

PHẦN E. TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1. (Chuyên Bắc Giang - 2021) Số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

$$y = \frac{\sqrt{4x^2 - 1} + 3x^2 + 2}{x^2 - x} \text{ là ?}$$

Trả lời :

Lời giải

Tập xác định $D = \left(-\infty; -\frac{1}{2} \right] \cup \left[\frac{1}{2}; 1 \right) \cup (1; +\infty)$

Ta có

$$\text{Đ } \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 1} + 3x^2 + 2}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} \sqrt{4 - \frac{1}{x^2}} + 3 + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}} = 3$$

$$\text{Đ } \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 1} + 3x^2 + 2}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\frac{1}{x} \sqrt{4 - \frac{1}{x^2}} + 3 + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}} = 3$$

Do đó đồ thị hàm số nhận đường thẳng $y = 3$ là tiệm cận ngang.

$$\text{Đ } \lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{4x^2 - 1} + 3x^2 + 2}{x^2 - x} = +\infty$$

Do đó đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 1 tiệm cận đứng và 1 tiệm cận ngang.

Câu 2. Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx^2 + (3m+1)x - m + 2}{x+1}$ có tiệm cận xiên là (d) và (d) tiếp xúc với đường tròn tâm $I(1; 2)$, bán kính bằng $\sqrt{2}$.

Trả lời :

Lời giải

$$m \neq 0, (d): mx - y + 2m + 1 = 0$$

Theo bài toán, ta có $d(I; d) = \sqrt{2}$ tức có phương trình $7m^2 - 6m - 1 = 0$.

Câu 3. Cho hàm số $y = \frac{2x+m}{mx-1}$. Tìm m để đồ thị hàm số có tiệm cận đứng, tiệm cận ngang và các tiệm cận cùng với hai trục tọa độ tạo thành một hình chữ nhật có diện tích là 2.

Trả lời :

Lời giải.

$$m \neq 0, S = 2 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{m} \right| \cdot \left| \frac{2}{m} \right| = 2 \Leftrightarrow m = \pm 1$$

Câu 4. (THPT Việt Đức Hà Nội 2019) Với giá trị nào của hàm số m để đồ thị hàm số $y = x - \sqrt{mx^2 - 3x + 7}$ có tiệm cận ngang.

Trả lời :

Lời giải

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang

$\Rightarrow$ Hàm số xác định trên một trong các miền $(-\infty; a), (-\infty; a], (a; +\infty)$ hoặc $[a; +\infty)$

$$m \geq 0$$

TH1: $m = 0 \Rightarrow y = x - \sqrt{-3x + 7}, \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \pm\infty$ đồ thị không có tiệm cận ngang

TH2: $m > 0, y = x - \sqrt{mx^2 - 3x + 7}$

Khi $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - x \sqrt{m - \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2}} \right) = \frac{3}{2}$ đồ thị hàm số có tiệm cận ngang khi và chỉ khi $m = 1$.

Vậy $m = 1$

Cách trắc nghiệm:

Thay $m = 1 \Rightarrow y = x - \sqrt{x^2 - 3x + 7} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 - 3x + 7}) = \frac{3}{2}$ đồ thị hàm số có tiệm cận ngang

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \sqrt{x^2 - 3x + 7}) = -\infty$ không có tiệm cận ngang.

Thay $m = -1 \Rightarrow y = x - \sqrt{-x^2 - 3x + 7} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{-x^2 - 3x + 7})$ không xác định.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \sqrt{-x^2 - 3x + 7})$ không xác định.

Vậy $m = 1$

Câu 5. Có bao nhiêu giá trị m nguyên để đồ thị hàm số $y = \frac{x - 2}{x^2 - 3mx + m}$ có đúng một tiệm cận đứng?

