ĐỀ 04

Câu 1. (2 điểm)

1) Cho a, b, c là các số khác 0 thỏa mãn a + b + c = 2023 và $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2023}$. Tính giá trị biểu thức

$$A = \left(a^{2021}+b^{2021}\right)\left(b^{2023}+c^{2023}\right)\left(c^{2025}+a^{2025}\right)$$

2) Cho biểu thức B = $\frac{x^5-4x^3-3x+9}{x^4+3x^2+11}$ biết x thỏa mãn $\frac{x}{x^2+x+1}=\frac{1}{4}$.

Chứng minh 3B là số nguyên.

Câu 2. (2 điểm)

1) Giải phương trình: $\frac{x}{x^2+4x+4}+\frac{5x}{x^2+4}=\frac{14}{15}$

2) Cho đa thức A = $12x^2-3y^2+8xy+2x+y$ biết rằng a, b là hai số nguyên dương thỏa mãn với x = a; y = b thì giá trị của đa thức A bằng 0. Chứng minh rằng: 6a + b + 1 là bình phương của một số nguyên.

Câu 3. (2 điểm)

1) Tìm tất cả các số tự nhiên n để C = $n^4-8n^3+23n^2-26n+10$ là số chính phương.

2) Tìm các cặp số nguyên (x; y) thỏa mãn: $x^3+y^3+1=5xy$.

Câu 4. (3 điểm)

1) Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của H trên AB và AC. Gọi M là giao điểm của BF và CE.

a) Chứng minh AB.CF = AC. AE

b) So sánh diện tích tứ giác AEMF và diện tích tam giác BMC.

2) Cho tam giác ABC, điểm D trên cạnh BC sao cho DC = 4BD. Điểm M thay đổi trên đoạn thẳng AD, BM cắt AC tại E, CM cắt AB tại F. Xác định vị trí điểm M trên AD để diện tích tam giác DEF lớn nhất.

Câu 5. (1 điểm) Cho a, b, c là các số dương. Tìm gia trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$M = \frac{33a+17b+c}{a+2b+3c}+\frac{18b+18c}{2a+b+c}+\frac{9c}{a+b}$$

--- Hết---

LỜI GIẢI

Câu 1.

1) Theo đề bài ta có: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2023}$ => $\frac{bc+ac+ab}{abc}=\frac{1}{2023}$

=> $\frac{bc+ac+ab}{abc}=\frac{1}{a+b+c}$ (vì a + b + c = 2023)

=> $(ab+ac+bc)(a+b+c)=abc$

=> $a^2b+ab^2+abc+a^2c+abc+ac^2+abc+b^2c+bc^2=abc$

=> $a^2b+ab^2+abc+a^2c+abc+ac^2+b^2c+bc^2=0$

=> $a^2(b+c)+ab(b+c)+ac(b+c)+bc(b+c)=0$

=> $(b+c)(a^2+ab+ac+bc)=0$

=> $(b+c)[a(a+c)+b(a+c)]=0$

=> $(b+c)(a+c)(a+b)=0$

=> $\left[\begin{array}{l} a=-b \\ b=-c \\ c=-a \end{array}\right. =\text{¿} \left[\begin{array}{l} a^{2021}=(-b)^{2021} \\ b^{2023}=(-c)^{2023} \\ c^{2025}=(-a)^{2025} \end{array}\right. =\text{¿} \left[\begin{array}{l} a^{2021}+b^{2021}=0 \\ b^{2023}+c^{2023}=0 \\ c^{2025}+a^{2025}=0 \end{array}\right.$

Suy ra A = 0

2) Ta có $\frac{x}{x^2+x+1}=\frac{1}{4}$ => 4x = $x^2+x+1 \Longleftrightarrow x^2-3x+1=0$

Ta có $x^5-4x^3-3x+9=(x^2-3x+1)(x^3+3x^2+4x+9)+20x=20x$

$x^4+3x^2+11=(x^2-3x+1)(x^2+3x+11)+30x=30x$

Do đó 3B= $3.\frac{x^5-4x^3-3x+9}{x^4+3x^2+11}=3.\frac{20x}{30x}=2$

Vậy 3B là số nguyên

Câu 2.

