

PHẦN A. LÝ THUYẾT VÀ VÍ DỤ

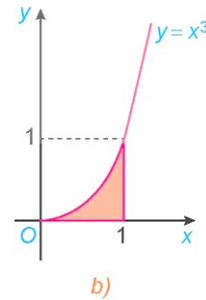
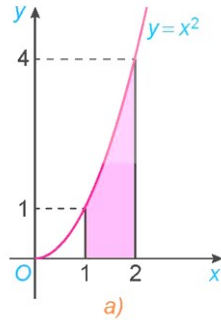
1. KHÁI NIỆM TÍCH PHÂN

a) Diện tích hình thang cong

Hình thang cong

Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b (a < b)$, trong đó $f(x)$ là hàm liên tục không âm trên đoạn $[a; b]$, gọi là một hình thang cong.

Ví dụ 1: Những hình phẳng được tô màu dưới đây có phải là hình thang cong không?



Giải

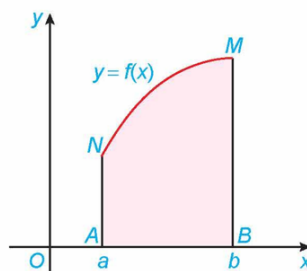
Hình a là hình thang cong giới hạn bởi đồ thị $y = x^2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 2$.

Hình b là hình thang cong giới hạn bởi đồ thị $y = x^3$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 1$.

Tổng quát, ta có:

Định lý 1

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$, thì diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ là $S = F(b) - F(a)$, trong đó $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.



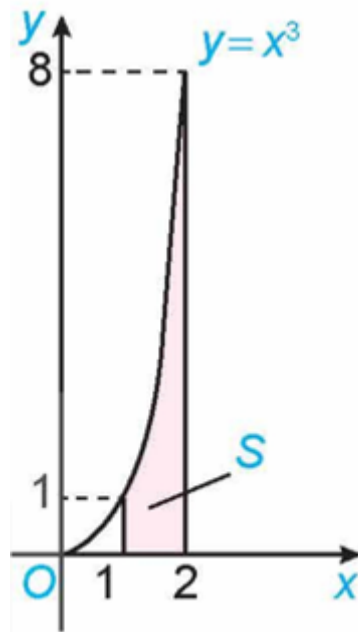
Ví dụ 2: Tính diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = x^3$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 2$.

Giải

Một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3$ là $F(x) = \frac{x^4}{4}$.

Do đó, diện tích của hình thang cong cần tính là

$$S = F(2) - F(1) = \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{15}{4}.$$



b) Định nghĩa tích phân

Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$. Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ thì hiệu số $F(b) - F(a)$ được gọi là tích phân từ a đến b của hàm số $f(x)$, kí hiệu

$$\int_a^b f(x) dx$$

là

Chú ý

a) Hiệu $F(b) - F(a)$ thường được kí hiệu là $F(x)|_a^b$.

$$\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b.$$

Như vậy

b) Ta gọi $\int_a^b$ là dấu tích phân, a là cận dưới, b là cận trên, $f(x)dx$ là biểu thức dưới dấu tích phân và $f(x)$ là hàm số dưới dấu tích phân.

c) Trong trường hợp $a = b$ hoặc $a > b$, ta quy ước:

$$\int_a^a f(x) dx = 0; \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du.$$

Tích phân không phụ thuộc vào cách kí hiệu biến:

Ví dụ 3: Tính:

a) $\int_{-1}^3 x^2 dx$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos t dt$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{du}{\cos^2 u}$

d) $\int_1^2 2^x dx$

Giải

$$\text{a) } \int_{-1}^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^3 = \frac{1}{3} [3^3 - (-1)^3] = \frac{28}{3}$$

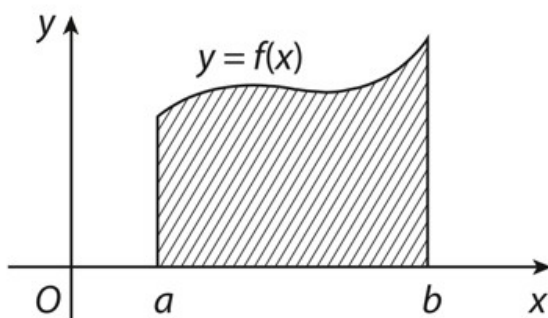
$$\text{b) } \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos t dt = \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \sin \frac{\pi}{6} - \sin 0 = \frac{1}{2}$$

$$\text{c) } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{du}{\cos^2 u} = \tan u \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \tan \frac{\pi}{4} - \tan 0 = 1 - 0 = 1$$

$$\text{d) } \int_1^2 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} \Big|_1^2 = \frac{2^2}{\ln 2} - \frac{2^1}{\ln 2} = \frac{2}{\ln 2}$$