Trả lời :

Lời giải

Để thấy tử số có một nghiệm $x = 2$. Do đó để đồ thị hàm số $y = \frac{x - 2}{x^2 - 3mx + m}$ có đúng một tiệm cận đứng thì cần xét hai trường hợp sau:

$$\Leftrightarrow \Delta = 9m^2 - 4m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \frac{4}{9} \end{cases}$$

Trường hợp 1: $x^2 - 3mx + m = 0$ có nghiệm kép

Trường hợp 2: $x^2 - 3mx + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt, trong đó có một nghiệm bằng 2.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 9m^2 - 4m > 0 \\ 4 - 3 \cdot 2m + m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > \frac{4}{9} \\ m = \frac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{4}{5}$$

Do m nguyên suy ra $m = 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 6. (THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020) Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x^3 - 3mx^2 + (2m^2+1)x - m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2020; 2020]$ để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận?
Lời giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0 \Rightarrow$ đồ thị hàm số đã cho có 1 tiệm cận ngang.

Do đó đồ thị hàm số đã cho có 4 đường tiệm cận khi và chỉ khi nó có 3 tiệm cận đứng (*).

Có $x^3 - 3mx^2 + (2m^2+1)x - m = (x-m)(x^2 - 2mx + 1)$

$$x^3 - 3mx^2 + (2m^2+1)x - m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x^2 - 2mx + 1 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

(*) $\Leftrightarrow x^3 - 3mx^2 + (2m^2+1)x - m = 0$ có 3 nghiệm phân biệt khác 3.

$\Leftrightarrow m \neq 3$ và (2) có 2 nghiệm phân biệt khác m và khác 3.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m^2 - 2m \cdot m + 1 \neq 0 \\ 3^2 - 2m \cdot 3 + 1 \neq 0 \\ \Delta'_2 = m^2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3, m \neq \frac{5}{3} \\ m > 1 \\ m < -1 \end{cases}$$

Do đó tập tất cả giá trị nguyên của m thỏa ycbt là $\{-2020; -2019; \dots; -2; 2; 4; 5; \dots; 2020\}$.

Vậy có 4037 giá trị m thỏa ycbt.

Câu 7. Cho đường cong $(C): y = \frac{x+2}{2x-1}$. Tích khoảng cách từ điểm M bất kì trên (C) đến hai đường tiệm cận của C có giá trị bằng

Lời giải

Công thức nhanh:

Cho đường cong $(C): y = \frac{ax+b}{cx+d}$ và điểm M bất kì thuộc (C) . Gọi d_1, d_2 lần lượt là khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng và tiệm cận ngang thì tích $d_1 \cdot d_2$ không đổi và bằng

$$d_1 d_2 = \frac{|ad - bc|}{c^2}$$

Chứng minh

$$x = \frac{-d}{c} \Rightarrow d_1 = \left| x_M + \frac{d}{c} \right| = \frac{|cx_M + d|}{|c|}$$

Tiệm cận đứng

$$y = \frac{a}{c} \Rightarrow d_2 = \left| y_M - \frac{a}{c} \right| = \left| \frac{ax_M + b}{cx_M + d} - \frac{a}{c} \right| = \left| \frac{bc - ad}{c.(cx_M + d)} \right| = \left| \frac{ad - bc}{c.(cx_M + d)} \right|$$

Tiệm cận ngang

$$d_1 . d_2 = \frac{|cx_M + d|}{|c|} . \left| \frac{ad - bc}{c.(cx_M + d)} \right| = \frac{|ad - bc|}{c^2}$$

Suy ra

Áp dụng vào bài toán

$$d_1 d_2 = \frac{|1.(-1) - 2.2|}{2^2} = \frac{5}{4}$$

Câu 8. Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in [-10; 10]$ sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{2x^2+6x-m-3}$ có hai đường tiệm cận đứng?

Trả lời :

Lời giải

Ta có đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{2x^2+6x-m-3}$ có hai đường tiệm cận đứng khi phương trình $2x^2+6x-m-3=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^2 - 2(-m-3) > 0 \\ 2.1^2 + 6.1 - m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{15}{2} \\ m \neq 5 \end{cases}$$

Từ đó ta suy ra tập các giá trị nguyên của m thỏa mãn là $\{-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Vậy có 17 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 9. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

$$y = \frac{\sqrt{mx^2+3mx+4}}{x+2}$$

bằng 3?

