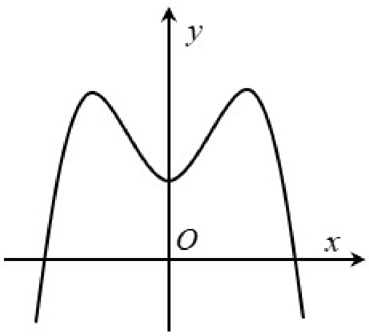
BỘ ĐỀ THỰC CHIẾN 2023
ĐỀ SỐ 3
(Đề gồm có 06 trang)

KỲ THI TỐT NGHIỆP THPT QUỐC GIA NĂM 2023
Bài thi môn: TOÁN
Thời gian làm bài: 90 phút, không kể thời gian phát đề

Họ và tên thí sinh:………………………………………………
Số báo danh:…………………………………………………….

Câu 1: Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



A. $y = x^3 - 3x^2 + 1$. **B.** $y = -x^3 + 3x^2 + 1$. **C.** $y = -x^4 + 2x^2 + 1$. **D.** $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

Lời giải

Chọn C.

Từ hình có đây là hình dạng của đồ thị hàm bậc 4.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \Rightarrow a < 0$

Câu 2: Nghiệm của phương trình $3^{x-1} = 9$ là:

A. $x = -2$. **B.** $x = 3$. **C.** $x = 2$. **D.** $x = -3$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $3^{x-1} = 9 \Leftrightarrow x - 1 = \log_3 9 \Leftrightarrow x - 1 = 2 \Leftrightarrow x = 3$

Câu 3: Cho hàm $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

A. 3. **B.** -5. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B.

Từ bảng biến thiên ta có hàm số đạt giá trị cực tiểu $f(3)=-5$ tại $x=3$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	4	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(-1;0)$

Lời giải

Chọn D.

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$

Câu 5: Cho khối hộp chữ nhật có 3 kích thước $3;4;5$. Thể tích của khối hộp đã cho bằng?

A. 10. **B.** 20. **C.** 12. **D.** 60.

Lời giải

Chọn D.

Thể tích của khối hộp đã cho bằng $V=3.4.5=60$

Câu 6: Số phức liên hợp của số phức $z=-3+5i$ là:

A. $\bar{z}=-3-5i$. **B.** $\bar{z}=3+5i$. **C.** $\bar{z}=-3+5i$. **D.** $\bar{z}=3-5i$.

Lời giải

Chọn A.

Câu 7: Cho hình trụ có bán kính đáy $R=8$ và độ dài đường sinh $l=3$. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng:

A. 24π. **B.** 192π. **C.** 48π. **D.** 64π.

Lời giải

Chọn C.

Diện tích xung quanh của hình trụ $S_{xq}=2\pi rl=48\pi$

Câu 8: Cho khối cầu có bán kính $r=4$. Thể tích của khối cầu đã cho bằng:

A. $\dfrac{256\pi}{3}$. **B.** 64π. **C.** $\dfrac{64\pi}{3}$. **D.** 256π.

Lời giải

Chọn A.

Thể tích của khối cầu $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3=\dfrac{256\pi}{3}$

Câu 9: Với a,b là các số thực dương tùy ý và $a\neq 1$, $\log_{a^5} b$ bằng:

A. $5\log_a b$. **B.** $\dfrac{1}{5}+\log_a b$. **C.** $5+\log_a b$. **D.** $\dfrac{1}{5}\log_a b$.

Lời giải

Chọn D.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+(z+2)^2=9$. Bán kính của (S) bằng

A. 6. **B.** 18. **C.** 9. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D.

Câu 11: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\frac{4x+1}{x-1}$ là

A. $y=\frac{1}{4}$. **B.** $y=4$. **C.** $y=1$. **D.** $y=-1$.

Lời giải

Chọn B.

Tiệm cận ngang $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty} y=\frac{4}{1}=4$

Câu 12: Cho khối nón có bán kính đáy $r=5$ và chiều cao $h=2$. Thể tích khối nón đã cho bằng:

A. $\frac{10\pi}{3}$. **B.** 10π. **C.** $\frac{50\pi}{3}$. **D.** 50π.

Lời giải

Chọn C.

Thể tích khối nón $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{50\pi}{3}$

Câu 13: Nghiệm của phương trình $\log_3(x-1)=2$ là

A. $x=8$. **B.** $x=9$. **C.** $x=7$. **D.** $x=10$.

Lời giải

Chọn D.

Tập xác định: $D=(1;+\infty)$

$\log_3(x-1)=2\Leftrightarrow x-1=3^2\Leftrightarrow x=10$

Câu 14: $\int x^2dx$ bằng

A. $2x+C$. **B.** $\frac{1}{3}x^3+C$. **C.** x^3+C. **D.** $3x^3+C$

Lời giải

Chọn B.

Câu 15: Có bao nhiêu cách xếp 6 học sinh thành một hàng dọc?

