Người làm: Lê Thị Hảo

Zalo: Lê Thị Hảo - số đt zalo: 0988922912

Email: lehaothcsdx@gmail.com

CĐ1: PHẦN HÌNH HỌC

Dạng 1. Tính số đo góc, chứng minh góc bằng nhau

A. Trắc nghiệm (nếu có)

Câu 1. **(HSG 7 huyện Lục Nam năm 2020 - 2021)**

Cho góc $\widehat{xOy}=50^\circ$, điểm A nằm trên Oy. Qua A vẽ tia Am. Để Am song song với Ox thì số đo của góc OAm là:

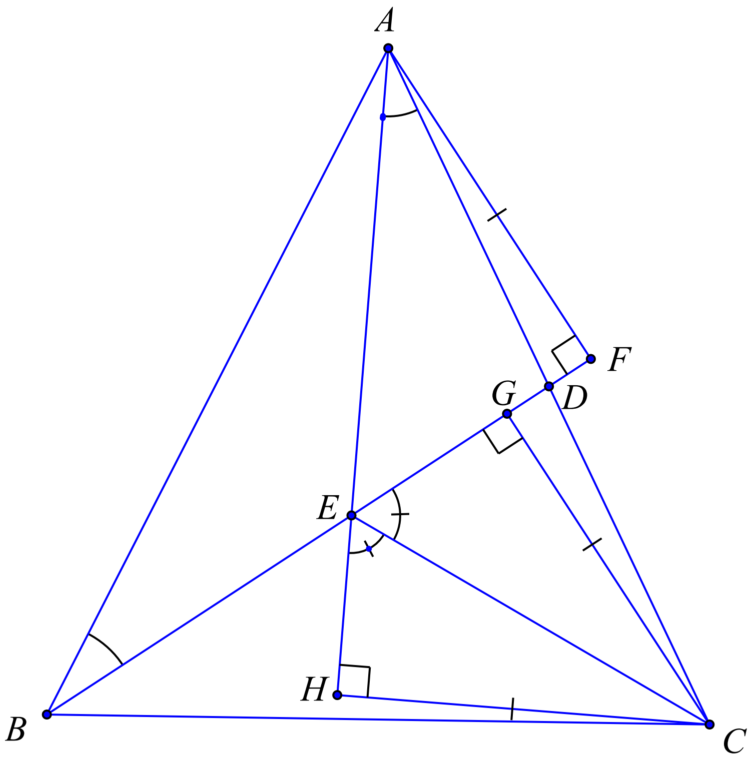
A. 50° **B.** 130° **C.** 50° và 130° **D.** 80°

B. Tự luận

Câu 1. **(HSG 7 huyện Lục Nam năm 2020 - 2021)**

Cho ΔABC cân tại A. Trên đường trung tuyến BD lấy điểm E sao cho $\widehat{DAE}=\widehat{ABD}$ (E nằm giữa B và D). Chứng minh rằng $\widehat{DAE}=\widehat{ECB}$.

Lời giải



Vẽ AF vuông góc BD, CG vuông góc BD, CH vuông góc với AE. Ta có $\Delta ABF=\Delta CAH$ (cạnh huyền – góc nhọn). Suy ra: $AF=CH$.

$\Delta ADF = \Delta CDG(ch - gn)$ suy ra $AF = CG$.

Từ đó ta có $CH = CG$.

$\Delta CEH = \Delta CEG$ (ch-cgv)

$\Rightarrow \widehat{CEH} = \widehat{CEG}$

Mà $\widehat{CEG} = \widehat{EBC} + \widehat{ECB}; \widehat{CEH} = \widehat{EAC} + \widehat{ECA};$

Do đó: $\widehat{EBC} + \widehat{ECB} = \widehat{EAC} + \widehat{ECA}$ (1)

Mặt khác: $\widehat{EBA} + \widehat{EBC} = \widehat{ECB} + \widehat{ECA}$

Lấy (1) trừ (2) theo vế ta có: $\widehat{EBC} + \widehat{ECB} - \widehat{EBA} - \widehat{EBC} = \widehat{EAC} + \widehat{ECA} - \widehat{ECB} - \widehat{ECA}$

$\widehat{ECB} - \widehat{EBA} = \widehat{EAC} - \widehat{ECB} \Rightarrow \widehat{ECB} - \widehat{EBA} = \widehat{EBA} - \widehat{ECB}$

$\Rightarrow \widehat{EBA} = \widehat{ECB}$

$\Rightarrow \widehat{DAE} = \widehat{ECB}$ (đpcm)

Dạng 2. Chứng minh đoạn thẳng bằng nhau

Dạng 3. Chứng minh 3 điểm thẳng hàng

Dạng 4. Bất đẳng thức trong tam giác

A. Trắc nghiệm (nếu có)

Câu 1. **(HSG 7 huyện Lục Nam năm 2020 - 2021)**

Cho tam giác ABC, hai đường trung tuyến BM, CN. Biết $AC > AB$. Khi đó độ dài hai đoạn thẳng BM và CN là:

A. $BM \le CN$ **B.** $BM > CN$ **C.** $BM < CN$ **D.** $BM = CN$

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Quỳnh Phụ năm 2021 - 2022)

Cho ΔABC có độ dài ba cạnh là $BC = a,\ AC = b,\ AB = c$ thỏa mãn: $a^2 + b^2 > 5c^2$.

Chứng minh rằng: $\widehat{C} < 60^\circ$

Lời giải

Trong ΔABC: Giả sử $c \ge a > 0 \Rightarrow c^2 \ge a^2$

Mà $a^2 + b^2 > 5c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 > 5a^2 \Rightarrow b^2 > 4a^2 \Rightarrow b > 2a$ (1)

Vì $c^2 \ge a^2 \Rightarrow c^2 + b^2 \ge a^2 + b^2$ mà $a^2 + b^2 > 5c^2$

$\Rightarrow c^2 + b^2 > 5c^2 \Rightarrow b^2 \geq 4c^2 \Rightarrow b > 2c$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 2b > 2a + 2c \Rightarrow b > a + c$ (vô lý vì a, b, c là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác).

Vậy $c < a$

Lập luận tương tự có $c < b$

Suy ra c là cạnh ngắn nhất $\Rightarrow \hat{C}$ nhỏ nhất

$\Rightarrow \begin{cases} \hat{C} < \hat{A} \\ \hat{C} < \hat{B} \end{cases} \Rightarrow 3\hat{C} < \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$

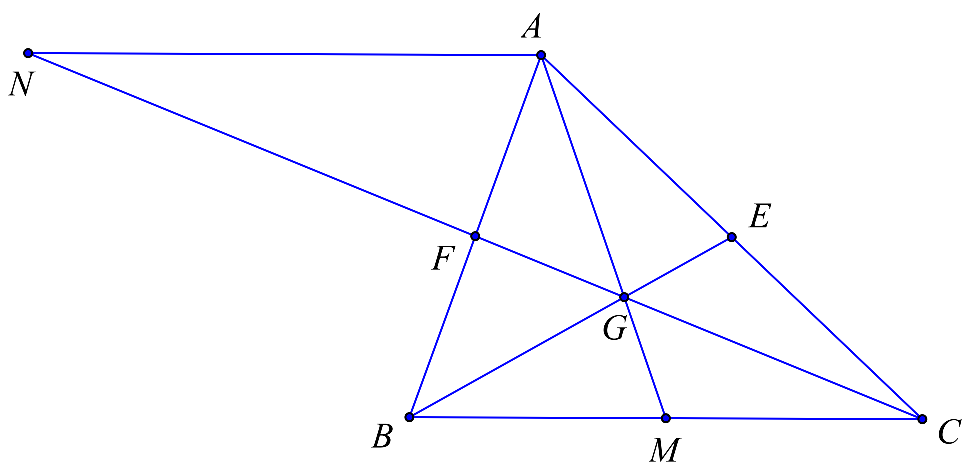
$\Rightarrow 3\hat{C} < 180^\circ \Rightarrow \hat{C} < 60^\circ$

KL. Vậy $\hat{C} < 60^\circ$

Câu 2. (HSG 7 huyện An Nhơn năm 2021 - 2022)

Cho tam giác ABC, trung tuyến AM và BE cắt nhau tại G. Chứng minh rằng nếu $\widehat{AGB} \leq 90^\circ$ thì $AC + BC > 3AB$.

Lời giải



Vẽ trung tuyến CF, trên tia đối tia FC lấy điểm N sao cho $NF = CF$.

Xét ΔAFN và ΔBFC có:

$AF = BF$; $\widehat{AFN} = \widehat{BFC}$; $NF = CF$;

$\Rightarrow \Delta AFN = \Delta BFC$ (c.g.c)

$\Rightarrow AN = BC$

Xét ΔACN có $AN + AC > NC$ (BĐT tam giác)

Hay $BC + AC > NC$ (1)

Lại có G là trọng tâm của tam giác ABC

$\Rightarrow CF = 3GF \Rightarrow NC = 6GF$ (2)

Ta chứng minh nếu nếu $\widehat{AGB} \le 90^\circ$ thì $GF \ge \frac{AB}{2}$

Thật vậy, giả sử $GF < \frac{AB}{2} = AF = BF$

Thì $\widehat{FAG} < \widehat{AGF}$ và $\widehat{FBG} < \widehat{BGF}$

suy ra $\widehat{FAG} + \widehat{FBG} < \widehat{AGF} + \widehat{BGF} = \widehat{AGB} \le 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{FAG} + \widehat{FBG} + \widehat{AGB} < 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ (Vô lý)

Vậy $GF \ge \frac{AB}{2}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow NC \ge 3AB \Rightarrow AC + BC > 3AB$

Dạng 5. Chứng minh song song, vuông góc

A. Trắc nghiệm (nếu có)

B. Tự luận

Dạng 6. Hình khối trong thực tiễn

A. Trắc nghiệm (nếu có)

B. Tự luận

Dạng 7. Bài toán chứng minh tổng hợp

Câu 1. (HSG 7 huyện Hưng Hà năm 2022 - 2023)

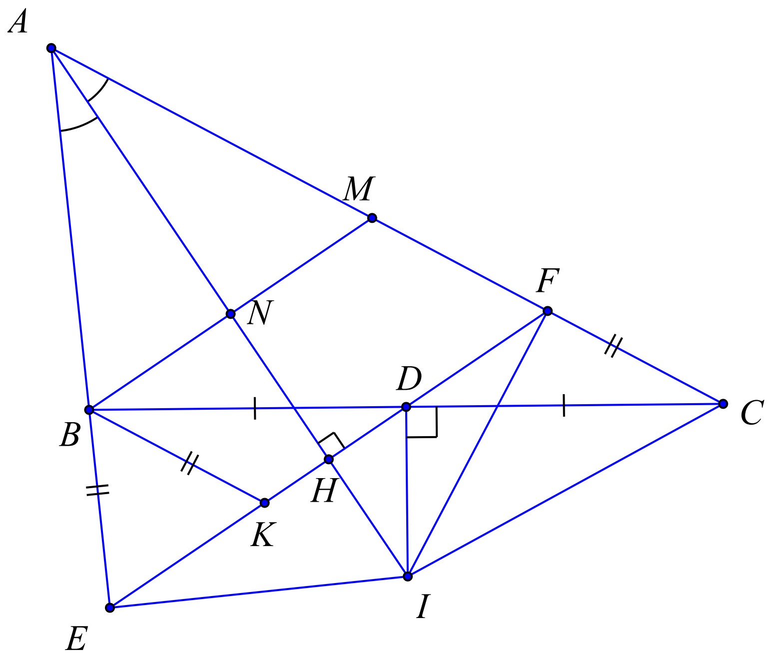
Cho ΔABC có $AB < AC$. Từ trung điểm D của BC vẽ đường vuông góc với tia phân giác của góc A tại H. Đường thẳng này cắt các tia AB tại E và AC tại F Vẽ tia BM song song với EF $(M \in AC)$.

a) Chứng minh ΔABM cân.

b) Chứng minh: $MF = BE = CF$.

c) Qua D vẽ đường thẳng vuông góc với BC cắt tia AH tại I. Chứng minh: $IF \perp AC$.