Trả lời :

Lời giải

Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{mx^2+3mx+4}}{x+2}$ có nhiều nhất một tiệm cận đứng và hai tiệm cận ngang.

Điều kiện để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{mx^2+3mx+4}}{x+2}$ có 3 tiệm cận là nó có đúng 1 tiệm cận đứng và 2 tiệm cận ngang.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y \quad \text{và} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y$$

* Xét điều kiện tồn tại

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ m>0 \\ \Delta=9m^2-16m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq \frac{16}{9}$$

Trường hợp 1: $g(x)=mx^2+3mx+4 \geq 0$ với $\forall x \in \mathbf{R}$

Trường hợp 2: $g(x)=mx^2+3mx+4 \geq 0$ với $\forall x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ với x_1, x_2 là nghiệm của

$$g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \Delta = 9m^2 - 16m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{16}{9}$$

Vậy $m \geq 0$ thì tồn tại $\lim_{x \rightarrow +\infty} y$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} y$

Khi đó:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{mx^2+3mx+4}}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{m+\frac{3m}{x}+\frac{4}{x^2}}}{1+\frac{2}{x}} = \sqrt{m}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{mx^2+3mx+4}}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{m+\frac{3m}{x}+\frac{4}{x^2}}}{1+\frac{2}{x}} = -\sqrt{m}$$

Vậy điều kiện để đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là $m > 0$

* Xét trường hợp $x = -2$ là nghiệm của tử số $\Rightarrow x = -2$ là nghiệm của $g(x) = mx^2 + 3mx + 4$

$\Rightarrow g(-2) = 0 \Rightarrow m = 2$

$$y = \frac{\sqrt{2x^2+6x+4}}{x+2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2^-} y = \frac{\sqrt{2(x+1)(x+2)}}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \left[-\sqrt{\frac{2(x+1)}{x+2}} \right] = -\infty$$

Khi đó

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng $x = -2$.

$\Rightarrow m = 2$ thỏa mãn

* Xét trường hợp $x = -2$ không là nghiệm của tử số, để $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

$$\begin{cases} g(-2) \neq 0 \\ g(-2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow g(-2) > 0 \Leftrightarrow 4 - 2m > 0 \Leftrightarrow m < 2$$

thì

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng $x = -2$ với $\forall m \in (0; 2]$

$$y = \frac{\sqrt{mx^2+3mx+4}}{x+2}$$

Vậy điều kiện để đồ thị hàm số có 3 tiệm cận là $\forall m \in (0; 2]$

Vậy có hai giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài là $m = 1, m = 2$.

Câu 10. (Thi thử Lâmônôxốp - Hà Nội 2019) Tổng các giá trị của tham số m để đồ thị của hàm số

$$y = \frac{x-1}{x^2 + 2(m-1)x + m^2 - 2}$$
 có đúng một tiệm cận đứng.

Trả lời :

Lời giải

Đặt $f(x) = x^2 + 2(m-1)x + m^2 - 2$

Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng khi và chỉ khi $f(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt trong đó có 1 nghiệm $x = 1$ hoặc $f(x) = 0$ có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ f(1) = 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)^2 - (m^2 - 2) > 0 \\ 1 + 2(m-1) + m^2 - 2 = 0 \\ m = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{3}{2} \\ m = 1; m = -3 \\ m = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \\ m = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Vậy tổng các giá trị m thỏa mãn là: $-\frac{1}{2}$.

Câu 11. Cho đường cong $(C): y = \frac{x-1}{x+1}$. Biết điểm $M(a, b)$ ($a < 0$) nằm trên (C) và có khoảng cách tới tiệm cận đứng gấp 2 lần khoảng cách tới tiệm cận ngang của (C) . Khi đó $a + b$ nhận giá trị bằng?

Lời giải

Gọi d_1, d_2 lần lượt là khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng và tiệm cận ngang.

Theo giả thiết $d_1 = 2d_2$.

