|  |  |
| --- | --- |
| **ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP. HCM** **TRƯỜNG PHỔ THÔNG NĂNG KHIÊU**  | **KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10****Năm học 2023-2024****Môn : TOÁN (Chuyên )****Thời gian làm bài : 120 phút**  |

**Bài 1.** (*1,0 điểm)* Giải hệ phương trình sau:

**Bài 2.** (*2,0 điểm)* Cho các số a,b,c >0 thỏa mãn ab + bc +ca = abc

 a, Chứng minh rằng: + + ≤

 b, Chứng minh rằng: ≤ abc ≤ .

**Bài 3.** (*1,5 điểm)* Cho bảng 4 x 4 được tô bằng ô đen hoặc trắng sao cho:

 i, Mỗi hàng có số ô đen bằng nhau;

 ii, Mỗi cột có số ô đen đôi một khác nhau;

 a, Tìm mỗi ô đen ở mỗi hàng.

 b, Một cặp ô được gọi là “ tốt “ khi có một ô đen và một ô trắng đứng cạnh nhau. Tìm số cặp tốt nhiều nhất tính theo hàng ; số cặp tốt nhiều nhất tính theo cột.

**Bài 4.** (*2,0 điểm*) Cho m, n là các số nguyên âm thỏa mãn - n =1. Đặt a = - m.

a, Chứng minh rằng: a là số lẻ.

b, Giả sử a = 3. + 1, k là số nguyên không âm. Chứng minh rằng k = 1

c, Chứng minh rằng: a không phải là số chính phương.

**Bài 5.** (*3,5 điểm*) Cho tam giác *ABC* có đường tròn nội tiếp *(I).* *D, E, F* lần lượt là các tiếp điểm của *(I)* với *BC, CA, AB.* Gọi *L* là chân đường phân giác ngoài của *BAC* *(L BC)*. Vẽ tiếp tuyến LH với đường tròn (I) ( H D LÀ tiếp điểm).

a, Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác HAL đi qua tâm I

b, Chứng minh BAD = CAH.

c, AH kéo dài cắt (I) tại K (K H). Gọi G là trọng tâm của tam giác KEF. DG cắt EF tại J. Chứng minh KJ ⊥ EF.

d, Gọi S là trung điểm BC, KJ cắt (I) tại R (R ≠ K). Chứng minh rằng AS, IR, EF đồng quy.

 ĐÁP ÁN

**Bài 1.** (1,0 điểm) Giải hệ phương trình sau:

 Lời giải tham khảo: ĐKXĐ là ≠ 0 Ta có HPT

Đặt a = , b = , HPT trở thành

Theo định lý Viete đảo, a và b là nghiệm của phương trình

 – t – 20 = 0 t = 5 hay t = - 4

TH1: a = 5 và b = -4. Ta có:

 Vậy tập nghiệm của hệ là S =

Bài 2. ( 2, 0 điểm) Cho các số a,b,c >0 thỏa mãn ab + bc +ca = abc

 a, Chứng minh rằng: + + ≤

 b, Chứng minh rằng: ≤ abc ≤ .

 Lời giải tham khảo:

 a, Từ giả thiết, ta suy ra

=1  =1

 Áp dụng Bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có:

 (1 + 1 + 1) ≥

hay

 ≤ =

 Chứng minh hoàn tất.

b, Ta có:

 ≥ 3 = 3abc. (1)

 Ta cũng có

 ≥

 Suy ra

 ≤ 1

 hay + + ≤ . Bình phương hai vế bất đẳng thức, ta được

 ≤ abc. (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra

 ≤ abc ≤

**Bài 3.** (*1,5 điểm)* Cho bảng 4 x 4 được tô bằng ô đen hoặc trắng sao cho:

 i, Mỗi hàng có số ô đen bằng nhau;

 ii, Mỗi cột có số ô đen đôi một khác nhau;

 a, Tìm mỗi ô đen ở mỗi hàng.

 b, Một cặp ô được gọi là “ tốt “ khi có một ô đen và một ô trắng đứng cạnh nhau. Tìm số cặp tốt nhiều nhất tính theo hàng ; số cặp tốt nhiều nhất tính theo cột.

Lời giải tham khảo:

a, Mỗi cột có số ô đen đôi một khác nhau nên tổng số ô đen trong bảng phải lớn hơn hoặc bằng 0 + 1 + 2 + 3 = 6 và bé hơn hoặc bằng 1 + 2 + 3 + 4 =10. Mà mỗi hàng có số ô đen đều bằng nhau nên tổng số ô đen trong bảng phải chia hết cho 4. Do đó tổng số ô đen trong bảng là 8. Suy ra ô đen ở mỗi hàng là 2.

B, 8 = 0 + 1 + 3 + 4. Số ô đen trong các cột sẽ là 0, 1, 3, 4.