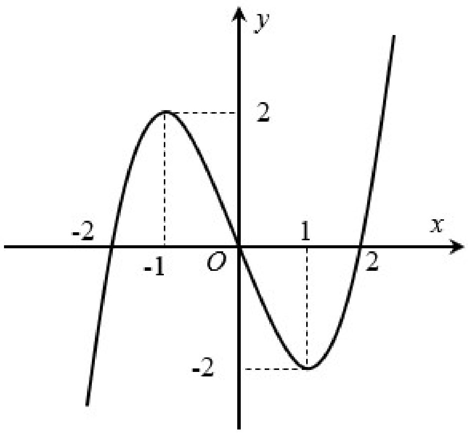
A. 36. **B.** 720. **C.** 6. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Có $6!=720$ cách xếp 6 học sinh thành một hàng dọc

Câu 16: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x)=-1$ là:

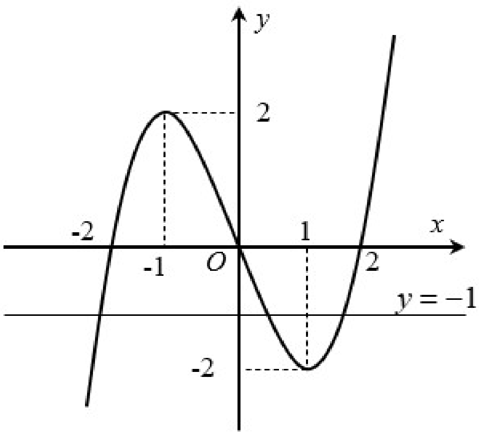


A. 3 . **B.** 1 . **C.** 0 . **D.** 2 .

Lời giải

Chọn A.

Số nghiệm thực của phương trình $f(x)=-1$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=-1$.



Từ hình vẽ suy ra 3 nghiệm.

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(3;2;1)$ trên trục Ox có tọa độ là:

A. $(0;2;1)$. **B.** $(3;0;0)$. **C.** $(0;0;1)$. **D.** $(0;2;0)$.

Lời giải

Chọn B.

Câu 18: Cho khối chóp có diện tích đáy $B=6$ và chiều cao $h=2$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng:

A. 6 . **B.** 3 . **C.** 4 . **D.** 12 .

Lời giải

Chọn C.

Thể tích của khối chóp $V=\frac{1}{3}Bh=4$

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-3}{2}=\frac{y-4}{-5}=\frac{z+1}{3}$. Vecto nào dưới đây là một vecto chỉ phương của d ?

A. $u_2(2;4;-1)$. **B.** $u_1(2;-5;3)$. **C.** $u_3(2;5;3)$. **D.** $u_4(3;4;1)$.

Lời giải

Chọn B.

Câu 20: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;0;0)$, $B(0;1;0)$ và $C(0;0;-2)$. Mặt phẳng (ABC) có phương trình là:

A. $\frac{x}{3}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{2}=1$. **B.** $\frac{x}{3}+\frac{y}{1}+\frac{z}{-2}=1$. **C.** $\frac{x}{3}+\frac{y}{1}+\frac{z}{2}=1$. **D.** $\frac{x}{-3}+\frac{y}{1}+\frac{z}{2}=1$.

Lời giải

Chọn B.

$(ABC):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ hay $(ABC):\frac{x}{3}+\frac{y}{1}+\frac{z}{-2}=1$.

Câu 21: Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1=3$ và công bội $q=2$. Giá trị của u_2 bằng

A. 8. **B.** 9. **C.** 6. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $u_2=u_1.q=3.2=6$.

Câu 22: Cho hai số phức $z_1=3-2i$ và $z_2=2+i$. Số phức z_1+z_2 bằng

A. $5+i$. **B.** $-5+i$. **C.** $5-i$. **D.** $-5-i$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $z_1+z_2=3-2i+2+i=5-i$.

Câu 23: Biết $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=3$. Giá trị của $\int_1^3 2f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 5. **B.** 9. **C.** 6. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int_1^3 2f(x)\mathrm{d}x=2\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=2.3=6$.

Câu 24: Trên mặt phẳng tọa độ, biết $M(-3;1)$ là điểm biểu diễn số phức z. Phần thực của z bằng

A. 1. **B.** -3. **C.** -1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Điểm $M(-3;1)$ là điểm biểu diễn số phức z, suy ra $z=-3+i$.
Vậy phần thực của z bằng -3.

Câu 25: Tập xác định của hàm số $y=\log_5 x$ là

A. $[0;+\infty)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(-\infty;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x>0$. Tập xác định: $D=(0;+\infty)$.

Câu 26: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2$ và đồ thị hàm số $y=3x^2+3x$ là

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

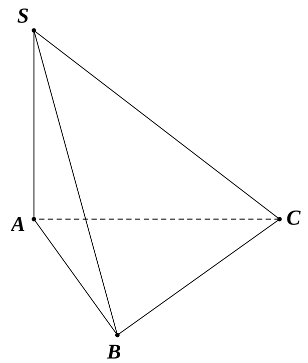
Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị đã cho là:

$$x^3+3x^2=3x^2+3x \Leftrightarrow x^3-3x=0 \Leftrightarrow x\left(x^2-3\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\sqrt{3} \\ x=-\sqrt{3} \end{array}\right..$$

Hai đồ thị đã cho cắt nhau tại 3 điểm.