Áp dụng công thức tính nhanh tích khoảng cách

$$d_1 d_2 = \frac{|1 \cdot 1 - 1 \cdot (-1)|}{1^2} = 2 \Rightarrow 2d_2 \cdot d_2 = 2 \Rightarrow d_2^2 = 1 \Rightarrow d_2 = 1 \text{ và } d_1 = 2$$

$$\text{Từ } d_1 = |a+1| \Leftrightarrow 1 = |a+1| \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -2 \end{cases} \Leftrightarrow a = -2 \text{ (do } a < 0) \Rightarrow b = \frac{-2-1}{-2+1} = 3$$

Suy ra $a + b = -2 + 3 = 1$.

Câu 12. (THPT Yên Dũng 2-Bắc Giang) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số

$$y = \frac{2x^2 + 3x + m}{x - m}$$
 không có tiệm cận đứng.

Trả lời :

Lời giải

TXĐ $\mathbb{R} \setminus \{m\}$.

$$\text{Có } \lim_{x \rightarrow m} \frac{2x^2 + 3x + m}{x - m} = \lim_{x \rightarrow m} \left(2x + 2m - 3 + \frac{2m^2 - 2m}{x - m} \right)$$

Để đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng thì phải tồn tại $\lim_{x \rightarrow m} \frac{2x^2 - 3x + m}{x - m}$,

$$\Rightarrow 2m^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases}$$

Vậy đáp án **C.**

Câu 13. (Cụm liên trường Hải Phòng 2019) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thuộc đoạn

$[-2017; 2017]$ để đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{\sqrt{x^2 - 4x + m}}$ có hai tiệm cận đứng.

Trả lời :

Lời giải

Để đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{\sqrt{x^2 - 4x + m}}$ có hai tiệm cận đứng thì phương trình $x^2 - 4x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác - 2

$$\begin{cases} \Delta = 16 - 4m > 0 \\ 2 + 2 \neq -2 \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 \\ m \neq -12 \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow m \in \{-2017; -2016; \dots; 3\} \setminus \{-12\}$$

Do đó số giá trị nguyên của tham số m thỏa đề bài là: $3 - (-2017) + 1 - 1 = 2020$ giá trị.

Câu 14. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số: $y = x + \sqrt{mx^2 + 1}$ có tiệm cận ngang.

Trả lời :

Lời giải

Điều kiện cần và đủ để đồ thị hàm số: $y = x + \sqrt{mx^2 + 1}$ có tiệm cận ngang là tồn tại số thực k sao

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{mx^2 + 1}) = k \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{mx^2 + 1}) = k \end{cases}$$

cho:

Hiển nhiên nếu $m \notin 0$ thì giới $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x + \sqrt{mx^2 + 1})$ không hữu hạn

Nếu $m > 0$ ta có

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{mx^2 + 1}) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{mx^2 + 1}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2(1-m) - 1}{x - \sqrt{mx^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(1-m) - \frac{1}{x}}{1 + \sqrt{m + \frac{1}{x^2}}}$$

+

Để giới hạn trên hữu hạn khi và chỉ khi $m = 1$.

Câu 15. Cho đường cong $(C_m): y = -\frac{1}{2}x + 3 + \frac{2}{mx-1}$ và đường thẳng $(d_m): y = mx - m + 2$. Tìm giá trị của tham số m để (C_m) có điểm cực đại, cực tiểu và tiệm cận xiên của nó tạo với đường thẳng (d_m) một góc 45° .

Trả lời :

Lời giải.

Với $m < 0$ hàm số đã cho có điểm cực đại, cực tiểu và tiệm cận xiên có phương trình:

$x + 2y - 6 = 0$. Góc giữa tiệm cận xiên và (d_m) là 45° , ta có $\cos 45^\circ = \frac{|m-2|}{\sqrt{m^2+1}\sqrt{4+1}}$ hay

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|m-2|}{\sqrt{5}\sqrt{m^2+1}} \Leftrightarrow 10(m^2+1) = 4(m^2-4m+4)$$

$$\Leftrightarrow 6m^2 - 16m - 6 = 0 \Leftrightarrow 3m^2 - 8m - 3 = 0 \Leftrightarrow (m+3)(3m-1) = 0$$

tức $m = -3$ (loại) hoặc $m = \frac{1}{3}$ (nhận)

$$y = \frac{mx^2 + (m^2 + m + 2)x + m^2 + 3}{x+1}$$

Câu 16. Cho hàm số $y = \frac{mx^2 + (m^2 + m + 2)x + m^2 + 3}{x+1}$. Tìm $m \in \mathbb{R}$ để khoảng cách từ gốc O đến tiệm cận xiên hoặc ngang là nhỏ nhất.