 Xét số cặp tốt nhiều nhất tính theo cột:

* Trong cột chứa 0 ô đen luôn có 0 cặp tốt
* Trong cột chứa 1 ô đen có tối đa 2 cặp tốt
* Trong cột chứa 3 ô đen có tối đa 2 cặp tốt
* Trong cột chứa 4 ô đen luôn có 0 cặp tốt

Vậy có tối đa 4 cặp tốt tính theo cột. Một ví dụ cụ thể là

Xét số cặp tốt nhiều nhất tính theo hàng:

* Mỗi hàng đều chứa 2 ô đen. Và 1 hàng 1x4 có đúng 2 ô đen sẽ chứa tối đa 3 cặp tốt và phải là 1 trong 2 cấu hình sau:
* Như vậy số cặp tốt nhiều nhất tính theo hàng trong bảng là 3x4 =12. Giả sử tồn tại 1 cấu hình A có 12 cặp tốt tính theo hàng và thỏa mãn yêu cầu bài. Như vậy mỗi hàng phải có cấu hình là 1 trong 2 cấu hình(\*) trên. Và vì có 1 cột chứa 4 ô nên cấu hình A chỉ có thể là

Tuy nhiên 2 cấu hình trên đều không thỏa mãn yêu cầu đề bài. Do đó trong bảng 4x4 chỉ có tối đa 11 cặp tính theo hàng. Ví dụ:

**Bài 4.** (*2,0 điểm*) Cho m, n là các số nguyên âm thỏa mãn - n =1. Đặt a = - m.

a, Chứng minh rằng: a là số lẻ.

b, Giả sử a = 3. + 1, k là số nguyên không âm. Chứng minh rằng k = 1

c, Chứng minh rằng: a không phải là số chính phương.

Lời giải tham khảo:

a, Vì - n =1 là số lẻ nên m, n khác tính chẵn lẻ. Do đó a = - m là số lẻ.

b, Ta có

a – 1 = -+ n =

 =

Vì n – m lẻ nên n + m + 1 , do đó ta xét các trường hợp sau:

* Nếu n + m + 1= thì n – m =3, kết hợp với - n =1,ta được - m - 4 = 0 (Loại vì phương trình có nghiệm m = không nguyên )
* Nếu n + m + 1= thì n – m =3, kết hợp với - n =1 ta có - m – 2 = 0, do đó m = 2 ( do m ≥ 0)

 Từ đó suy ra n = 3 và = 3 + 2 + 1 = 6 k = 1.

 Vậy k = 1.

 c, Vì - n =1 nên n = - 1, khi đó a = - m = –m = - - m + 1.

Nhận xét = n + 1 ≥ 1 nên m ≥ 1. Khi đó

 - – m + 1 < - + 1 = . (1)

* Xét m ≥ 2, khi đó

 - –m + 1 - = –m – 3 = ( 2m -3)(m + 1) > 0

 Do đó

 - – m + 1 > , với m ≥ 2 (2)

 Từ (1) và (2) ta được

 < a = - – m + 1 < , với m ≥ 2. (3)

Vì và là hai số chính phương liên tiếp nên từ (3), ta suy ra ***a*** không là số chính phương.

**Bài 5.** (*3,5 điểm*) Cho tam giác *ABC* có đường tròn nội tiếp *(I).* *D, E, F* lần lượt là các tiếp điểm của *(I)* với *BC, CA, AB.* Gọi *L* là chân đường phân giác ngoài của *BAC* *(L BC)*. Vẽ tiếp tuyến LH với đường tròn (I) ( H D LÀ tiếp điểm).

 a, Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác HAL đi qua tâm I

 b, Chứng minh BAD = CAH.

 c, AH kéo dài cắt (I) tại K (K H). Gọi G là trọng tâm của tam giác KEF. DG cắt EF tại J. Chứng minh KJ ⊥ EF.

 d, Gọi S là trung điểm BC, KJ cắt (I) tại R (R ≠ K). Chứng minh rằng AS, IR, EF đồng quy.

Lời giải tham khảo:



 a, Ta có *IAL =IHL = IDL = 90* nên *A, L, D, H, I* cùng nằm trên đường tròn đường kính *LI*. Do đó đường tròn ngoại tiếp tam giác *HAL* đi qua *I*.

 b, Xét đường tròn (*HAL)*, do *IH = ID* nên AI là đường phân giác của DAH. Mà AI cũng là đường phân giác của BAC nên ta có điều phải chúng minh.

 c, Ta có: KDC = KHD = ALB.

 Suy ra: DK AL mà ALEF ( cùng vuống góc IA), nên DK EF.

 Do DK NJ nên theo định lý Talet, ta có

 = = 2 =.

 Suy ra DF JV và = =2.

 Từ đó, JV = = .

 Do đó, tam giác JKE vuông tại J.

 Vậy KJ EF.

 d, Do DK EF mà KR EF nên DK KR. Từ đó, ta có DR là đường kính của (I). Gọi DR cắt EF tai X, qua X vẽ đường thẳng song song với BC cắt AB, AC lần lượt tại Y, Z. Ta chứng minh A, X, S thẳng hàng bằng cách chứng minh X là trung điểm YZ.

 Thật vậy, các tứ giác IXYF và IXEZ nội tiếp nên ta có

 YIX = XFY = EFA =AEF = XIZ

 Do đó, IX là phân giác của YIZ

 Mặt khác, IX là đường cao trong tam giác IYZ nên tam giác IYZ cân tại I. Do đó X là trung điểm YZ. Suy ra A, X, S thẳng hàng.

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

https://www.vnteach.com