Lời giải



a) Gọi giao điểm của AH và BM là $N.$

Có $AH \perp EF$ và $BM // EF \Rightarrow AH \perp BM$ hay $AN \perp BM$

ΔABM có AN vừa là đường phân giác vừa là đường cao nên ΔABM cân tại A

b) Chứng minh ΔAEF cân tại $A \Rightarrow MF = BE$ (1)

Vẽ $BK // AC\ (K \in EF)$. Chứng minh $\Delta BKD = \Delta CFD \Rightarrow BK = CF$

Chứng minh ΔEBK cân tại $B \Rightarrow BE = BK$. Do đó $BE = CF$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow MF = BE = CF$ (đpcm)

c) Nối $IB,\ IC$. Chứng minh được $IB = IC$

Chứng minh được: $\Delta AEI = \Delta AFI \Rightarrow IE = IF$ và $\widehat{AEI} = \widehat{AFI}$ (3)

Chứng minh được: $\Delta BEI = \Delta CFI \Rightarrow \widehat{BEI} = \widehat{CFI}$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \widehat{AFI} = \widehat{CFI}$, mà 2 góc này kề bù nên $\widehat{AFI} = \widehat{CFI} = 90^\circ \Rightarrow IF \perp AC$

Câu 2. (HSG 7 huyện Hưng Hà năm 2022 - 2023)

Cho ΔABC có ba góc nhọn ($AB < AC$). Vẽ về phía ngoài tam giác ΔABC các ΔABD và ΔACE đều. Gọi I là giao của CD và BE, K là giao của AB và DC.

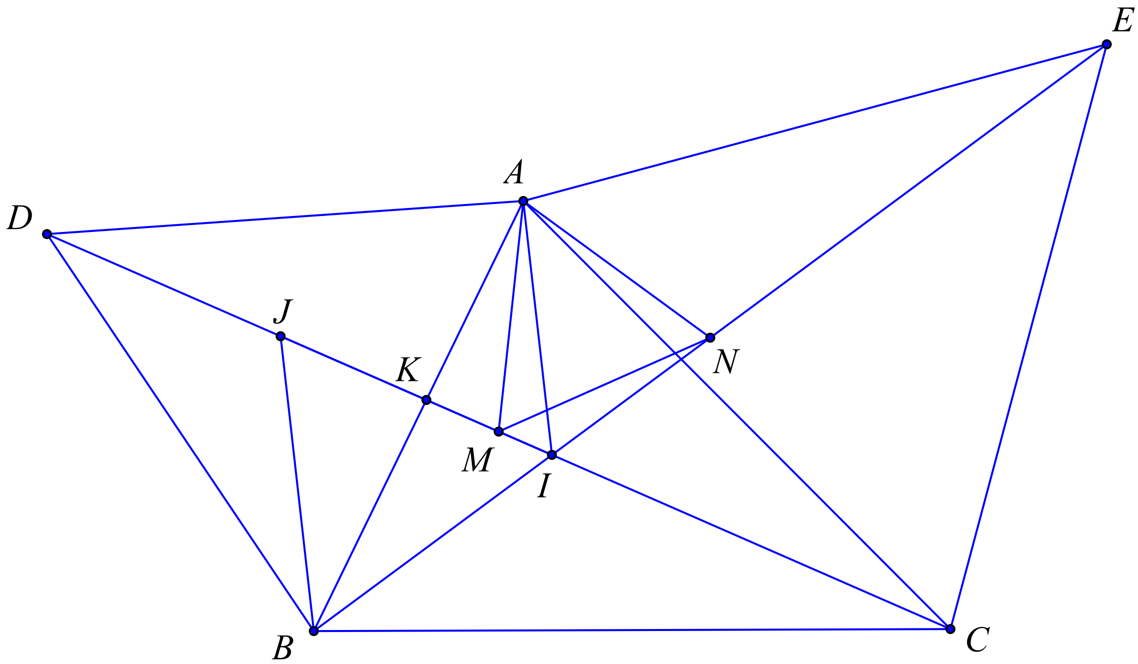
a) Chứng minh rằng: $\Delta ADC = \Delta ABE$

b) Chứng minh rằng: $\widehat{DIB} = 60^\circ$.

c) Gọi M và N lần lượt là trung điểm của DC và BE. Chứng minh rằng ΔAMN đều.

d) Chứng minh rằng IA là phân giác của $\widehat{EID}$.

Lời giải



a) Chứng minh rằng: $\Delta ADC = \Delta ABE$

Xét ΔADC và ΔABE, có

$AD = AB$ (ΔABD đều)

$AC = AE$ (ΔACE đều)

$\widehat{DAC} = \widehat{BAE} (= 60^\circ + \widehat{BAC})$

$\Rightarrow \Delta ADC = \Delta ABE$ (c.g.c)

b) Chứng minh rằng: $\widehat{DIB} = 60^\circ$

Từ $\Delta ADC = \Delta ABE$ (câu a) $\Rightarrow \widehat{ABE} = \widehat{ADC}$

Mà $\widehat{BKI} = \widehat{AKD}$ (đối đỉnh).

Khi đó xét ΔBIK và ΔDAK có: $\widehat{ABE} = \widehat{ADC}$, $\widehat{BKI} = \widehat{AKD}$

$\Rightarrow \widehat{BIK} = \widehat{DAK} = 60^\circ$ (đpcm)

c) Gọi M và N lần lượt là trung điểm của DC và BE. Chứng minh rằng ΔAMN đều.

Từ $\Delta ADC = \Delta ABE$ (câu a) $\Rightarrow CM = EN$ và $\widehat{ACM} = \widehat{AEN}$

$\Delta ACM = \Delta AEN$ (c.g.c) $\Rightarrow AM = AN$ và $\widehat{CAM} = \widehat{EAN}$

$\Rightarrow \widehat{MAN} = \widehat{CAE} = 60^\circ$. Do đó ΔAMN đều.

d) Chứng minh rằng IA là phân giác của $\widehat{EID}$.

Trên tia ID lấy điểm J sao cho $IJ = IB \Rightarrow \Delta BIJ$ đều

$\Rightarrow BI = BJ$ và $\widehat{JBI} = \widehat{DBA} = 60^\circ$

$\Rightarrow \widehat{IBA} = \widehat{JBD}$

$\Delta IBA = \Delta JBD$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AIB} = \widehat{DJB} = 120^\circ$ mà $\widehat{BID} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{AID} = 60^\circ$

Từ đó suy ra $\widehat{AID} = \widehat{AIE} = 60^\circ$

$\Rightarrow IA$ là phân giác của $\widehat{EID}$.

Câu 3. (HSG 7 huyện Hưng Hà năm 2022 - 2023)

Cho ΔABC, M là trung điểm của BC. Trên tia đối của của tia MA lấy điểm E sao cho $ME = MA$. Chứng minh rằng:

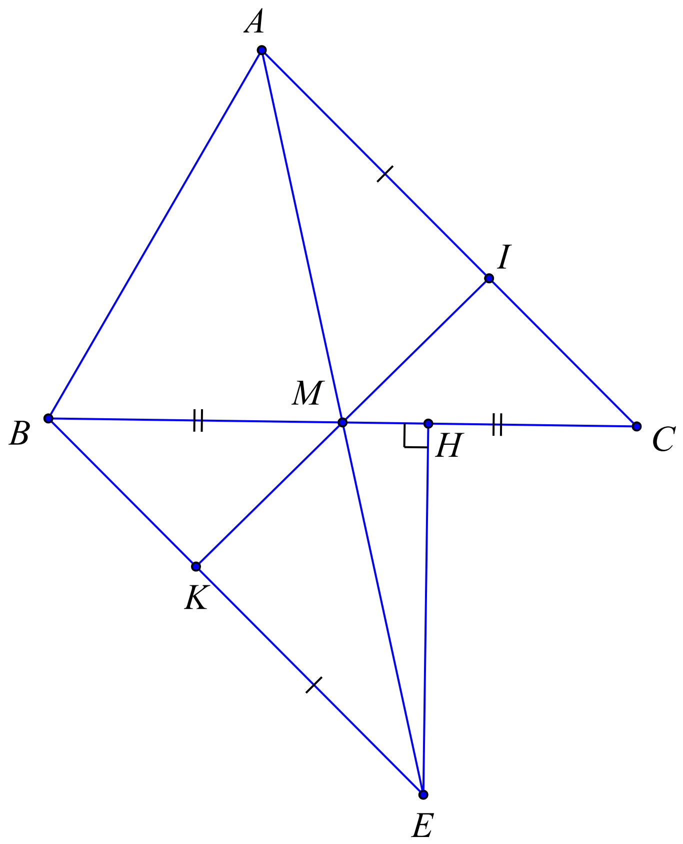
a) $AC = EB$ và $AC // BE$.

b) Gọi I là một điểm trên AC, K là một điểm trên EB sao cho $AI = EK$.

Chứng minh: Ba điểm I, M, K thẳng hàng.

c) Từ E kẻ $EH \perp BC$ $(H \in BC)$. Biết $\widehat{HBE} = 50^\circ$; $\widehat{MEB} = 25^\circ$. Tính $\widehat{HEM}$ và $\widehat{BME}$

Lời giải



a) Chứng minh: $AC = EB$ và $AC\,//\,BE.$

Xét ΔAMC và ΔEMB có:

$ME = MA$ (gt)

$\widehat{AMC} = \widehat{EMB}$ (đối đỉnh)

$BM = MC$ (gt)

$\Rightarrow \Delta AMC = \Delta EMB$ (c.g.c)

$\Rightarrow AC = EB$ (cặp cạnh tương ứng)

Vì $\Delta AMC = \Delta EMB \Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{MEB}$ (cặp góc tương ứng)

Mà 2 góc ở vị trí so le trong được tạo bởi đường thẳng AC và EB cắt đường thẳng AE.