Câu 27: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB=a$, $BC=2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=\sqrt{15}a$ (tham khảo hình bên).



Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng

A. 45°. **B.** 30°. **C.** 60°. **D.** 90°.

Lời giải

Chọn C

Do SA vuông góc với mặt phẳng đáy nên AC là hình chiếu vuông góc của SC lên mặt phẳng đáy. Từ đó suy ra: $\left(SC;(ABC)\right)=\left(SC;AC\right)=\widehat{SCA}$.

Trong tam giác ABC vuông tại B có: $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{a^2+4a^2}=\sqrt{5}a$.

Trong tam giác SAC vuông tại A có: $\tan\widehat{SCA}=\dfrac{SA}{AC}=\dfrac{\sqrt{15}a}{\sqrt{5}a}=\sqrt{3}$
$\Rightarrow \widehat{SCA}=60^\circ$.

Vậy $\left(\widehat{SC;(ABC)}\right)=60^\circ$.

Câu 28: Biết $F(x)=x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_1^2\left[2+f(x)\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. 5. **B.** 3. **C.** $\frac{13}{3}$. **D.** $\frac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int_1^2\left[2+f(x)\right]\mathrm{d}x=\left(2x+x^2\right)\Big|_1^2=8-3=5$

Câu 29: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=x^2-4$ và $y=2x-4$ bằng

A. 36. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{4\pi}{3}$. **D.** 36π.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị đã cho là:

$x^2-4=2x-4\Leftrightarrow x^2-2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho là:

$S=\int_0^2\left|\left(x^2-4\right)-(2x-4)\right|\mathrm{d}x=\int_0^2\left|x^2-2x\right|\mathrm{d}x=\int_0^2\left(2x-x^2\right)\mathrm{d}x=\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2=\frac{4}{3}$.

Câu 30: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;-2;3)$ và đường thẳng d: $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{-1}$. Mặt phẳng đi qua điểm M và vuông góc với đường thẳng d có phương trình là

A. $3x+2y-z+1=0$. **B.** $2x-2y+3z-17=0$.

C. $3x+2y-z-1=0$. **D.** $2x-2y+3z+17=0$.

Lời giải

Chọn A

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và vuông góc với đường thẳng d.

Ta có: $\vec{n}_P=\vec{u}_d=(3;2;-1)$ là một véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

Phương trình mặt phẳng (P) là: $3(x-2)+2(y+2)-1(z-3)=0\Leftrightarrow 3x+2y-z+1=0$.

Câu 31: Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2+6z+13=0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $1-z_0$ là

A. $N(-2;2)$. **B.** $M(4;2)$. **C.** $P(4;-2)$. **D.** $Q(2;-2)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $z^2+6z+13=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-3+2i \\ z=-3-2i \end{array}\right.$.

Do z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình đã cho nên $z_0=-3+2i$.

Từ đó suy ra điểm biểu diễn số phức $1-z_0=4-2i$ là điểm $P(4;-2)$.

Câu 32: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;1)$, $B(1;1;0)$ và $C(3;4;-1)$. Đường thẳng đi qua A và song song với BC có phương trình là

A. $\frac{x-1}{4}=\frac{y}{5}=\frac{z-1}{-1}$. **B.** $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-1}$. **C.** $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{-1}$. **D.** $\frac{x+1}{4}=\frac{y}{5}=\frac{z+1}{-1}$.

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng d đi qua A và song song với BC nhận $\overrightarrow{BC}=(2;3;-1)$ làm một véc tơ chỉ phương.

Phương trình của đường thẳng d: $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{-1}$.

Câu 33: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	$-$	0	+	||	$-$	0	$-$	

Số điểm cực đại của hàm số đã cho là

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Do hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, $f'(-1)=0$,

$f'(1)$ không xác định nhưng do hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nên tồn tại $f(1)$

và $f'(x)$ đổi dấu từ "+" sang "-" khi đi qua các điểm $x=-1$, $x=1$ nên hàm số đã cho đạt cực đại tại 2 điểm này.

Vậy số điểm cực đại của hàm số đã cho là 2.

Câu 34: Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-13}<27$ là

A. $(4;+\infty)$. **B.** $(-4;4)$. **C.** $(-\infty;4)$. **D.** $(0;4)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $3^{x^2-13}<27\Leftrightarrow 3^{x^2-13}<3^3\Leftrightarrow x^2-13<3\Leftrightarrow x^2<16\Leftrightarrow |x|<4\Leftrightarrow -4<x<4$.

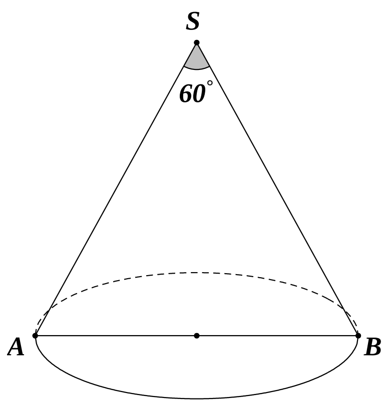
Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=(-4;4)$.