1) $\frac{x}{x^2+4x+4}+\frac{5x}{x^2+4}=\frac{14}{15}$ Điều kiện: x $\neq -2$

Với x = 0 không phải là nghiệm của phương trình

$\frac{x}{x^2+4x+4}+\frac{5x}{x^2+4}=\frac{14}{15}$

Với x $\neq 0\, ta\, có: \dfrac{1}{x+\dfrac{4}{x}+4}+\dfrac{5}{x+\dfrac{4}{x}}=\dfrac{14}{15}$ (*)

Đặt y = $x+\dfrac{4}{x}+$¿2 phương trình (*) trở thành $\dfrac{1}{y+2}+\dfrac{5}{y-2}=\dfrac{14}{15}$

=> $7y^2-45y-88=0=$¿$(y-8)(7y+11)=0=$¿$\left[\begin{array}{l} y=8 \\ y=\dfrac{-11}{7}\end{array}\right.$

Với y = 8 thì $x+\dfrac{4}{x}+$¿2 = 8 => $x^2-6x+4=0=$¿$(x-3)^2=5$

$$\Longleftrightarrow\left[\begin{array}{l} x-3=\sqrt{5} \\ x-3=-\sqrt{5}\end{array}\right.\Longleftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=3+\sqrt{5}(tm) \\ x=3-\sqrt{5}(tm)\end{array}\right.$$

Với y = $\dfrac{-11}{7}$ thì $x+\dfrac{4}{x}+$¿2 = $\dfrac{-11}{7}$ => $x^2+\dfrac{25}{7}x+4=0=$¿$\left(x+\dfrac{25}{14}\right)^2=\dfrac{-159}{196}$

Vô lí vì $\left(x+\dfrac{25}{14}\right)^2\geq 0\,\forall x\,(loại)$

Vậy tập nghiệm của phương trình S = $\{3\pm\sqrt{5}\}$

2) Vì x = a, y = b thì giá trị của đa thức A bằng 0 nên ta có

$12a^2-3b^2+8ab+2a+b$ = 0

=> $12a^2+b^2+8ab+2a+b=4b^2$

=> $12a^2+6ab+b^2+2ab+2a+b=4b^2$

=> 6a(2a + b) + b(2a + b) + (2a + b) = $4b^2$

=> (6a + b +1)(2a + b) = $4b^2$

Đặt (6a + b +1, 2a + b) = d (d $\in N^*$)

=>$\begin{cases} 6a+b+1 \vdots d \\ 2a+b \vdots d\end{cases}=$¿$\begin{cases} 6a+b+1 \vdots d \\ 3(2a+b) \vdots d\end{cases}$

¿>$\begin{cases} 6a+b+1 \vdots d \\ 6a+3b \vdots d\end{cases}=$¿$2b-1 \vdots d$

Vì $\begin{cases} 6a+b+1 \vdots d \\ 2a+b \vdots d\end{cases}$ suy ra $4b^2$ = (6a + b +1)(2a + b) $\vdots\, d^2=$¿$2b \vdots$ d

Suy ra $1 \vdots d$ => d = 1

Do đó (6a + b +1, 2a + b) = 1

Mà (6a + b +1)(2a + b) =$(2b)^2$ là số chính phương.

Suy ra 6a + b +1 là bình phương của một số nguyên.

Câu 3.

1) C = $n^4-8n^3+23n^2-26n+10$

= $(n^4-2n^2+1)-8n(n^2-2n+1)+9n^2-18n+9$

= $(n^2-1)^2$-8n$(n-1)^2$ + 9$(n-1)^2$

= $(n-1)^2\left[(n+1)^2-8n+9\right]$

= $(n-1)^2\left[(n-3)^2+1\right]$

TH1: $(n-1)^2$ = 0 => n - 1 = 0 => n = 1 (thỏa mãn)

TH2: $(n-1)^2\neq 0$ suy ra $(n-3)^2+1$ là số chính phương

Đặt $(n-3)^2+1$ = $k^2(k\in$ N)

$\Longleftrightarrow k^2-(n-3)^2=1$

$\Longleftrightarrow (k-n+3)(k+n-3)=1$

TH1: $\begin{cases}k-n+3=1\\k+n-3=1\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}k-n=2\\k+n=4\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}k=1\\n=3\end{cases}(th\text{ỏ}a\,m\tilde{a}n)$

TH2: $\begin{cases}k-n+3=-1\\k+n-3=-1\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}k=-1\\n=3\end{cases}$(không TM k ∈ N)

Vậy n = 1; n = 3.