$\Rightarrow AC\,//\,BE$ (dấu hiệu nhận biết) .

b) Chứng minh: Ba điểm I, M, K thẳng hàng.

Xét ΔAMI và ΔEMK có:

$ME = MA$ (gt)

$\widehat{MAI} = \widehat{MEK}$ (vì $\Delta AMC = \Delta EMB$)

$AI = EK$ (gt)

$\Rightarrow \Delta AMI = \Delta EMK$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{AMI} = \widehat{EMK}$ (cặp góc tương ứng)

Mà $\widehat{AMI} + \widehat{IME} = 180^\circ$ (tính chất hai góc kề bù)

$\Rightarrow \widehat{EMK} + \widehat{IME} = 180^o$

$\Rightarrow$ Ba điểm I, M, K thẳng hàng.

c) Tính $\widehat{HEM}$ và $\widehat{BME}$.

ΔBHE vuông tại H có

$\widehat{BEH} + \widehat{HBE} = 90^\circ$ (tính chất tam giác vuông)

Mà $\widehat{HBE} = 50^\circ$ (gt)

$\Rightarrow \widehat{BEH} = 90^\circ - \widehat{HBE} = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$

$\Rightarrow \widehat{HEM} = \widehat{HEB} - \widehat{MEB} = 15^\circ + 90^\circ = 105^\circ$

$\widehat{BME}$ là góc ngoài tại đỉnh M của ΔHEM

$\Rightarrow \widehat{BME} = \widehat{HEM} + \widehat{MHE} = 15^\circ + 90^\circ = 105^\circ$ định lý góc ngoài của tam giác)

Câu 4. (HSG 7 huyện Kim Sơn năm 2021 - 2022)

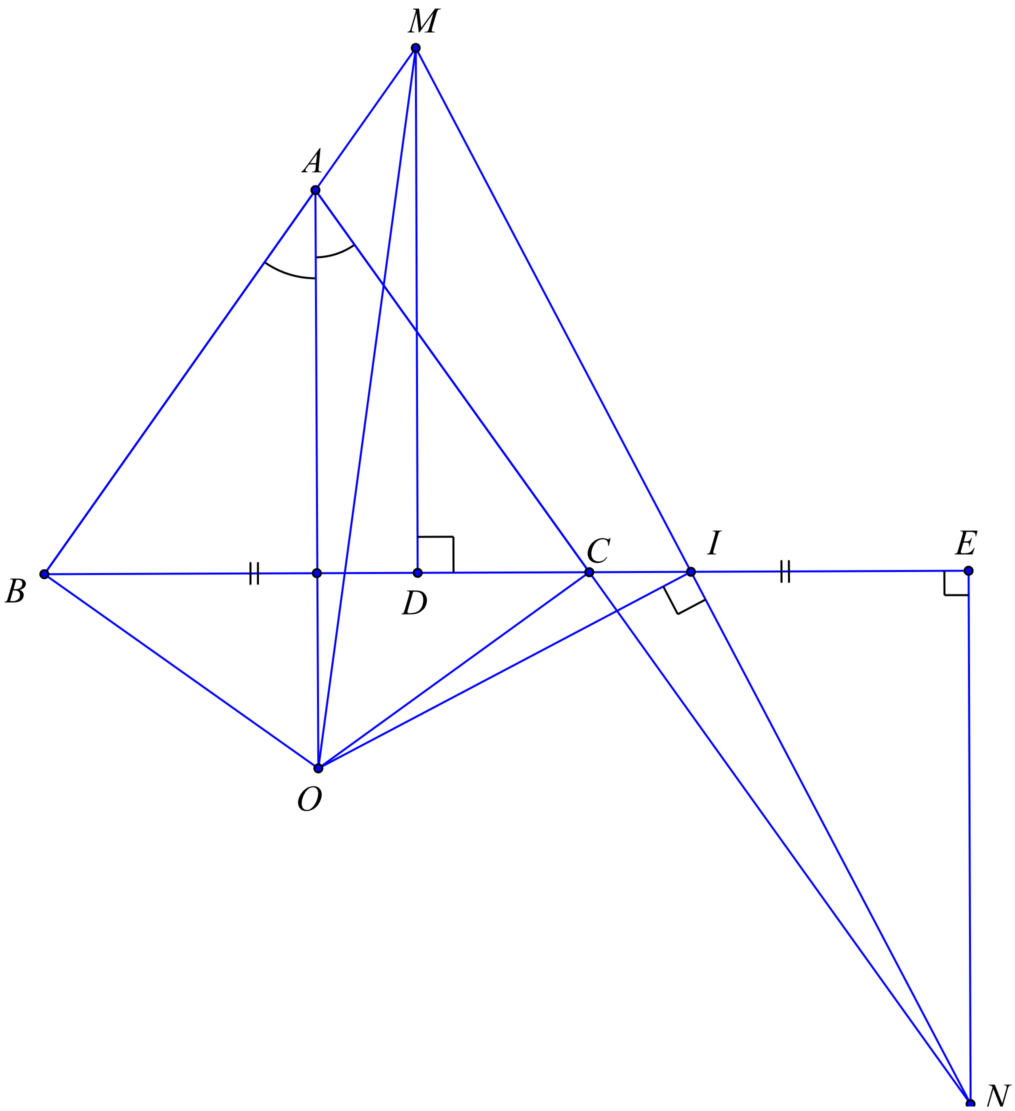
Cho tam giác ABC cân tại A. Trên cạnh BC lấy điểm $D(D \neq B, C)$. Trên tia đối của tia CB, lấy điểm E sao cho $CE = BD$. Đường vuông góc với BC kẻ từ D cắt BA tại M. Đường vuông góc với BC kẻ từ E cắt tia AC tại N, MN cắt BC tại I.

a) Chứng minh rằng: $DM = EN$

b) Chứng minh rằng: $IM = IN; BC < MN$

c) Gọi O là giao của đường phân giác góc A và đường thẳng vuông góc với MN tại I. Chứng minh rằng: $\Delta BMO = \Delta CNO$. Từ đó suy ra điểm O cố định.

Lời giải



a) Tam giác ABC cân tại A nên $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$

$\widehat{NCE} = \widehat{ACB}$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{NCE}$

$BD = CE$ (gt)

$\widehat{MDB} = \widehat{CEN} = 90^\circ$

Do đó: $\Delta MDB = \Delta NEC$ (g.c.g)

$\Rightarrow DM = EN$ (hai cạnh tương ứng)

b) Chứng minh được: $\Delta MDI = \Delta NEI\ \ (g.c.g) \Rightarrow MI = NI$ (hai cạnh tương ứng)

Vì $BD = CE$ (do $\Delta MDB = \Delta NEC$) nên $BC = DE$

Lại có ΔDMI vuông tại D nên $DI < MI$

ΔENI vuông tại E nên $IE < IN$

Do đó $DI + IE < MI + IN \Rightarrow DE < MN$

$\Rightarrow BC < MN$

c) Chứng minh được $\Delta ABO = \Delta ACO$ (c.g.c)

$\Rightarrow OC = OB$ (hai cạnh tương ứng)

$\widehat{ABO} = \widehat{ACO}$ (hai góc tương ứng)

Xét hai tam giác MIO và tam giác NIO, có

$MI = NI$ (chứng minh câu b)

$\widehat{MIO} = \widehat{NIO} = 90^\circ$

IO là cạnh chung

$\Rightarrow \Delta MIO = \Delta NIO$ (c.g.c)

$\Rightarrow OM = ON$ (hai cạnh tương ứng)

Lại có: $BM = CN$ (vì $\Delta MDB = \Delta NEC$)

Do đó: $\Delta BMO = \Delta CNO$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{MBO} = \widehat{NCO}$

Mặt khác $\widehat{MBO} = \widehat{ACO} \Rightarrow \widehat{NCO} = \widehat{ACO}$ mà đây là hai góc kề bù nên $CO \perp AN$

Vì tam giác ABC cho trước, O là giao điểm của phân giác góc A và đường vuông góc với AC tại C nên O cố định.

Câu 5. (HSG 7 huyện Kim Sơn năm 2021 - 2022)

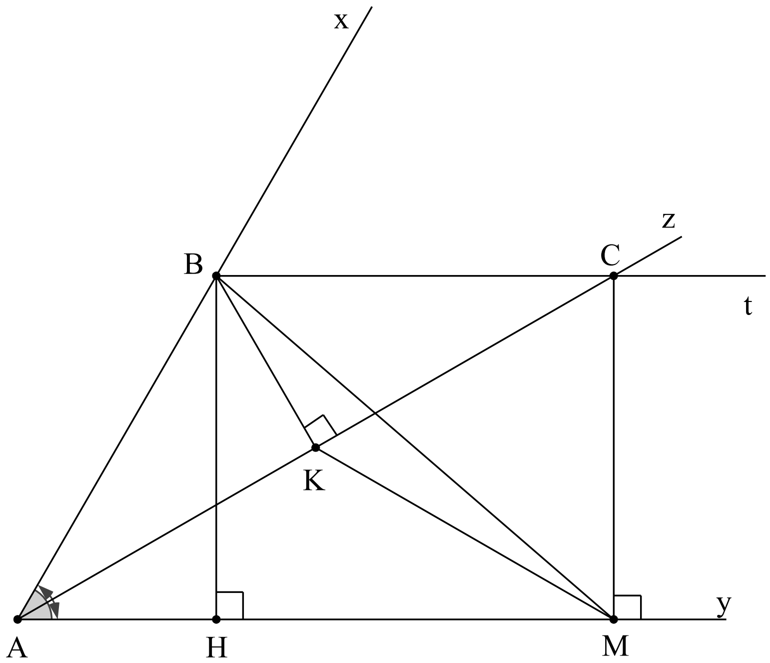
Cho $\widehat{xAy} = 60^\circ$ có tia phân giác Az. Từ điểm B trên Ax kẻ BH vuông góc với Ay tại H, kẻ BK vuông góc với Az tại K và Bt song song với Ay, Bt cắt Az tại C. Từ C kẻ CM vuông góc với Ay tại M. Chứng minh:

a) K là trung điểm của AC.

b) ΔKMC là tam giác đều.

c) Cho $BK = 2cm$. Tính các cạnh ΔAKM.

Lời giải



a) Ta có $Bt//Ay\ (gt) \Rightarrow \widehat{BCA} = \widehat{CAM}$ (so le trong)

Vì Az là phân giác của góc xAy $\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{CAM} \Rightarrow \widehat{BCA} = \widehat{BAC}$

Nên ΔABC cân tại B.