Câu 35: Cho hình nón có bán kính đáy bằng 2 và góc ở đỉnh bằng 60°. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

A. 8π. **B.** $\frac{16\sqrt{3}\pi}{3}$. **C.** $\frac{8\sqrt{3}\pi}{3}$. **D.** 16π.

Lời giải

Chọn A



Gọi S là đỉnh của hình nón và AB là một đường kính của đáy.

Theo bài ra, ta có tam giác SAB là tam giác đều $\Rightarrow$ $l=SA=AB=2r=4$.

Vậy diện tích xung quanh của hình nón đã cho là $S_{xq}=\pi rl=8\pi$.

Câu 36: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-24x$ trên đoạn $[2;19]$ bằng

A. $32\sqrt{2}$. **B.** -40. **C.** $-32\sqrt{2}$. **D.** -45.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $f'(x)=3x^2-24=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\sqrt{2}\in[2;19] \\ x=-2\sqrt{2}\notin[2;19] \end{array}\right.$.

$f(2)=2^3-24.2=-40$; $f\left(2\sqrt{2}\right)=\left(2\sqrt{2}\right)^3-24.2\sqrt{2}=-32\sqrt{2}$;

$f(19)=19^3-24.19=6403$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-24x$ trên đoạn $[2;19]$ bằng $-32\sqrt{2}$.

Câu 37: Cho hai số phức $z=1+2i$ và $w=3+i$. Môđun của số phức $z.\overline{w}$ bằng

A. $5\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{26}$. **C.** 26. **D.** 50.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $\left|z.\overline{w}\right|=|z|.\left|\overline{w}\right|=|z|.|w|=\sqrt{1+2^2}.\sqrt{3^2+1}=5\sqrt{2}.$

Câu 38: Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $4^{\log_2(a^2b)}=3a^3$. Giá trị của ab^2 bằng

A. 3. **B.** 6. **C.** 12. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $4^{\log_2(a^2b)}=3a^3 \Leftrightarrow \left(2^{\log_2(a^2b)}\right)^2=3a^3 \Leftrightarrow (a^2b)^2=3a^3 \Leftrightarrow a^4b^2=3a^3 \Leftrightarrow ab^2=3.$

Câu 39: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $g(x)=(x+1).f'(x)$ là

A. $\dfrac{x^2+2x-2}{2\sqrt{x^2+2}}+C$. **B.** $\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+2}}+C$. **C.** $\dfrac{x^2+x+2}{\sqrt{x^2+2}}+C$. **D.** $\dfrac{x+2}{2\sqrt{x^2+2}}+C$.

Lời giải

Chọn B.

Tính $g(x)=\int(x+1)f'(x)\mathrm{d}x=(x+1)f(x)-\int(x+1)'f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{x^2+x}{\sqrt{x^2+2}}-\int f(x)\mathrm{d}x$

$=\dfrac{x^2+x}{\sqrt{x^2+2}}-\int\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}\mathrm{d}x \quad =\dfrac{x^2+x}{\sqrt{x^2+2}}-\sqrt{x^2+2}+C=\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+2}}+C.$

Câu 40: Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+4}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-7)$ là

A. $[4;7)$. **B.** $(4;7]$. **C.** $(4;7)$. **D.** $(4;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$. Ta có: $y'=\dfrac{m-4}{(x+m)^2}$.

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;-7)$ $\Leftrightarrow y'>0$, $\forall x\in(-\infty;-7)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m-4>0 \\ -m\notin(-\infty;-7)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>4 \\ -m\geq -7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>4 \\ m\leq 7\end{cases} \Leftrightarrow 4<m\leq 7$.

Câu 41: Trong năm 2019, diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là 600 ha. Giả sử diện tích rừng trồng mới của tỉnh A mỗi năm tiếp theo đều tăng 6% so với diện tích rừng trồng mới của năm liền trước. Kể từ sau năm 2019, năm nào dưới đây là năm đầu tiên tỉnh A có diện tích rừng trồng mới trong năm đó đạt trên 1000 ha ?

A. Năm 2028. **B.** Năm 2047. **C.** Năm 2027. **D.** Năm 2046.

Lời giải

Chọn A.

Diện tích rừng trồng mới của năm $2019+1$ là $600(1+6\%)^1$.

Diện tích rừng trồng mới của năm $2019+2$ là $600(1+6\%)^2$.

Diện tích rừng trồng mới của năm $2019+n$ là $600(1+6\%)^n$.

Ta có $600(1+6\%)^n > 1000 \Leftrightarrow (1+6\%)^n > \dfrac{5}{3} \Leftrightarrow n > \log_{(1+6\%)}\dfrac{5}{3} \approx 8{,}76$

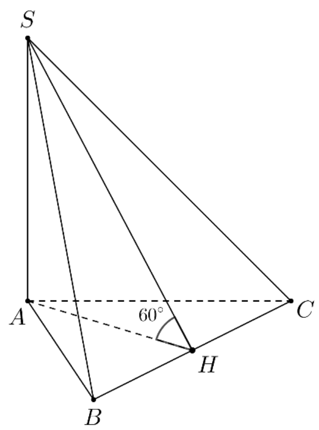
Như vậy kể từ năm 2019 thì năm 2028 là năm đầu tiên diện tích rừng trồng mới đạt trên 1000 ha

Câu 42: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $4a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy bằng 60°. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

A. $\dfrac{172\pi a^2}{3}$. **B.** $\dfrac{76\pi a^2}{3}$. **C.** $84\pi a^2$. **D.** $\dfrac{172\pi a^2}{9}$

Lời giải

Chọn A.