2) $x^3+y^3+1=5xy$

=> $(x+y)^3-3xy(x+y)+1=5xy$

Đặt x + y = a, xy = b ta được $a^3-3ab+1=5b$

=> a^3 + 1 = b(3a + 5)

Vì 3a + 5 $\neq 0\,\forall$ a ∈Z suy ra b = $\frac{a^3+1}{3a+5}$

Ta có $a^2-4b=(x-y)^2\geq$ 0 $\forall x,y$

Suy ra $a^2-\frac{4a^3+4}{3a+5}\geq$ 0 => $\frac{-a^3+5a^2-4}{3a+5}\geq$ 0

Nếu a ≥ 5 => $-a^3+5a^2-4$ = $a^2(5-a)-4<0$ $v\grave{a}\,3a+5>0$

Suy ra $\frac{-a^3+5a^2-4}{3a+5}$ < 0 (Loại)

Nếu a $\leq-2=¿a^2(5-a)\geq 28=¿-a^3+5a^2-4$ > 0 và $3a+5<0$

Suy ra $\frac{-a^3+5a^2-4}{3a+5}$ < 0 (Loại)

Nếu -2 < a < 5 mà a là số nguyên suy ra a $\in \{-1;0;1;2;3;4\}$

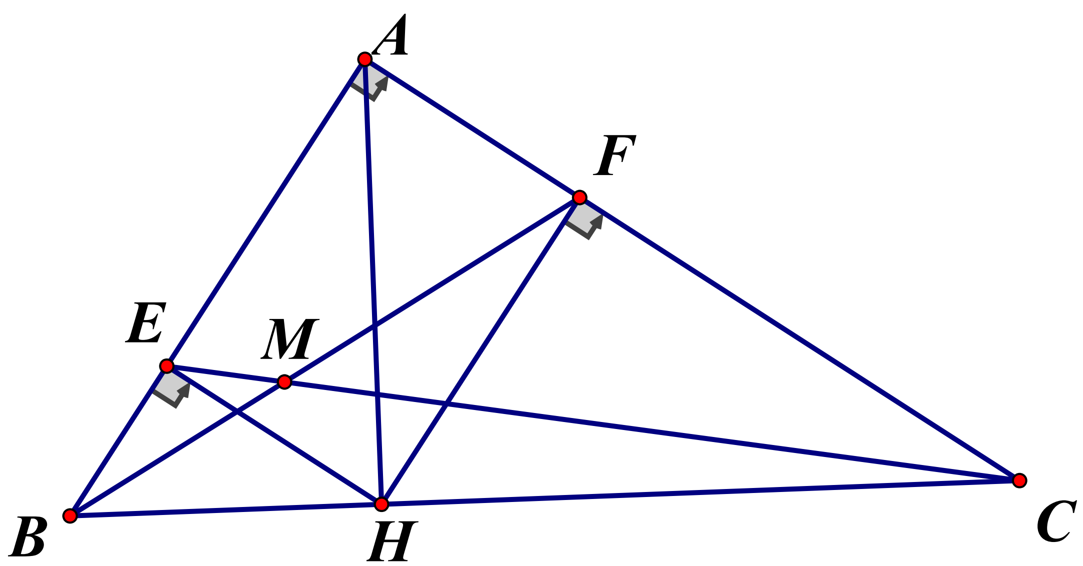
a	-1	0	1	2	3	4
b	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{11}$	2	$\frac{65}{17}$
Kết quả	TM	Loại	Loại	Loại	TM	Loại

Với a = -1 suy ra b = 0 => x + y = -1, xy = 0 => $\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases} (thỏa mãn) \\ \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}\end{array}\right.$

Với a = 3 suy ra b = 2 => x + y = 3, xy = 2 => $\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} (thỏa mãn) \\ \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}\end{array}\right.$

Vậy các cặp số nguyên (x;y) cần tìm (0;-1); (-1;0); (1;2); (2;1)

Câu 4.