Mà BK là đường cao nên BK đồng thời là đường trung tuyến.

Suy ra K là trung điểm của AC

b) Xét ΔABH và ΔBAK có AB là cạnh huyền chung, $\widehat{ABH} = \widehat{KAB} = 30^\circ; \widehat{AKB} = \widehat{AHB} = 90^\circ$

$\Delta ABH = \Delta BAK$ (ch – gn) $\Rightarrow BH = AK$ (hai cạnh tương ứng)

Mà $AK = \frac{1}{2}AC \Rightarrow BH = \frac{1}{2}AC$

Chứng minh được: $\Delta BHM = \Delta MCB(g.c.g) \Rightarrow BH = CM$ (hai cạnh tương ứng)

Mà $CK = BH = \frac{1}{2}AC \Rightarrow CM = CK \Rightarrow \Delta MKC$ là tam giác cân tại C (1)

Mặt khác: $\widehat{BHM} = \widehat{MCB} = 90^\circ\ (\Delta BHM = \Delta MCB)$ và $\widehat{ACB} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{MCK} = 60^\circ\ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra: ΔMKC là tam giác đều

c) Vì ΔABK vuông tại K mà $\widehat{KAB} = 30^\circ \Rightarrow AB = 2BK = 2.2 = 4$ cm

Xét ΔABK vuông tại K, theo định lý Pi-ta-go ta có: $AK = \sqrt{AB^2 - BK^2} = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12}$ cm

mà $KC = AK$ (theo câu a) $\Rightarrow KC = AK = \sqrt{12}$ cm

ΔKCM đều $\Rightarrow KC = KM = \sqrt{12}$ cm

Vì ΔABC cân tại B nên $AB = CB = 4$ cm; $AH = BK = 2$ cm (vì $\Delta ABH = \Delta BAK$)

$HM = BC = 4$ cm

Vì $\Delta BHM = \Delta MCB \Rightarrow AM = AH + HM = 6$ cm

Câu 6. (HSG 7 huyện Tam Điệp năm 2021 - 2022)

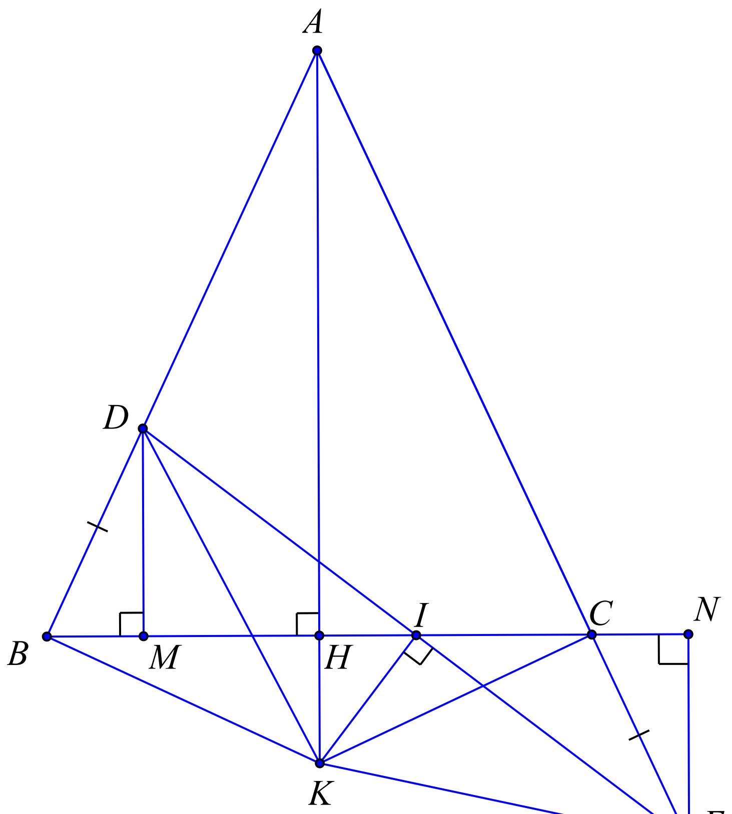
Cho ΔABC cân tại A. Trên cạnh AB lấy điểm D, trên tia đối của tia CA lấy điểm E sao cho $BD = CE$. Qua D và E kẻ các đường thẳng vuông góc với BC lần lượt tại M và N.

a) Chứng minh rằng: $BM = CN$.

b) Gọi I là giao điểm của BC và DE. Chứng minh $DE = 2ID$.

c) Kẻ AH vuông góc với BC tại H. Đường thẳng đi qua I và vuông góc với DE cắt AH tại K. Tính số đo góc DBK.

Lời giải



a) Vì ΔABC cân tại A nên $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ hay $\widehat{DBM} = \widehat{ACB}$.

Mà $\widehat{ECN} = \widehat{ACB}$ (2 góc đối đỉnh)

Suy ra $\widehat{DBM} = \widehat{ECN}$

Do đó $\Delta MDB = \Delta NEC$ (ch-gn)

Suy ra : $BM = CN$

b) Ta có $MD = NE$ (vì $\Delta MDB = \Delta NEC$)

Ta có ΔDMI vuông tại M $\Rightarrow \widehat{MDI} + \widehat{MID} = 90^\circ$

ΔENI vuông tại N $\Rightarrow \widehat{NEI} + \widehat{NIE} = 90^\circ$

Mà $\widehat{MID} = \widehat{NIE}$ (2 góc đối đỉnh)

Suy ra $\widehat{MDI} = \widehat{NEI}$

$\Rightarrow \Delta MDI = \Delta NEI$ (g.c.g)

$\Rightarrow DI = EI$ (2 cạnh tương ứng)

Suy ra I là trung điểm của DE

$\Rightarrow DE = 2.DI$

c) Vì ΔABC cân tại A nên đường cao AH đồng thời là đường trung trực ứng với cạnh BC

Mà K thuộc AH nên $KB = KC$

Vì I là trung điểm của DE và KI vuông góc với DE tại I nên KI là đường trung trực của đoạn thẳng DE. Suy ra: $KD = KE$

Xét ΔBDK và ΔCEK, có:

$BD = CE$ (gt)

$KB = KC$ (cmt)

$KD = KE$ (cmt)

Do đó $\Delta BDK = \Delta CEK$ (c.c.c)

Suy ra $\widehat{DBK} = \widehat{ECK}$ (2 góc tương ứng) (1)

Xét ΔABK và ΔACK, có:

$BK = CK$

$AB = AC$

AK là cạnh chung

Do đó $\Delta BDK = \Delta CEK$ (c.c.c)

Suy ra $\widehat{ABK} = \widehat{ACK}$ hay $\widehat{DBK} = \widehat{ACK}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{ECK} = \widehat{ACK}$

Mà $\widehat{ECK} + \widehat{ACK} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{ACK} = 180^\circ : 2 = 90^\circ$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra $\widehat{DBK} = 90^\circ$

Câu 7. (HSG 7 huyện Hưng Hà năm 2021 - 2022)

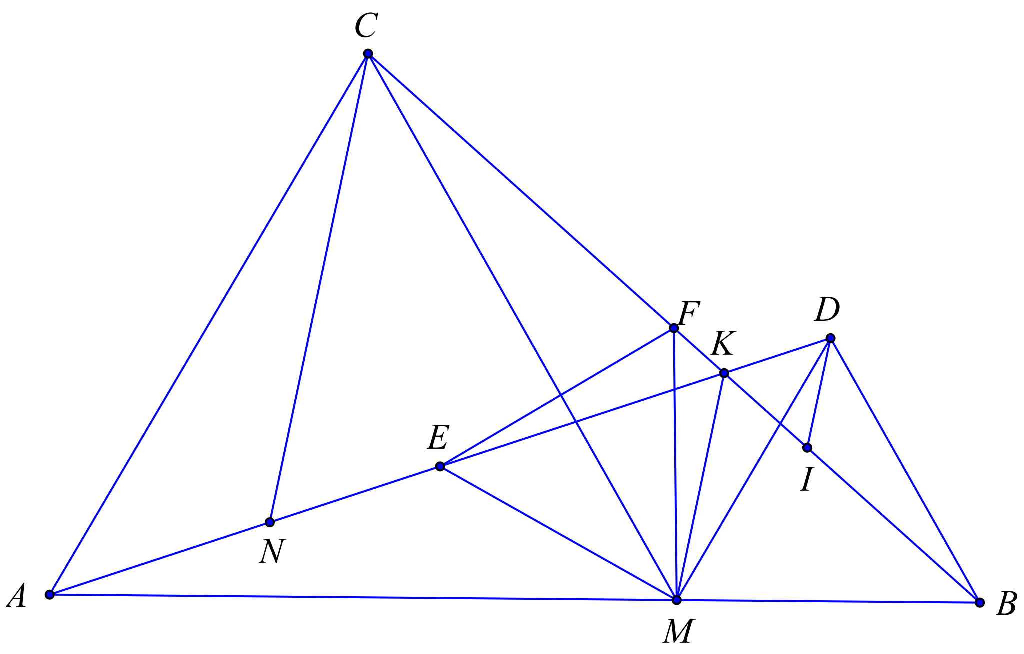
Cho điểm M thuộc đoạn thẳng AB $(MA > MB)$. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB, vẽ các tam giác đều AMC, BMD. Gọi E, F thứ tự là trung điểm của AD, BC. Gọi K là giao điểm AD và BC. Chứng minh rằng:

a) $AD = BC$

b) $\Delta AEM = \Delta CFM$, từ đó suy ra ΔMEF là tam giác đều.

c) $\dfrac{AK + BK - CK - DK}{KM} = 2$

Lời giải



+ Ta có: $\Delta AMC, \Delta BMD$ là các tam giác đều (GT)

$$\Rightarrow \begin{cases} AM = CM = AC \\ BM = DM = BD \\ \widehat{AMC} = \widehat{ACM} = \widehat{CAM} = \widehat{BDM} = \widehat{DBM} = \widehat{BMD} = 60^\circ \end{cases}$$

+ Ta có: $\widehat{AMC} = \widehat{BMD} = 60^\circ$

$\Rightarrow \widehat{AMC} + \widehat{CMD} = \widehat{BMD} + \widehat{CMD}$

$\Rightarrow \widehat{AMD} = \widehat{BMC}$

+ Xét ΔAMD và ΔCMB có:

$AM = CM$
$\widehat{AMD} = \widehat{BMC}$
$DM = BM$

$\Rightarrow \Delta AMD = \Delta CMB (c.g.c)$

$\Rightarrow AD = BC$ (hai cạnh tương ứng)

b)

+ Ta có: $\Delta AMD = \Delta CMB$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{MAD} = \widehat{MCB}$

+ Ta có: $AD = BC (cmt); AE = \frac{AD}{2} (gt); CF = \frac{BC}{2} (gt)$

$\Rightarrow AE = CF$

+ Xét ΔAEM và ΔCFM có:

$AE = CF (cmt)$
$\widehat{MAD} = \widehat{MCB} (cmt)$
$AM = CM (cmt)$

$\Rightarrow \Delta AEM = \Delta CFM (c.g.c)$

Suy ra $ME = MF$ (hai cạnh tương ứng)

$\widehat{AME} = \widehat{CMF}$ (hai góc tương ứng)

$\Rightarrow \widehat{AME} + \widehat{CME} = \widehat{CMF} + \widehat{CME}$

$\Rightarrow \widehat{AMC} = \widehat{EMF} = 60^\circ$

+ Xét ΔMEF có: $\begin{cases} \widehat{EMF} = 60^\circ (cmt) \\ ME = MF (cmt) \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta MFE$ là tam giác đều.

c) Trên đoạn thẳng AK lấy điểm N sao cho $KN = KC$; trên đoạn thẳng BK lấy điểm I sao cho $KI = KD$

Có $\widehat{CKE} = \widehat{KAB} + \widehat{ABK} = \widehat{MCB} + \widehat{MBC} = 60^\circ$

Suy ra $\widehat{CKN} = \widehat{DKI} = 60^\circ$

Do đó ΔCKN và ΔDKI là các tam giác đều

$\Rightarrow KC = KN; KD = DI$ và $\widehat{NCK} = \widehat{IDK} = 60^\circ$

+ Chứng minh được $\widehat{ACN} = \widehat{MCK}$ và $\widehat{KDM} = \widehat{BDI}$

+ Chứng minh $\Delta ACN = \Delta MCK\,(c.g.c)$ và $\Delta BDI = \Delta MKD\,(c.g.c)$

$\Rightarrow AN = KM = BI$ (các cạnh tương ứng)

$\Rightarrow AK = KM + KC$ và $BK = KM + KD$

$\Rightarrow AK + BK = 2KM + CK + DK$

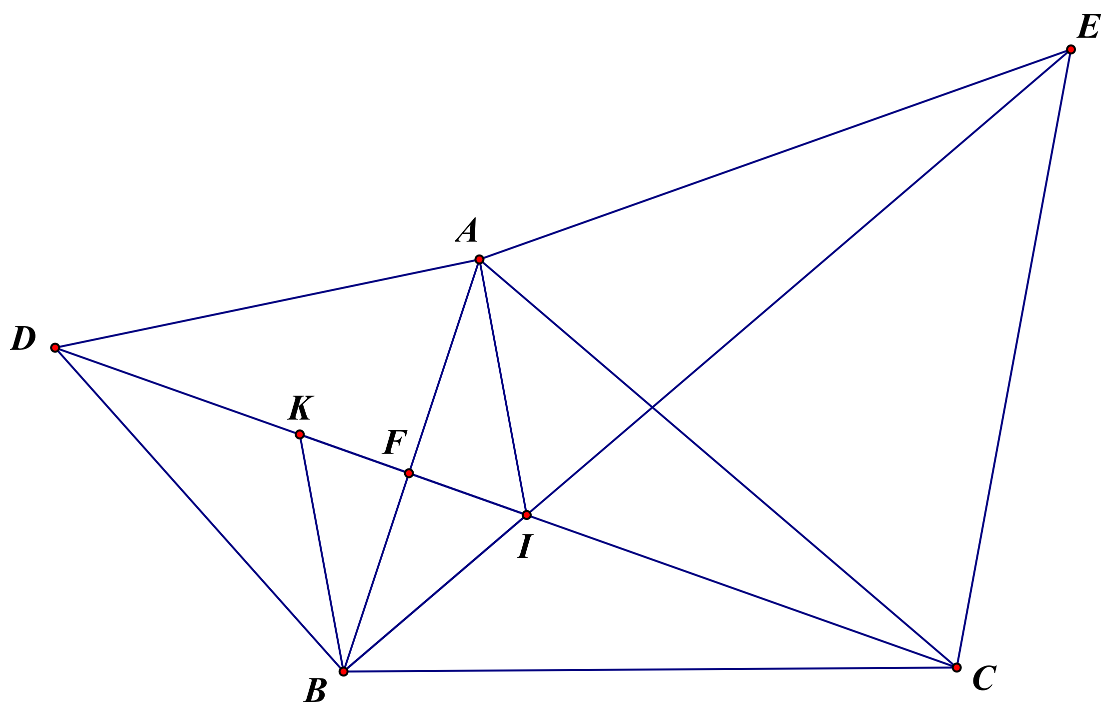
$\Rightarrow \dfrac{AK + BK - CK - DK}{KM} = 2$

Câu 8. (HSG 7 huyện Quỳnh Phụ năm 2021 - 2022)

Cho ΔABC nhọn. Vẽ về phía ngoài tam giác ấy các tam giác đều ABD và ACE. Gọi I là giao điểm của BE và CD.

1. Chứng minh $BE = CD.$
2. Tính $\widehat{BIC}.$
3. Chứng minh rằng $IA + IB = ID.$

Lời giải



1) Chứng minh BE = CD.

Ta có ΔABC đều $\Rightarrow \widehat{CAE}=60^\circ; \Delta ABD$ đều $\Rightarrow \widehat{BAD}=60^\circ$

Suy ra

$\widehat{BAE}=\widehat{BAC}+\widehat{CAE}=\widehat{BAC}+60^\circ$ (vì tia AC nằm giữa hai tia AB và AE)

$\widehat{DAC}=\widehat{BAC}+\widehat{BAD}=\widehat{BAC}+60^\circ$ (vì tia AB nằm giữa hai tia AD và AC)

$\widehat{BAE}=\widehat{DAC}$ (vì cùng bằng $\widehat{BAC}+60^\circ$)

Xét ΔBAE và ΔDAC có

$BA=DA$ (ΔABC đều)

$\widehat{BAE}=\widehat{DAC}$

$AE=AC$ (ΔACE đều)

$\Rightarrow \Delta BAE=\Delta DAC$ (c.g.c)

$\Rightarrow DE=BC$ (vì 2 cạnh tương ứng)

2) Tính góc BIC.

Gọi F là giao điểm của AB và DC, ta có:

$\Delta BAE=\Delta DAC \Rightarrow \widehat{ABE}=\widehat{ADC}$ hay $\widehat{FBI}=\widehat{FDA}$

Xét ΔFBI và ΔFDA, lập luận sau ra được $\widehat{FIB}=\widehat{FAD}$

ΔABD đều $\Rightarrow \widehat{BAD}=60^\circ$ hay $\widehat{FIB}=60^\circ$

$\widehat{BIC}+\widehat{FIB}=180^\circ$ (vì 2 góc kề bù), mà $\widehat{FIB}=60^\circ \Rightarrow \widehat{BIC}=120^\circ$

3) Chứng minh rằng IA + IB = ID.

ΔBID có $\widehat{DIB}=60^\circ$

$\widehat{DBI}>60^\circ$ do $\widehat{DBI}>\widehat{DBA}=60^\circ$

Trên cạnh ID lấy K sao cho $IK=IB$

Suy ra $IK<ID$ suy ra K nằm giữa I và D

Xét ΔBIK có:

$\begin{cases} IK=IB \\ \widehat{KIB}=60^\circ \end{cases} \Rightarrow \Delta BIK$ là tam giác đều $\begin{cases} BK=BI \\ \widehat{KBI}=60^\circ \end{cases}$

$\widehat{DBK}=\widehat{ABI}$

Suy ra được $\Rightarrow \Delta DBK = \Delta ABI$ (c.g.c) $\Rightarrow$ $DK = AI$

Vì K nằm giữa I và D nên $IK + KD = ID$ mà $IK = IB$, $KD = IA$

Suy ra $IB + IA = ID$

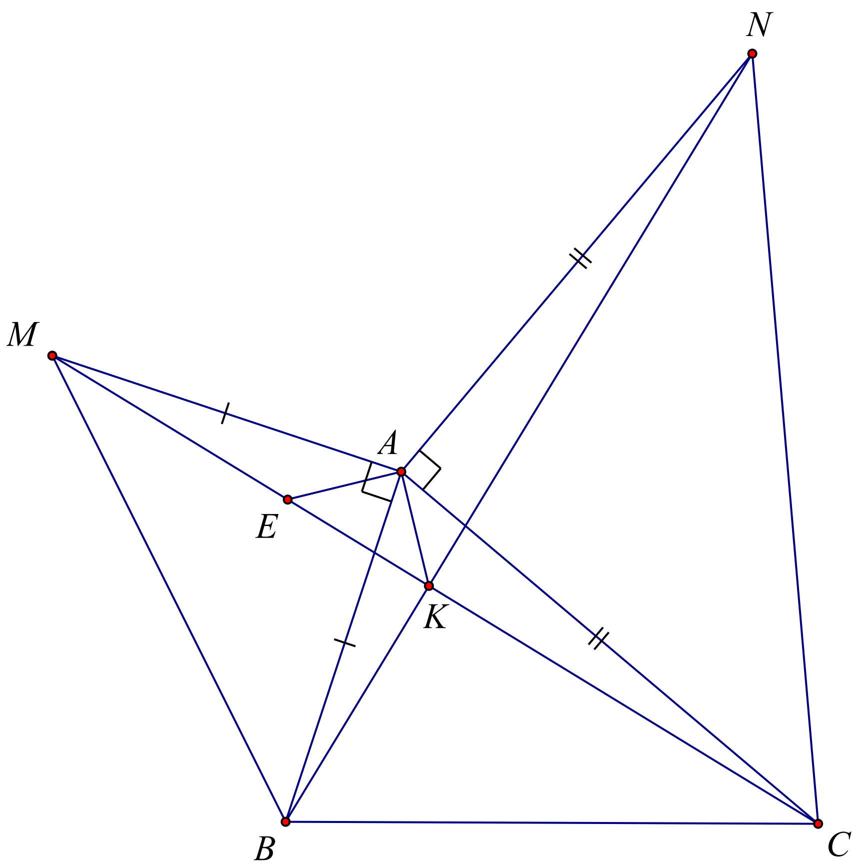
Kết luận: $IB + IA = ID$

Câu 9. (HSG 7 huyện Thái Thụy năm 2021 - 2022)

Cho ΔABC có góc A nhỏ hơn 90^0. Trên nửa mặt phẳng bờ AB không chứa điểm C lấy điểm M sao cho ΔABM vuông cân tại A. Trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa điểm B lấy điểm N sao cho ΔACN vuông cân tại A. Gọi K là giao điểm của BN và CM.

1. Chứng minh $\Delta AMC = \Delta ABN$.
2. Chứng minh $BN \perp CM$.
3. Chứng minh $MN^2 + BC^2 = 2\left(AB^2 + AC^2\right)$
4. Tính $\widehat{AKC}$

Lời giải



1) Chứng minh $\Delta AMC = \Delta ABN$.