Từ **Định lý 1** và định nghĩa tích phân, ta có Ý nghĩa hình học của tích phân:

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$, thì tích phân $\int_a^b f(x) dx$ là diện tích S (gạch sọc) của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$.



$$\text{Vậy } S = \int_a^b f(x) dx$$

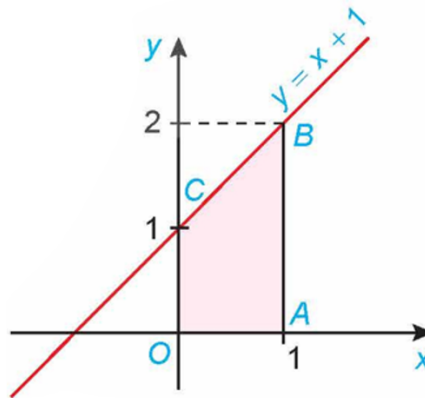
Ví dụ 4: Sử dụng ý nghĩa hình học của tích phân, tính:

$$\text{a) } \int_0^1 (x+1) dx$$

$$\text{b) } \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

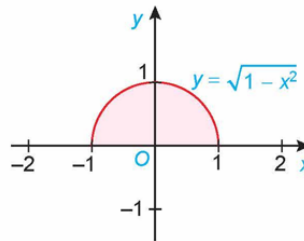
Giải

a) Tích phân cần tính là diện tích của hình thang vuông $OABC$, có đáy nhỏ $OC = 1$, đáy lớn $AB = 2$ và đường cao $OA = 1$.



Do đó: $\int_0^1 (x+1)dx = S_{OAB} = \frac{1}{2}(OC + AB) \cdot OA = \frac{1}{2}(1+2) \cdot 1 = \frac{3}{2}.$

b) Ta có $y = \sqrt{1-x^2}$ là phương trình nửa phía trên trục hoành của đường tròn tâm tại gốc toạ độ O và bán kính 1. Do đó, tích phân cần tính là diện tích nửa phía trên trục hoành của hình tròn tương ứng.



Vậy $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$

2. TÍNH CHẤT CỦA TÍCH PHÂN

Cho $f(x), g(x)$ là các hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó, ta có

1) $\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$ (k là hằng số);

2) $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$;

3) $\int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$;

4) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx (a < c < b)$.

Ví dụ 5: Tính:

a) $\int_1^4 (x^3 + 3\sqrt{x}) dx$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x - 2\cos x) dx$

c) $\int_1^4 \left(2^x - \frac{3}{x^2} \right) dx$

Giải

$$\int_1^4 (x^3 + 3\sqrt{x}) dx = \int_1^4 x^3 dx + 3 \int_1^4 \sqrt{x} dx = \frac{x^4}{4} \Big|_1^4 + 3 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_1^4 = \frac{1}{4}(4^4 - 1) + 2 \left(4^{\frac{3}{2}} - 1 \right) = \frac{255}{4} + 14 = \frac{311}{4}.$$

a)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x - 2 \cos x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x dx - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = e^x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1 \right) - 2(1 - 0) = e^{\frac{\pi}{2}} - 3.$$

b)

$$\int_1^4 \left(2^x - \frac{3}{x^2} \right) dx = \int_1^4 2^x dx - 3 \int_1^4 x^{-2} dx = \frac{2^x}{\ln 2} \Big|_1^4 + 3 \cdot \frac{1}{x} \Big|_1^4 = \frac{1}{\ln 2} (2^4 - 2^1) + 3 \left(\frac{1}{4} - 1 \right) = \frac{15}{\ln 2} - \frac{9}{4}.$$

c)

Ví dụ 6: Tính $\int_0^3 |x - 2| dx$.

Giải

Ta có:

$$\begin{aligned} \int_0^3 |x - 2| dx &= \int_0^2 |x - 2| dx + \int_2^3 |x - 2| dx = \int_0^2 (2 - x) dx + \int_2^3 (x - 2) dx \\ &= \left(2x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^2 + \left(\frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_2^3 = [(4 - 2) - 0] + \left[\left(\frac{9}{2} - 6 \right) - (2 - 4) \right] = \frac{5}{2} \end{aligned}$$