Ta có tâm của đáy cũng là giao điểm ba đường cao (ba đường trung tuyến) của tam giác đều ABC nên bán kính đường tròn ngoại tiếp đáy là $r = 4a.\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{4\sqrt{3}a}{3}$.

Đường cao AH của tam giác đều ABC là $AH = \dfrac{4a.\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}a$.

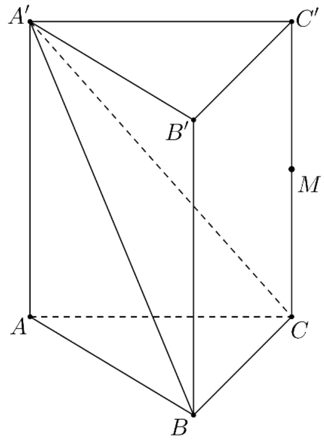
Góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy bằng 60° suy ra $\widehat{SHA} = 60^\circ$.

Suy ra $\tan SHA = \dfrac{SA}{AH} = \dfrac{SA}{2\sqrt{3}a} = \sqrt{3} \Rightarrow SA = 6a$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp $R_{mc} = \sqrt{\left(\dfrac{SA}{2}\right)^2 + r^2} = \sqrt{9a^2 + \dfrac{16}{3}a^2} = \dfrac{\sqrt{129}}{3}a$.

Diện tích mặt cầu ngoại tiếp của hình chóp $S.ABC$ là $S_{mc} = 4\pi R^2 = 4\pi\left(\dfrac{\sqrt{129}}{3}a\right)^2 = \dfrac{172\pi a^2}{3}$.

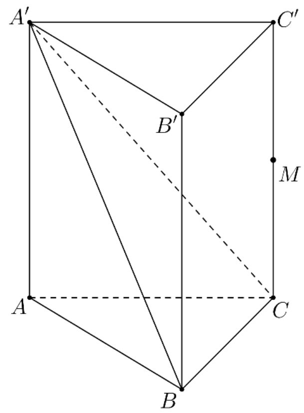
Câu 43: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm của CC' (tham khảo hình bên). Khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng



A. $\frac{\sqrt{21}a}{14}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{21}a}{7}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}a}{4}$.

Lời giải

Chọn A.



$C'M \cap (A'BC) = C$, suy ra $\frac{d(M,(A'BC))}{d(C',(A'BC))} = \frac{C'M}{C'C} = \frac{1}{2}$.

Ta có $V_{C'.A'BC} = \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{3}.C'C.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.a.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lại có $A'B = a\sqrt{2}$, $CB = a$, $A'C = a\sqrt{2}$ $\Rightarrow S_{A'BC} = \frac{a^2\sqrt{7}}{4}$.

Suy ra $d(C',(A'BC)) = \frac{3V_{C'.A'BC}}{S_{\Delta A'BC}} = \frac{3.\frac{a^3\sqrt{3}}{12}}{\frac{a^2\sqrt{7}}{4}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Vậy $d(M,(A'BC)) = \frac{1}{2}d(C',(A'BC)) = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{21}}{7} = \frac{a\sqrt{21}}{14}$.

Câu 44: Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=x^4\left[f(x+1)\right]^2$ là

A. 11 . **B.** 9 . **C.** 7 . **D.** 5 .

Lời giải

Chọn B.

Ta chọn hàm $f(x)=5x^4-10x^2+3$.

Đạo hàm

$$g'(x)=4x^3\left[f(x+1)\right]^2+2x^4f(x+1)f'(x+1)=2x^3f(x+1)\left[2f(x+1)+xf'(x+1)\right].$$

Ta có $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x^3f(x+1)=0\\2f(x+1)+xf'(x+1)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\f(x+1)=0\\2f(x+1)+xf'(x+1)=0\end{array}\right.$.

$$f(x+1)=0\quad(*)\quad\Leftrightarrow\quad5(x+1)^4-10(x+1)+3=0\quad\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+1\approx1,278\\x+1\approx0,606\\x+1\approx-0,606\\x+1\approx-1,278\end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ Phương trình có bốn nghiệm phân biệt khác 0 .

$$2f(x+1)+xf'(x+1)=0\overset{t=x+1}{\Rightarrow}2\left(5t^4-10t^2+3\right)+(t-1)\left(20t^3-20t\right)=0$$

$$\Leftrightarrow30t^4-20t^3-40t^2+20t+6=0\quad\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t\approx1,199\\t\approx0,731\\t\approx-0,218\\t\approx-1,045\end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ Phương trình có bốn nghiệm phân biệt khác 0 và khác các nghiệm của phương trình $(*)$.