Ta $\widehat{MAC} = \widehat{MAB} + \widehat{BAC} = 90^\circ + \widehat{BAC}$

$\widehat{NAB} = \widehat{NAC} + \widehat{CAB} = 90^\circ + \widehat{BAC}$

Nên $\widehat{MAC} = \widehat{NAB}$

Xét ΔAMC và ΔABN có:

+ $AM = AB$ (vì ΔAMB vuông cân tại A)

+ $AC = AN$ (vì ΔACN vuông cân tại A)

+ $\widehat{MAC} = \widehat{NAB}$

Suy ra $\Delta AMC = \Delta ABN$ (c.g.c)

2) Chứng minh $BN \perp CM$.

Gọi I là giao điểm của BN với AC

$\widehat{ANI} = \widehat{KCI}$ (vì $\Delta AMC = \Delta ABN$)

$\widehat{AIN} = \widehat{KIC}$ (đối đỉnh)

Xét ΔKIC có: $\widehat{KCI} + \widehat{KIC} + \widehat{CKI} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{CKI} = 180^\circ - \left(\widehat{KCI} + \widehat{KIC}\right)$

Xét ΔAIN có: $\widehat{ANI} + \widehat{AIN} + \widehat{IAN} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{IAN} = 180^\circ - \left(\widehat{ANI} + \widehat{AIN}\right)$

Nên $\Rightarrow \widehat{IKC} = \widehat{NAI} = 90^\circ$, do đó: $BN \perp CM$ tại K

3) Chứng minh $MN^2 + BC^2 = 2\left(AB^2 + AC^2\right)$

Trong ΔMBK vuông tại K ta có: $MK^2 + BK^2 = MB^2$ (định lí Pytago) (1)

Xét ΔMAB vuông cân tại A ta có: $MB^2 = MA^2 + AB^2 = 2AB^2$ (định lí Pytago)

Nên $MK^2 + BK^2 = 2AB^2$

Trong ΔNKC vuông tại K ta có: $NK^2 + KC^2 = NC^2$ (định lí Pytago) (2)

Xét ΔNAC vuông cân tại A ta có: $NC^2 = NA^2 + AC^2 = 2AC^2$ (định lí Pytago)

Nên $NK^2 + KC^2 = 2AC^2$

Trong ΔMNK vuông tại K ta có: $MK^2 + KN^2 = MN^2$ (định lí Pytago)

Xét ΔKBC vuông tại K ta có: $BK^2 + KC^2 = BC^2$ (định lí Pytago)

Lấy (1) cộng (2) ta có: $MK^2+BK^2+NK^2+KC^2=(MK^2+NK^2)+(BK^2+KC^2)=MN^2+BC^2$

$\Rightarrow 2(AB^2+AC^2)=MN^2+BC^2$ (đpcm)

4) Tính $\widehat{AKC}$

Trên cạnh MC lấy điểm E sao cho $ME=BK$

Xét ΔABK và ΔAME ta có:

$BK=ME$

$\widehat{ABK}=\widehat{AME}$

$AB=AM$

Nên $\Delta ABK=\Delta AME$ (c.g.c) $\Rightarrow AE=AK$ (hai cạnh tương ứng)

$\Rightarrow \Delta AEK$ vuông cân tại A và $\widehat{EKA}=45^\circ$

Mà $\widehat{EKA}+\widehat{AKC}=180^\circ$

Nên $\widehat{AKC}=135^\circ$

Câu 10. (HSG 7 huyện Ý Yên năm 2021 - 2022)

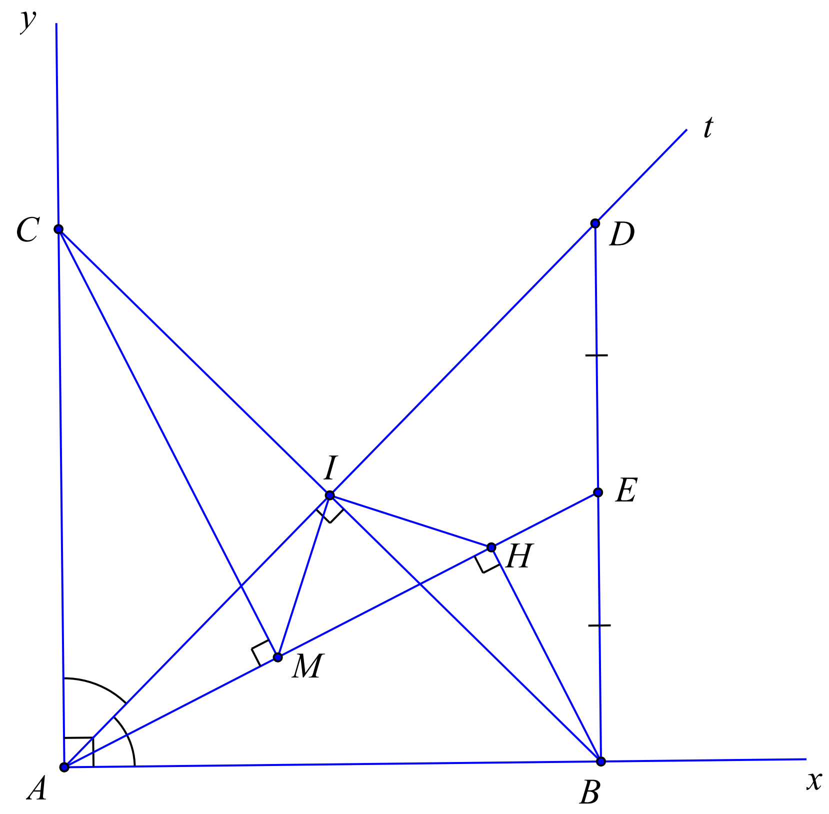
Cho góc xAy vuông, kẻ tia phân giác At của góc xAy. Trên tia At lấy điểm I cố định, qua I kẻ đường thẳng vuông góc với At cắt Ax, Ay lần lượt tại B, C. Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với Ax cắt tia At tại D. Gọi E là trung điểm của BD, gọi M, H lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ C, B xuống AE.

1) Chứng minh $AM=BH$ và $BC^2=8BE^2$

2) Chứng minh $IH>\dfrac{MH}{2}$ và tia phân giác của góc EMC luôn đi qua một điểm cố định

3) Gọi N là trung điểm của AC. Đường thẳng BM cắt DN tại K. Tính số đo $\widehat{BKN}$.

Lời giải



1) Chứng minh $AM = BH$ và $BC^2 = 8BE^2$

+ Xét ΔABC vuông tại A có đường phân giác AI đồng thời là đường cao nên ΔABC vuông cân tại A. Suy ra $AB = AC$ và $IB = IC$.

Xét ΔAHB vuông tại H và ΔCMA vuông tại M có:

$AB = AC$ và $\widehat{HAB} = \widehat{MCA}$ (cùng phụ với $\widehat{MAC}$)

Do đó $\Delta AHB = \Delta CMA$ (ch-gn),

suy ra $AM = BH$.

+ Xét ΔABC và ΔBAD có

$\widehat{CAB} = \widehat{DBA} = 90^\circ$

AB chung

$\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 45^\circ$

$\Rightarrow \Delta ABC = \Delta BAD$ (g.c.g)

$\Rightarrow BC = AD$

Vì ΔABC vuông cân tại A nên ΔBAD vuông cân tại B

$\Rightarrow AD^2 = 2.BD^2 = 2.(2BE)^2 = 8BE^2$

Mà $BC = AD$ nên $\Rightarrow BC^2 = 8BE^2$ (đpcm).

2) Chứng minh $IH > \frac{MH}{2}$ và tia phân giác của góc EMC luôn đi qua một điểm cố định

+ Vì ΔIAB vuông cân tại I nên $\widehat{IAM} + \widehat{MAB} = 45^\circ$

Vì ΔABC vuông cân tại A nên $\widehat{ABC} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{CBD} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{IBH} + \widehat{HBE} = 45^\circ$

Mà $\widehat{MAB} = \widehat{HBE}$ (cùng phụ $\widehat{HEB}$) nên $\widehat{IAM} = \widehat{IBH}$

Từ đó ta có $\Delta IAM = \Delta IBH$ (c.g.c)

$\Rightarrow IM = IH$

Theo bất đẳng thức trong tam giác ta có $IM + IH > MH$ $\Rightarrow 2.IH > MH \Rightarrow IH > \frac{MH}{2}$ (đpcm)

+ Theo chứng minh trên có $\Delta IAM = \Delta IBH \Rightarrow \widehat{AIM} = \widehat{BIH}$

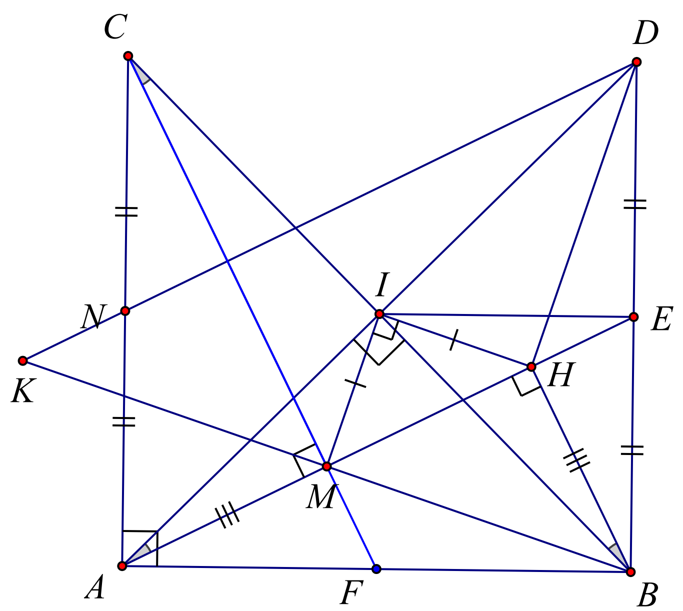
Ta lại có $\widehat{AIM}$ phụ $\widehat{MIB}$ nên $\widehat{BIH}$ phụ $\widehat{MIB}$, hay $\widehat{HIM} = 90^\circ$

Do đó ΔIMH vuông cân tại I $\Rightarrow \widehat{HMI} = 45^\circ$

Mà $\widehat{HMI} + \widehat{IMC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{IMC} = 45^\circ \Rightarrow MI$ tia là phân giác của góc EMC

Do đó phân giác của góc EMC luôn đi qua điểm I cố định (đpcm)

3) Gọi N là trung điểm của AC. Đường thẳng BM cắt DN tại K. Tính số đo $\widehat{BKN}$.