1a) Vì HF $\parallel AB$ (cùng vuông góc với AC)

Suy ra $\frac{CF}{AC} = \frac{CH}{BC}$ (1)

Vì HE $\parallel AC$(cùng vuông góc với AB)

Suy ra $\frac{AE}{AB} = \frac{CH}{BC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{CF}{AC} = \frac{AE}{AB}$ => AB.CF = AC.AE

1b) Ta có $\frac{S_{BEC}}{S_{ABC}} = \frac{BE}{BA}$

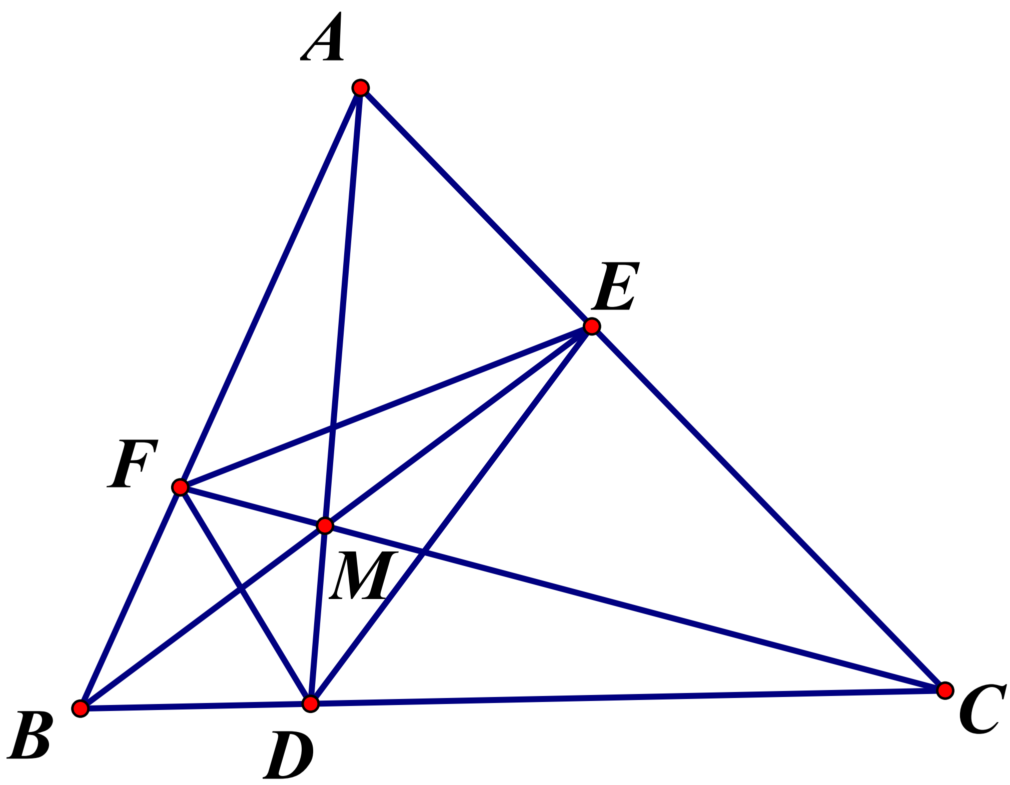
Mà HE ∥ AC => $\frac{BE}{BA} = \frac{BH}{BC}$ suy ra $\frac{S_{BEC}}{S_{ABC}} = \frac{BH}{BC}$

Tương tự ta có $\frac{S_{BFC}}{S_{ABC}} = \frac{CH}{BC}$

Do đó $\frac{S_{BFC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{BEC}}{S_{ABC}} = ¿ \frac{CH+BH}{BC} = 1$

$S_{ABC} = S_{BFC} + S_{BEC}$ => $S_{ABF} = S_{BEC} = ¿ S_{AEMF} = S_{BMC}$

2)



Đặt $\frac{AF}{BF} = x, \frac{BD}{DC} = y, \frac{CE}{EA} = z$ (x, y, z > 0)

Ta có $\frac{AF}{BF} = \frac{S_{AMC}}{S_{BMC}}, \frac{BD}{DC} = \frac{S_{AMH}}{S_{AMC}}, \frac{CE}{EA} = \frac{S_{BMC}}{S_{AMB}}$

=> xyz = $\frac{S_{AMC}}{S_{BMC}} \cdot \frac{S_{AMH}}{S_{AMC}} \cdot \frac{S_{BMC}}{S_{AMB}} = 1$