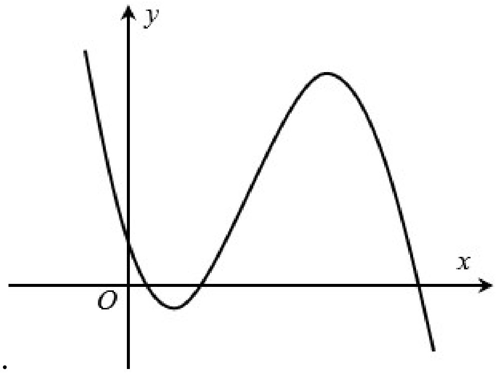
Vậy số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ là 9 .

Câu 45: Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu số dương trong các số a , b , c , d ?

A. 4 . **B.** 1 . **C.** 2 . **D.** 3 .

Lời giải

Chọn C.



Ta có $\lim_{x\to+\infty} y = +\infty \Rightarrow a < 0$.

Gọi x_1, x_2 là hoành độ hai điểm cực trị của hàm số suy ra x_1, x_2 nghiệm phương trình $y' = 3ax^2 + 2bx + c = 0$ nên theo định lý Viet:

Tổng hai nghiệm $x_1 + x_2 = -\dfrac{2b}{3a} > 0 \Rightarrow \dfrac{b}{a} < 0 \Rightarrow b > 0$.

Tích hai nghiệm $x_1x_2 = \dfrac{c}{3a} > 0 \Rightarrow c < 0$.

Lại có đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $d > 0$.

Vậy có 2 số dương trong các số a, b, c, d.

Câu 46: Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau và các chữ số thuộc tập $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc S, xác suất để số đó **không** có hai chữ số liên tiếp nào cùng chẵn bằng

A. $\dfrac{25}{42}$. **B.** $\dfrac{5}{21}$. **C.** $\dfrac{65}{126}$. **D.** $\dfrac{55}{126}$.

Lời giải

Chọn A

Có A_9^4 cách tạo ra số có 4 chữ số phân biệt từ $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

$\Rightarrow |S| = A_9^4 = 3024 \Rightarrow |\Omega| = 3024$.

Gọi biến cố A:"chọn ngẫu nhiên một số thuộc S, xác suất để số đó **không** có hai chữ số liên tiếp nào cùng chẵn".

Nhận thấy không thể có 3 chữ số chẵn hoặc 4 chữ số chẵn vì lúc đó luôn tồn tại hai chữ số chẵn nằm cạnh nhau.

Trường hợp 1: Cả 4 chữ số đều lẻ.

Chọn 4 số lẻ từ X và xếp thứ tự có A_5^4 số.

Trường hợp 2: Có 3 chữ số lẻ, 1 chữ số chẵn.

Chọn 3 chữ số lẻ, 1 chữ số chẵn từ X và xếp thứ tự có $C_5^3.C_4^1.4!$ số.

Trường hợp 3: Có 2 chữ số chẵn, 2 chữ số lẻ.

Chọn 2 chữ số lẻ, 2 chữ số chẵn từ X có $C_5^2.C_4^2$ cách.

Xếp thứ tự 2 chữ số lẻ có 2! cách.

Hai chữ số lẻ tạo thành 3 khoảng trống, xếp hai chữ số chẵn vào 3 khoảng trống và sắp thứ tự có 3! cách $\Rightarrow$ trường hợp này có $C_5^2.C_4^2.2!.3!$ số.

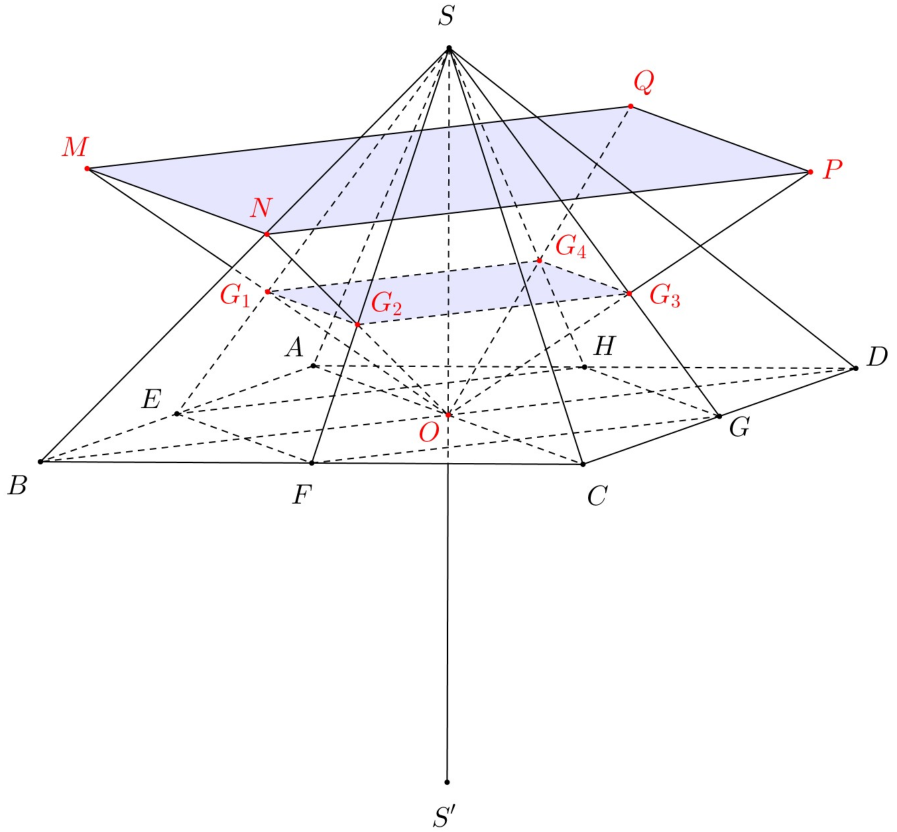
Vậy $P(A)=\frac{|\Omega_A|}{|\Omega|}=\frac{A_5^4+C_5^3.C_4^1.4!+C_5^2.C_4^2.2!.3!}{3024}=\frac{25}{42}$.