+ Do $AC // BD$ và $AC = BD$, mà N, E lần lượt là trung điểm của AC và BD nên ta chứng minh được $\Delta DNE = \Delta AEN$ (c.g.c), từ đó suy ra $DN // AE \Rightarrow \widehat{BKN} = \widehat{KMA}$ (so le trong)

Gọi N là giao điểm của CM và AB, ta có $\Delta ACF = \Delta BAE$ (g.c.g)

$\Rightarrow AF = BE$

Mà $BE = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}AB$

$\Rightarrow F$ là trung điểm của AB

Có $CF // BH$, F là trung điểm của AB

$\Rightarrow M$ là trung điểm của AH

$\Rightarrow AM = MH$

$\Rightarrow MH = HB$

$\Rightarrow \Delta HMB$ vuông cân tại $H \Rightarrow \widehat{HMB} = 45^\circ$

Mà $\widehat{HMI} = 45^\circ$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{BMI} = 90^\circ$

$\Rightarrow MI \perp KB$

Xét cặp góc kề bù $\widehat{CME}$ và $\widehat{CMA}$, ta có MI là phân giác của $\widehat{CME}$ (theo câu b) và $MI \perp KB$ nên MK là phân giác của $\widehat{CMA} \Rightarrow \widehat{BKN} = \widehat{KMA} = 45^\circ$.

Câu 10. (HSG 7 huyện Trực Ninh năm 2020 - 2021)

Cho ΔABC vuông tại A có $\widehat{B} = 2\widehat{C}$. Kẻ $AH \perp BC\,(H \in BC)$. Trên tia HC lấy D sao cho $HD = HB$. Từ C kẻ đường thẳng CE vuông góc với đường thẳng $AD\,(E \in AD)$.

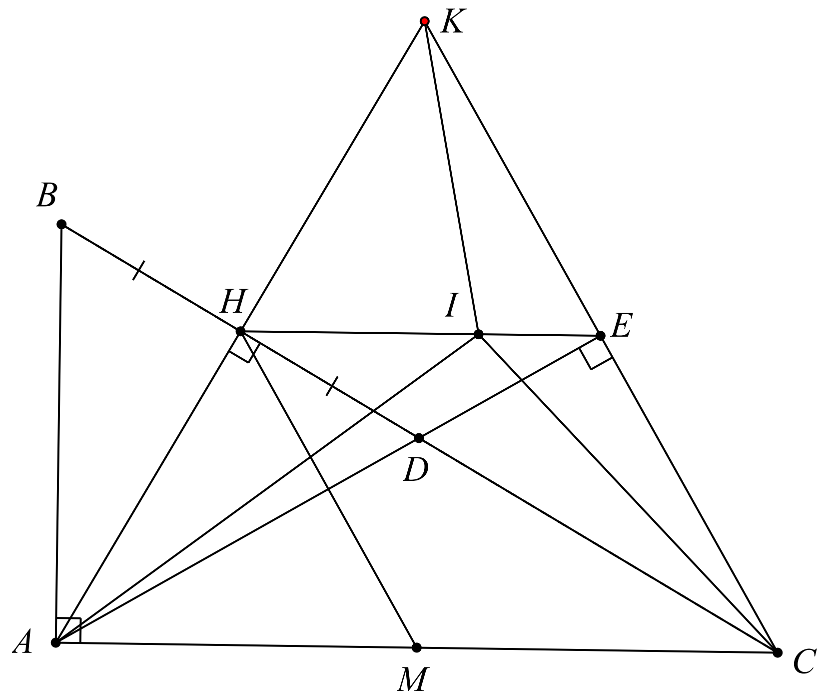
a) Tam giác ABD là tam giác gì ?. Vì sao?

b) Chứng minh $DH = DE; HE // AC$

c) So sánh HE^2 và $(BC^2 - AD^2):4$

d) Gọi K giao AH và CE, lấy điểm I bất kì thuộc đoạn thẳng HE (I khác $H; I$ khác E). Chứng minh $\frac{3}{2}AC < IA + IK + IC$.

Lời giải



a) Tam giác ABD là tam giác gì? Vì sao?

ΔABD có đường cao AH đồng thời là đường trung tuyến ứng với cạnh BD

Suy ra ΔABD cân tại A

Do $\hat{B} = 2\hat{C}$ mà $\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ \Rightarrow \hat{B} = 60^\circ$ và $\hat{C} = 30^\circ$.

ΔABD cân tại A có $\hat{B} = 60^\circ$ suy ra ΔABD là tam giác đều.

b) Chứng minh $DH = DE; HE // AC$

Tính được $\widehat{ACB} = 30^\circ$ và $\widehat{CAD} = 30^\circ$

Suy ra ΔADC cân tại D

Suy ra $DA = DC$

Chứng minh được $\Delta AHD = \Delta CED$ (cạnh huyền - góc nhọn)

Suy ra $DH = DE$

Tính được $\widehat{ADC} = 120^\circ$

Ta có : $\widehat{ADC} = \widehat{HDE}$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \widehat{HDE} = 120^\circ$

Tính được $\widehat{DHE} = 30^\circ \ (3)$

Từ $(1), (3)$ suy ra $\widehat{ACD} = \widehat{DHE}$

Ta có $\widehat{ACD} = \widehat{BHE}$ (cmt) mà hai góc này ở vị trí so le trong

$\Rightarrow HE // AC$ (Dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song)

c) So sánh HE^2 và $(BC^2 - AD^2):4$

Chứng minh ΔAHE cân tại H (tam giác có 2 góc bằng 30°)

Suy ra $AH = HE$ (4)

Trong góc $\widehat{AHC}$ kẻ HM cắt AC tại M sao cho $\widehat{AHM} = 60^\circ$

Chứng minh được ΔHMC cân tại $M \Rightarrow MH = MC$ (5)

Chứng minh được ΔAHM đều $\Rightarrow AH = HM = MA$ (6)

$$\Rightarrow HE = \frac{AC}{2} \Rightarrow \text{HE}^2 = \left(\frac{AC}{2}\right)^2$$

Từ (4) , (5) và (6)

Ta lại có : $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow AC^2 = BC^2 - AB^2$

$\Rightarrow \frac{BC^2 - AD^2}{4} = \frac{AC^2}{4} = \left(\frac{AC}{2}\right)^2$ (vì $AB^2 = AD^2$)

$\Rightarrow HE^2 = \frac{BC^2 - AD^2}{4}$

d) Chứng minh $\frac{3}{2}AC < IA + IK + IC$

Chứng minh ΔKAC đều (tam giác có 2 góc bằng 60°)

$\Rightarrow AK = KC = AC$

Xét ΔIKA có $IK + IA > AK$ (bất đẳng thức tam giác)

Xét ΔIKC có $IK + IC > KC$ (bất đẳng thức tam giác)

Xét ΔIAC có $IC + IA > AC$ (bất đẳng thức tam giác)

$\Rightarrow IK + IA + IC + IA > AK + KC + AC$

$\Rightarrow 2.IA + 2.IK + 2.IC > 3.AC$ (vì $AC = AK = KC$)

$\Rightarrow IA + IK + IC > \frac{3}{2}AC$

Vậy $\frac{3}{2}.AC < IA + IK + IC$ (ĐPCM)

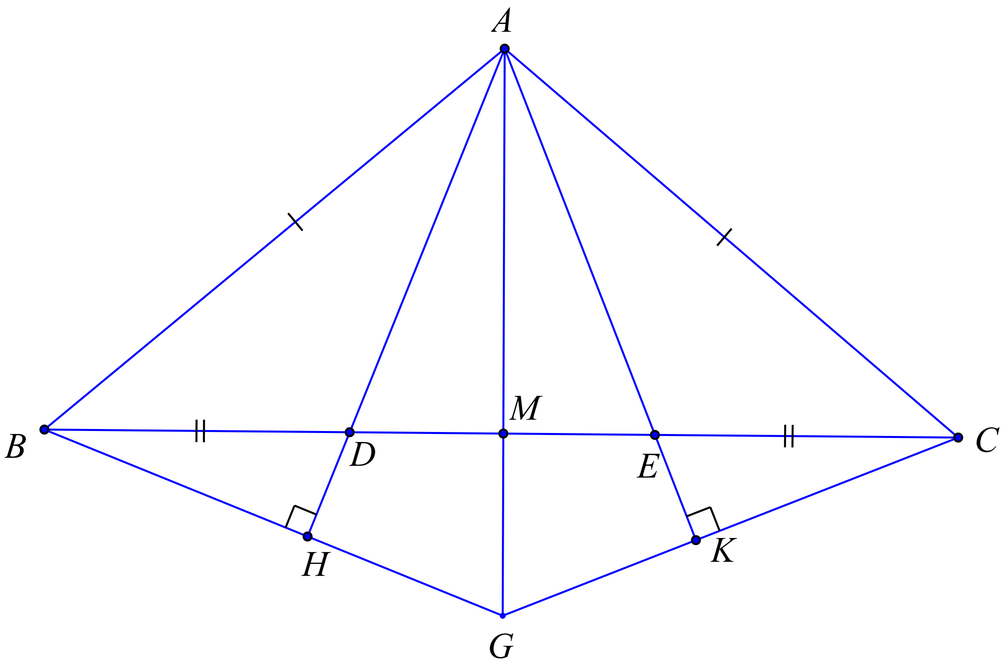
Câu 11. (HSG 7 huyện Lục Ngạn năm 2021 - 2022)

Cho ΔABC cân tại A $(\hat{A} > 90^\circ)$,trên cạnh BC lấy hai điểm D và E sao cho $BD = DE = EC.$ Kẻ $BH \perp AD, CK \perp AE$ $(H \in AD, K \in AE)$, BH cắt CK tại G.

a) Chứng minh: ΔADE cân và $BH = CK$.

b) Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh 3 điểm A, M, G thẳng hàng.

Lời giải



a) Chứng minh: ΔADE cân và $BH = CK$.

* Xét ΔABD và ACE có:

$\widehat{ABD} = \widehat{ACE}$ (do ΔABC cân tại A)

$AB = AC$ (do ΔABC cân tại A)

$BD = CE$ (giả thiết)

Do đó: $\Delta ABD = \Delta ACE$ (c.g.c)

$\Rightarrow AD = AE$ Suy ra ΔADE cân tại A.

Vậy ΔADE cân tại A.

