiên thì học sinh lớp nào có điểm trung bình ít phân tán hơn?
- Nếu so sánh theo độ lệch chuẩn thì học sinh lớp nào có điểm trung bình ít phân tán hơn?

Câu 5: Điều tra thời gian phải làm thêm trung bình hằng tuần của các bác sĩ ở một bệnh viện, người ta thu được số liệu sau:

Bảng 3.14. Thời gian làm thêm hằng tuần của một số bác sĩ (đơn vị: giờ)

5	6	7	8	8	8	9	9	9
9	9	10	10	10	10	11	11	11
12	12	12	13	13	14	14		

- a) Chuyển mẫu số liệu đã cho về mẫu số liệu ghép nhóm với độ dài các nhóm ghép bằng 2 và nhóm đầu tiên là $[5; 7)$.
- b) Tính số trung bình, phương sai, độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm lập ở câu a (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).
- c) So sánh và nêu ý nghĩa các kết quả tìm được ở câu b với các kết quả tương ứng của mẫu số liệu gốc.

Câu 6: Chiều dài của 40 bé trai sơ sinh 12 ngày tuổi chọn ngẫu nhiên ở một bệnh viện được nhà nghiên cứu thống kê trong Bảng 3.17 dưới đây:

Bảng 3.17. Chiều dài của 40 bé trai sơ sinh

Chiều dài (cm)	[44; 46)	[46; 48)	[48; 50)	[50; 52)	[52; 54)	[54; 56)
Số trẻ	3	3	10	15	7	2

Tính số trung bình và độ lệch chuẩn của chiều dài nhóm 40 bé trai sơ sinh (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).

Câu 7: Hãy tính phương sai và độ lệch chuẩn của mỗi mẫu số liệu ghi kết quả các lần bắn của từng cung thủ trong bảng sau

Hai cung thủ A và B đã ghi lại kết quả từng lần bắn của mình ở bảng sau:

Cung thủ A	8	9	10	7	6	10	6	7	9	8
Cung thủ B	10	6	8	7	9	9	8	7	8	8

Câu 8: Điều tra một số học sinh về số cái bánh chưng mà gia đình mỗi bạn tiêu thụ trong dịp Tết Nguyên đán, kết quả được ghi lại ở bảng sau:

Số cái bánh chưng	6	7	8	9	10	11	12
Số gia đình	5	7	10	8	5	4	1

Tính Số trung bình; Phương sai; Độ lệch chuẩn

Câu 9: Bảng dưới đây thông kê tổng số giờ nắng trong năm 2019 theo từng tháng được đo bởi hai trạm quan sát khí tượng đặt ở Tuyên Quang và Cà Mau.

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Tuyên quang	25	89	72	117	106	177	156	203	227	146	117	145
Cà mau	180	223	257	245	191	111	141	134	130	122	157	173

a) Hãy tính phương sai và độ lệch chuẩn của dữ liệu từng tính.

b) Nêu nhận xét về sự thay đổi tổng số giờ nắng theo từng tháng ở mỗi tính.

Câu 10: Mẫu số liệu sau đây cho biết sĩ số của 5 lớp khối 10 tại một trường Trung học: 43 45 46 41 40

Tìm phương sai và độ lệch chuẩn cho mẫu số liệu này.

Câu 11: Dùng đồng hồ đo thời gian có độ chia nhỏ nhất đến 0,001 giây để đo 7 lần thời gian rơi tự do của một vật bắt đầu từ điểm $A(v_A = 0)$ đến điểm B . Kết quả đo như sau:

0,398 0,399 0,408 0,410 0,406 0,405 0,402

Hãy tính phương sai và độ lệch chuẩn cho mẫu số liệu này. Qua các đại lượng này, em có nhận xét gì về độ chính xác của phép đo trên?

Câu 12: Một vận động viên luyện tập chạy cự li 100 m đã ghi lại kết quả luyện tập như sau:

Thời gian (giây)	[10,2; 10,4)	[10,4; 10,6)	[10,6; 10,8)	[10,8; 11)
Số vận động viên	3	7	8	2

Tìm phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm này. Phương sai và độ lệch chuẩn cho biết điều gì?

Câu 13: Tuổi thọ của một số linh kiện điện tử (đơn vị: năm) được sản xuất bởi hai phân xưởng được cho như sau:

Tuổi thọ (năm)	[1,5; 2)	[2; 2,5)	[2,5; 3)	[3; 3,5)	[3,5; 4)
Số linh kiện của phân xưởng 1	4	9	13	8	6
Số linh kiện của phân xưởng 2	2	8	20	7	3

Tìm phương sai và độ lệch chuẩn của mỗi mẫu số liệu ghép nhóm và nhận xét về độ phân tán của tuổi thọ các linh kiện điện tử được sản xuất bởi mỗi phân xưởng.

Câu 14: Một nhóm 20 học sinh dùng một thiết bị đo đường kính của một nhân tế bào cho kết quả như sau:

Kết quả đo (μm)	[4,5; 5)	[5; 5,5)	[5,5; 6)	[6; 6,5)
Số học sinh	3	8	7	2

a) Tính số trung bình và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

b) Số trung bình và độ lệch chuẩn cho biết thông tin gì?