Câu 47: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $2a$ và O là tâm của đáy. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các điểm đối xứng với O qua trọng tâm của các tam giác SAB, SBC, SCD, SDA và S' là điểm đối xứng với S qua O. Thể tích của khối chóp $S'.MNPQ$ bằng

A. $\frac{20\sqrt{14}a^3}{81}$. **B.** $\frac{40\sqrt{14}a^3}{81}$. **C.** $\frac{10\sqrt{14}a^3}{81}$. **D.** $\frac{2\sqrt{14}a^3}{9}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi G_1,G_2,G_3,G_4 lần lượt là trọng tâm $\Delta SAB,\Delta SBC,\Delta SCD,\Delta SDA$.

E,F,G,H lần lượt là trung điểm của các cạnh AB,BC,CD,DA.

Ta có $S_{MNPQ}=4S_{G_1G_2G_3G_4}=4.\frac{4}{9}S_{EFGH}=4.\frac{4}{9}.\frac{1}{2}EG.HF=\frac{8a^2}{9}$.

$$d\left(S',(MNPQ)\right)=d\left(S',(ABCD)\right)+d\left(O,(MNPQ)\right)=d\left(S,(ABCD)\right)+2d\left(O,(G_1G_2G_3G_4)\right)$$

$$=d\left(S,(ABCD)\right)+\frac{2}{3}d\left(S,(ABCD)\right)=\frac{5}{3}d\left(S,(ABCD)\right)=\frac{5a\sqrt{14}}{6}$$

Vậy $V_{S'.MNPQ}=\frac{1}{3}\cdot\frac{5a\sqrt{14}}{6}\cdot\frac{8a^2}{9}=\frac{20a^3\sqrt{14}}{81}$.

Câu 48: Xét các số thực không âm x và y thỏa mãn $2x+y.4^{x+y-1}\geq 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+4x+6y$ bằng

A. $\frac{33}{4}$. **B.** $\frac{65}{8}$. **C.** $\frac{49}{8}$. **D.** $\frac{57}{8}$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

Nhận xét: Giá trị của x, y thỏa mãn phương trình $2x + y \cdot 4^{x+y-1} = 3 (1)$ sẽ làm cho biểu thức P nhỏ nhất. Đặt $a = x + y$, từ (1) ta được phương trình

$$4^{a-1} + \frac{2}{y}.a - 2 - \frac{3}{y} = 0$$
.

Nhận thấy $y = 4^{a-1} + \frac{2}{y}.a - 2 - \frac{3}{y}$ là hàm số đồng biến theo biến a, nên phương trình trên có nghiệm duy nhất $a = \frac{3}{2} \Rightarrow x + y = \frac{3}{2}$.

Ta viết lại biểu thức $P = (x+y)^2 + 4(x+y) + 2\left(y - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{8} = \frac{65}{8}$. Vậy $P_{\min} = \frac{65}{8}$.

Cách 2:

Với mọi x, y không âm ta có

$$2x + y.4^{x+y-1} \geq 3 \Leftrightarrow x + y.4^{x+y-\frac{3}{2}} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \left(x + y - \frac{3}{2}\right) + y.\left(4^{x+y-\frac{3}{2}} - 1\right) \geq 0 \quad (1)$$

Nếu $x + y - \frac{3}{2} < 0$ thì $\left(x + y - \frac{3}{2}\right) + y.\left(4^{x+y-\frac{3}{2}} - 1\right) < 0 + y.(4^0 - 1) = 0$ (vô lí)

Vậy $x + y \geq \frac{3}{2}$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhyakovski ta được

$$P = x^2 + y^2 + 4x + 6y = (x+3)^2 + (y+2)^2 - 13$$

$$\geq \frac{1}{2}(x+y+5)^2 - 13 \geq \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + 5\right)^2 - 13 = \frac{65}{8}$$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} x + y = \frac{3}{2} \\ x + 3 = y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{5}{4} \\ x = \frac{1}{4} \end{cases}$. Vậy $\min P = \frac{65}{8}$.

Câu 49: Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 728 số nguyên y thỏa mãn $\log_4(x^2 + y) \geq \log_3(x + y)$?

A. 59 . **B.** 58 . **C.** 116 . **D.** 115 .

Lời giải

Chọn C.

Với mọi $x \in \mathbb{Z}$ ta có $x^2 \geq x$.

Xét hàm số $f(y) = \log_3(x+y) - \log_4(x^2 + y)$.

Tập xác định $D = (-x; +\infty)$ (do $y > -x \Rightarrow y > -x^2$).