Từ $\frac{AF}{BF}=x$, $\frac{CE}{EA}=z$ => $\frac{AF}{AB}=\frac{x}{x+1}$, $\frac{AE}{AC}=\frac{1}{z+1}$

Suy ra $\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}}=\frac{S_{AEF}}{S_{ABE}}.\frac{S_{ABE}}{S_{ABC}}=\frac{AF}{AB}.\frac{AE}{AC}=\frac{x}{(x+1)(z+1)}$

Tương tự $\frac{S_{BDE}}{S_{ABC}}=\frac{y}{(y+1)(x+1)}$; $\frac{S_{CDE}}{S_{ABC}}=\frac{z}{(z+1)(y+1)}$

Từ đó ta có:

$\frac{S_{¿}}{S_{ABC}}=1-\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}}-¿\frac{S_{BDE}}{S_{ABC}}-\frac{S_{CDE}}{S_{ABC}}$ = 1 - $\frac{x}{(x+1)(z+1)}$ - $\frac{y}{(y+1)(x+1)}$ - $\frac{z}{(z+1)(y+1)}$

= $\frac{(x+1)(y+1)(z+1)-x(y+1)-y(z+1)-z(x+1)}{(x+1)(y+1)(z+1)}$

= $\frac{xyz+1}{(x+1)(y+1)(z+1)}=\frac{2}{(x+1)(y+1)(z+1)}$

Vì CD = 4BD suy ra y = $\frac{1}{4}$ $suy\ ra\ xz=4$

Suy ra $\frac{S_{¿}}{S_{ABC}}=\frac{2}{\frac{5}{4}(x+1)(z+1)}=\frac{8}{5(xz+x+z+1)}=\frac{8}{5(5+x+z)}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có x + z $\geq 2\sqrt{xz}$ = 4

=> $5(5+x+z)\geq 45=¿\frac{8}{5(5+x+z)}\leq\frac{8}{45}$

Suy ra $\frac{S_{¿}}{S_{ABC}}\leq\frac{8}{45}$ => $S_{¿}\leq\frac{8}{45}S_{ABC}$ (không đổi)

Dấu "=" xảy ra khi x = z = 2

$\Longleftrightarrow \frac{S_{AMC}}{S_{BMC}}=2 \Longleftrightarrow \frac{S_{AMC}}{\frac{5}{4}S_{DMC}}=2 \Longleftrightarrow \frac{S_{AMC}}{S_{DMC}}=\frac{5}{2}$ (Vì $S_{BMC}=\frac{5}{4}S_{DMC}$)

$\Longleftrightarrow \frac{AM}{MD}=\frac{5}{2}$

Vậy để diện tích của tam giác DEF lớn nhất thì M thuộc đoạn AD thỏa mãn $\frac{AM}{MD}=\frac{5}{2}$.

Câu 5.

M = $\frac{33a+17b+c}{a+2b+3c}+\frac{18b+18c}{2a+b+c}+\frac{9c}{a+b}$

=> M + 43 = $\left(\frac{33a+17b+c}{a+2b+3c}+16\right)+\left(\frac{18b+18c}{2a+b+c}+18\right)+\left(\frac{9c}{a+b}+9\right)$

=> M + 43 = $\frac{49(a+b+c)}{a+2b+3c}+\frac{36(a+b+c)}{2a+b+c}+\frac{9(a+b+c)}{a+b}$

=> M + 43 = $(a+b+c)\left(\frac{49}{a+2b+3c}+\frac{36}{2a+b+c}+\frac{9}{a+b}\right)$

Chứng minh $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\geq\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}\forall$ x, y, z > 0

Áp dụng ta có $\frac{7^2}{a+2b+3c}+\frac{6^2}{2a+b+c}+\frac{3^2}{a+b}\geq\frac{(7+6+3)^2}{4a+4b+4c}=\frac{64}{a+b+c}$

=> M + 43 $\geq 64 = ¿ M \geq 21$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{7}{a+2b+3c}=\frac{6}{2a+b+c}=\frac{3}{a+b}$

=> $\frac{7}{a+2b+3c}=\frac{6}{2a+b+c}=\frac{3}{a+b}$ = $\frac{6-3}{a+c}$ => $\begin{cases} b=c \\ a=2b \end{cases}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là 21 khi a = 2b = 2c