Câu 15: Thời gian chạy tập luyện cự li 100m của hai vận động viên được cho trong bảng sau:

Thời gian (giây)	[10; 10,3)	[10,3; 10,6)	[10,6; 10,9)	[10,9; 11,2)
Số lần chạy của A	2	10	5	3
Số lần chạy của B	3	7	9	6

Dựa trên độ lệch chuẩn của các mẫu số liệu ghép nhóm, hãy cho biết vận động viên nào có thành tích luyện tập ổn định hơn.

Câu 16: Có nên dùng phương sai (hoặc độ lệch chuẩn) để so sánh độ phân tán của hai mẫu số liệu ghép nhóm trong mỗi trường hợp sau không? Tại sao?

a) Các mẫu số liệu ghép nhóm về điểm thi tốt nghiệp môn Toán của học sinh hai trường trung học phổ thông có chất lượng tương đương.

b) Các mẫu số liệu ghép nhóm về doanh thu của 100 cửa hàng bán lẻ và doanh thu của 100 siêu thị.

Câu 17:

a) Trong biểu đồ ở Khởi động, cột thứ nhất biểu diễn số lượng học sinh có chiều cao từ 160cm đến dưới 164cm; cột thứ hai biểu diễn số lượng học sinh có chiều cao từ 164cm đến dưới 168cm,

Hãy lập bảng tần số ghép nhóm cho mẫu số liệu ở, xác định giá trị đại diện của mỗi nhóm và tính số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm.

b) Xét mẫu số liệu mới gồm các giá trị đại diện của các nhóm, tần số của mỗi giá trị đại diện bằng tần số của nhóm tương ứng. Hãy tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu mới.

Câu 18: Hãy tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm ở Khởi động

Chiều cao (cm)	[160;164)	[164;168)	[168;172)	[172;176)	[176;180)
Số học sinh	3	5	8	4	1

Câu 19: Mai và Ngọc cùng sử dụng vòng đeo tay thông minh để ghi lại số bước chân hai bạn đi mỗi ngày trong một tháng. Kết quả được ghi lại ở bảng sau:

- a) Hãy tính số trung bình và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên.
- b) Nếu so sánh theo độ lệch chuẩn thì bạn nào có số lượng bước chân đi mỗi ngày đều đặn hơn?

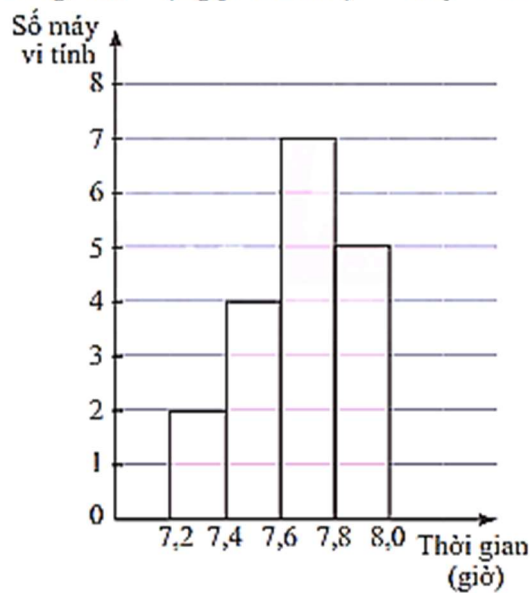
Câu 20: Bảng dưới đây thống kê cự li ném tạ của một vận động viên.

Cự li (m)	[19; 19,5)	[19,5; 20)	[20; 20,5)	[20,5; 21)	[21; 21,5)
Tần số	13	45	24	12	6

Hãy tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Câu 21:

Thời gian sử dụng pin của một số máy vi tính



Kết quả khảo sát thời gian sử dụng liên tục (đơn vị: giờ) từ lúc sạc đầy cho đến khi hết của pin một số máy vi tính cùng loại được mô tả bằng biểu đồ bên.

- a) Hãy cho biết có bao nhiêu máy vi tính có thời gian sử dụng pin từ 7,2 đến dưới 7,4 giờ?
- b) Hãy xác định số trung bình và độ lệch chuẩn của thời gian sử dụng pin.

Câu 22: Tốc độ của 20 xe hơi khi đi qua một trạm kiểm tra tốc độ (đơn vị: km/h) được thống kê lại như sau:

42 43,4 43,4 46,5 46,7 46,8 47,5 47,7 48,1 48,4
 50,8 52,1 52,7 53,9 54,8 55,6 57,5 59,6 60,3 61,1

- Hãy tính khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên.
- Hãy lập bảng tần số ghép nhóm với nhóm đầu tiên là $[42; 46)$ và độ dài mỗi nhóm bằng 4.
- Hãy tính khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm.

Câu 23: Một giống cây xoan đào được trồng tại hai địa điểm A và B. Người ta thống kê đường kính thân của một số cây xoan đào 5 năm tuổi ở bảng sau:

Đường kính (cm)	$[30; 32)$	$[32; 34)$	$[34; 36)$	$[36; 38)$	$[38; 40)$
Số cây trồng ở địa điểm A	25	38	20	10	7
Số cây trồng ở địa điểm B	22	27	19	18	14

- Hãy so sánh đường kính trung bình của thân cây xoan đào trồng tại địa điểm A và địa điểm B.
- Nếu so sánh theo độ lệch chuẩn thì cây trồng tại địa điểm nào có đường kính đồng đều hơn?