$f'(y) = \dfrac{1}{(x+y)\ln 3} - \dfrac{1}{(x^2+y)\ln 4} \geq 0,\ \forall x \in D$ (do $x^2 + y \geq x + y > 0$, $\ln 4 > \ln 3$)

$\Rightarrow$ f tăng trên D.

Ta có $f(-x+1) = \log_3(x - x + 1) - \log_4(x^2 - x + 1) \leq 0$.

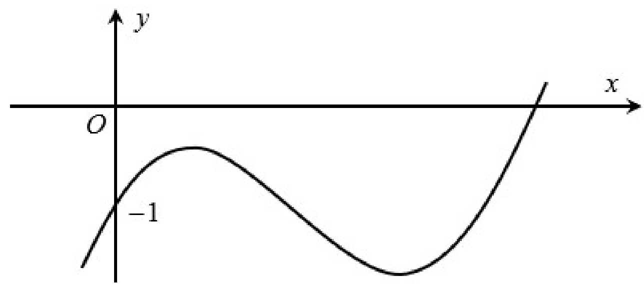
Có không quá 728 số nguyên y thỏa mãn $f(y) \leq 0$

$\Leftrightarrow f(-x+729) > 0 \Leftrightarrow \log_3 729 - \log_4(x^2 - x + 729) > 0$

$\Leftrightarrow x^2 - x + 729 - 4^6 < 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 3367 < 0 \Leftrightarrow -57{,}5 \leq x \leq 58{,}5$

Mà $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{-57, -56, ..., 58\}$. Vậy có $58 - (-57) + 1 = 116$ số nguyên x thỏa.

Câu 50: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(x^3 f(x)\right) + 1 = 0$ là

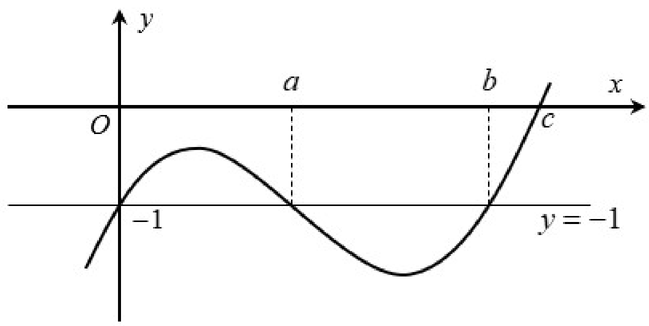


A. 8. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C.

$$f\left(x^3 f(x)\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow f\left(x^3 f(x)\right) = -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3 f(x) = 0 \\ x^3 f(x) = a > 0 \\ x^3 f(x) = b > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = \dfrac{a}{x^3} (\text{do } x \neq 0) \\ f(x) = \dfrac{b}{x^3} (\text{do } x \neq 0) \end{array}\right.$$



$f(x) = 0$ có một nghiệm dương $x = c$. Xét phương trình $f(x) = \dfrac{k}{x^3}$ với $x \neq 0, k > 0$.

Đặt $g(x) = f(x) - \frac{k}{x^3}$ có $g'(x) = f'(x) + \frac{3k}{x^4}$.

Với $x > c$, nhìn hình ta ta thấy $f'(x) > 0$ $\Rightarrow g'(x) = f'(x) + \frac{3k}{x^4} > 0$ $\Rightarrow g(x) = 0$ có tối đa một nghiệm.

Mặt khác $\begin{cases} g(c) < 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty \end{cases}$ và $g(x)$ liên tục trên $(c; +\infty)$

$\Rightarrow$ $g(x) = 0$ có duy nhất nghiệm trên $(c; +\infty)$.

Với $0 < x < c$ thì $f(x) < 0 < \frac{k}{x^3}$ $\Rightarrow$ $g(x) = 0$ vô nghiệm.

Với $x < 0$, nhìn hình ta ta thấy $f'(x) > 0$ $\Rightarrow g'(x) = f'(x) + \frac{3k}{x^4} > 0$ $\Rightarrow g(x) = 0$ có tối đa một nghiệm.

Mặt khác $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} g(x) > 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty \end{cases}$ và $g(x)$ liên tục trên $(-\infty; 0)$.

$\Rightarrow$ $g(x) = 0$ có duy nhất nghiệm trên $(-\infty; 0)$.

Tóm lại $g(x) = 0$ có đúng hai nghiệm trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Suy ra hai phương trình $f(x) = \frac{a}{x^3}$, $f(x) = \frac{b}{x^3}$ có 4 nghiệm phân biệt khác 0 và khác c.

Vậy phương trình $f\left(x^3 f(x)\right) + 1 = 0$ có đúng 6 nghiệm.

1.C	2.B	3.B	4.D	5.D	6.A	7.C	8.A	9.D	10.D
11.B	12.C	13.D	14.B	15.B	16.A	17.B	18.C	19.B	20.B
21.C	22.C	23.C	24.B	25.C	26.A	27.C	28.A	29.B	30.A
31.C	32.C	33.C	34.B	35.A	36.C	37.A	38.A	39.B	40.B
41.A	42.A	43.A	44.B	45.C	46.A	47.A	48.B	49.C	50.C