* Xét ΔHBA và ΔKCA có:

$AB = AC$ (do ΔABC cân tại A)

$\widehat{BHA} = \widehat{CKA} = 90^\circ$ (do $HA \perp BG; CK \perp AK$)

$\widehat{BAH} = \widehat{CAK}$ (vì $\Delta ABD = \Delta ACE$ theo phần a)

Do đó $\Delta HBA = \Delta KCA$ (cạnh huyền - góc nhọn)

$\Rightarrow BH = CK$

Vậy $BH = CK$

b) Vì $AB=AC$ nên A nằm trên đường trung trực của BC (1)

Vì $\widehat{ABH}=\widehat{ACK}$ (do $\Delta HBA=\Delta KCA$) mà $\widehat{ABC}=\widehat{ACB}$ (do ΔABC cân tại A) nên $\widehat{ABH}-\widehat{ABC}=\widehat{ACK}-\widehat{ACB}$

Hay $\widehat{GBC}=\widehat{GCB}\Rightarrow\ \Delta BGC$ cân tại G

Suy ra $GB=GC$, Suy ra G nằm trên đường trung trực của BC (2)

Vì M là trung điểm của BC nên M nằm trên đường trung trực của BC (3)

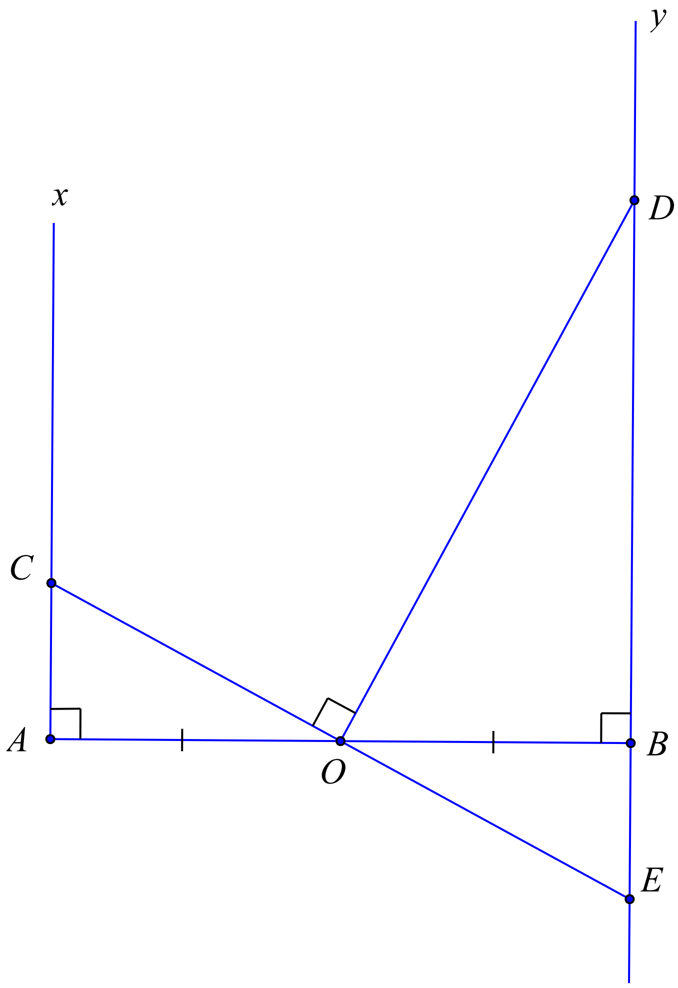
Từ (1), (2), (3) suy ra A, M, G nằm trên đường trung trực của BC

Do đó: A, M, G thẳng hàng.

Câu 13. (HSG 7 huyện Lục Ngạn năm 2021 - 2022)

Cho đoạn thẳng AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AB vẽ hai tia Ax và By lần lượt vuông góc với AB tại A và B. Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng AB. Trên tia Ax lấy điểm C và trên tia By lấy điểm D sao cho góc COD bằng 90°. Chứng minh: $AC.BD=\dfrac{AB^2}{4}$

Lời giải



Kéo dài CO cắt tia đối của tia By tại E.

Xét ΔAOC và ΔBOE có:

$AO = OB$ (do O là trung điểm của AB)

$\widehat{AOC} = \widehat{BOC}$ (hai góc đối đỉnh)

$\widehat{CAO} = \widehat{EBO} = 90^o$ (giả thiết)

Do đó $\Delta AOC = \Delta BOE\,(g.c.g) \Rightarrow AC = BE$ (hai cạnh tương ứng)

Áp dụng đinh lí Py-Ta-Go vào các tam giác vuông ΔBOE và ΔBOD:

$OE^2 = OB^2 + EB^2$

$OD^2 = OB^2 + DB^2$

$\Rightarrow OE^2 + OD^2 = 2.OB^2 + EB^2 + DB^2$

$\Rightarrow DE^2 = 2.OB^2 + EB^2 + DB^2$

$\Rightarrow DE^2 = 2.OB^2 + EB(DE - BD) + DB(DE - BE)$

$\Rightarrow DE^2 = 2.OB^2 + EB.DE - EB.BD + DB.DE - DB.BE$

$\Rightarrow DE^2 = 2.OB^2 + DE(EB + DB) - 2.BD.BE$

$\Rightarrow DE^2 = 2.OB^2 + DE^2 - 2.BD.BE$

$\Rightarrow 2.OB^2 - 2.BD.BE = 0$

$\Rightarrow BD.BE = OB^2$

Mà $BE = AC; OB = \dfrac{AB}{2} \Rightarrow AC.BD = \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2 = \dfrac{AB^2}{4}$

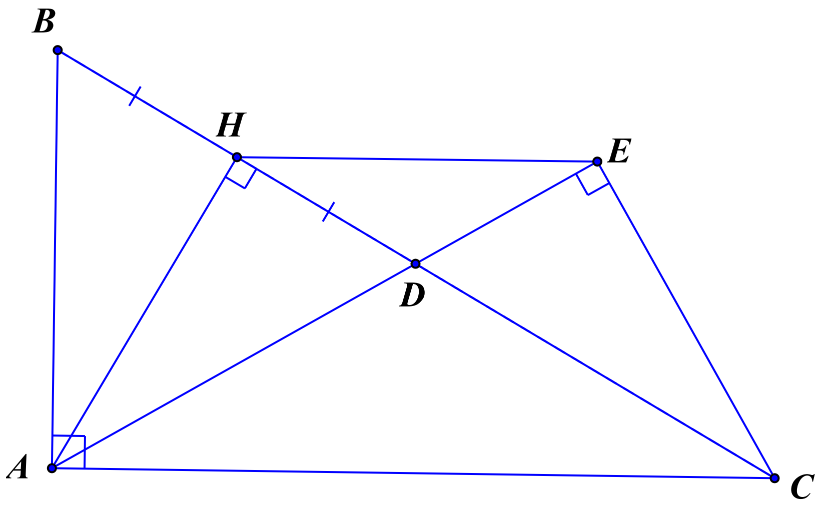
Câu 14. (HSG 7 huyện Lục Nam năm 2020 - 2021)

Cho tam giác ABC vuông tại A, có $\widehat{B} = 60^\circ$. Kẻ $AH \perp BC\,(H \in BC)$. Trên HC lấy điểm D sao cho $HD = HB$. Từ C kẻ CE vuông góc với AD.

a) Chứng minh tam giác ADB đều.

b) Chứng minh: $DA = DC$ và EH vuông góc với AB.

Lời giải



a) Xét ΔAHB và ΔAHD có:

$\widehat{AHB} = \widehat{AHD} = 90^\circ$

$HB = HD$ (gt)

AH là cạnh chung

Do đó: $\Delta AHB = \Delta AHD$ (hai cạnh góc vuông) $\Rightarrow AB = AD \Rightarrow \Delta ABD$ cân tại A.

Mà $\widehat{B} = 60^\circ$ nên tam giác ADB đều.

b) Ta có: $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} + \widehat{DAC} \Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{BAC} - \widehat{BAD} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

Ta lại có: $\widehat{BAC} = \widehat{ABC} + \widehat{BCA} \Rightarrow \widehat{BCA} = \widehat{BAC} - \widehat{ABC} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

$\Rightarrow \widehat{BCA} = \widehat{DAC} = 30^\circ$ hay $\widehat{DCA} = \widehat{DAC} = 30^\circ$

Xét ΔADC có:

$\widehat{DCA} = \widehat{DAC} = 30^\circ$

nên ΔADC là tam giác cân

$\Rightarrow DA = DC$ (đpcm)

$\Delta CEA = \Delta AHC$ (ch-gn)

suy ra $AH = CE$

$\Delta AHD = \Delta CED$ (ch-gn)

suy ra $DH = DE$

Hai tam giác cân ADC và EDH có góc ở đỉnh bằng nhau nên: $\widehat{AEH} = \widehat{EAC}$

Mà hai góc ở vị trí so le trong nên $EH // AC$.

Mà $AC \perp AB$ (gt) $\Rightarrow EH \perp AB$ (đpcm)

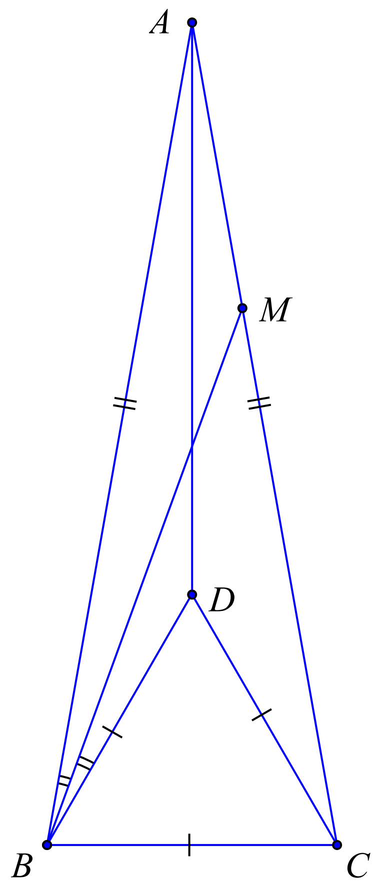
Câu 15. (HSG 7 huyện An Nhơn năm 2021 - 2022)

Tam giác ABC cân tại A có $\hat{A} = 20^\circ$, vẽ tam giác đều DBC (D nằm trong tam giác ABC). Tia phân giác của góc ABD cắt AC tại M. Chứng minh:

a) Tia AD là phân giác của $\widehat{BAC}$.

b) $AM = BC$

Lời giải



a) Xét ΔABD và ΔACD có:

$AB = AC(\text{gt});\ BD = CD(\text{gt});\ AD$ chung

$\Rightarrow \Delta ABD = \Delta ACD$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{CAD}$

Hay AD là phân giác của $\widehat{BAC}$.

b) Tam giác ABC cân tại A có $\hat{A} = 20^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} = \dfrac{180^\circ - 20^\circ}{2} = 80^\circ$

tam giác đều $DBC \Rightarrow \widehat{DBC} = 60^\circ$

$\Rightarrow \widehat{ABD} = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ$

Ta có BM là phân giác của góc $ABD \Rightarrow \widehat{ABM} = 10^\circ$

AD là phân giác của $\widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{BAD} = 10^\circ$

Xét ΔABD và ΔBAM có:

$\widehat{BAM} = \widehat{ABD} (= 20^\circ)$; AB chung; $\widehat{ABM} = \widehat{BAD} (= 10^\circ)$

$\Rightarrow \Delta ABD = \Delta BAM$ (g.c.g)

$\Rightarrow AM = BC$.