Trả lời :

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$

$$y = \frac{mx^2 + (m^2 + m + 2)x + m^2 + 3}{x+1} = mx + m^2 + 2 + \frac{1}{x+1}, x \neq -1$$

Vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$ nên $(d): y = mx + m^2 + 2 \Leftrightarrow (d): mx - y + m^2 + 2 = 0$ là đường cận xiên hoặc ngang của hàm số.

$$d(O; d) = \frac{|m^2 + 2|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{m^2 + 1} + \frac{1}{\sqrt{m^2 + 1}} \geq 2$$

Ta có:

$$\text{Vậy } d(O; d) \text{ nhỏ nhất bằng } 2 \text{ khi } \sqrt{m^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{m^2 + 1}} \Leftrightarrow m = 0.$$

Khi đó hàm số có tiệm cận ngang là $y = 2$.

Câu 17. Tìm được trên đồ thị $(C): y = \frac{x+2}{x-3}$ những điểm M sao cho khoảng cách từ điểm M đến đường tiệm cận đứng bằng $\frac{1}{5}$ khoảng cách từ điểm M đến đường tiệm cận ngang. Hỏi có bao nhiêu điểm M thỏa mãn?

Trả lời :

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$

Gọi đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang lần lượt là $(d_1): x=3, (d_2): y=1$.

$$M(x_0; y_0) \in (C) \Rightarrow M\left(x_0; \frac{x_0 + 2}{x_0 - 3}\right)$$

$$d(M, d_1) = |x_0 - 3|, d(M, d_2) = \left| \frac{x_0 + 2}{x_0 - 3} - 1 \right| = \left| \frac{5}{x_0 - 3} \right|$$

Ta có

$$|x_0 - 3| = \frac{1}{5} \left| \frac{5}{x_0 - 3} \right| \Leftrightarrow (x_0 - 3)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 4 \\ x_0 = 2 \end{cases}$$

Theo bài ra ta có

Vậy có 2 điểm thỏa mãn $M_1(2; -4), M_2(4; 6)$.

Chú ý:

$$d(M, d_1) d(M, d_2) = |x_0 - 3| \cdot \left| \frac{5}{x_0 - 3} \right| = 5$$

1.

$$2. \quad d(M, d_1) + d(M, d_2) \geq 2\sqrt{d(M, d_1) d(M, d_2)} = 2\sqrt{5}$$

Câu 18. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho đồ thị hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^3 + mx + 1} - \sqrt[3]{x^4 + x + 1} + m^2 x}$ nhận trục tung làm tiệm cận đứng. Khi đó tổng các phần tử của S bằng?

Trả lời :

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sqrt{x^3 + mx + 1} - \sqrt[3]{x^4 + x + 1} + m^2 x}{x}}$$

Ta có:

$$\text{Mà } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^3 + mx + 1} - \sqrt[3]{x^4 + x + 1} + m^2 x}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sqrt{x^3 + mx + 1} - 1}{x} - \frac{\sqrt[3]{x^4 + x + 1} - 1}{x} + \frac{m^2 x}{x} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x^3 + mx}{x(\sqrt{x^3 + mx + 1} + 1)} - \frac{x^4 + x}{x(\sqrt[3]{(x^4 + x + 1)^2} + \sqrt[3]{x^4 + x + 1} + 1)} + m^2 \right].$$

Đồ thị hàm số $f(x)$ nhận trục tung làm tiệm cận đứng

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(x^2 + m)}{(\sqrt{x^3 + mx + 1} + 1)} - \frac{(x^3 + 1)}{\sqrt[3]{(x^4 + x + 1)^2} + \sqrt[3]{x^4 + x + 1} + 1} + m^2 \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{m}{2} - \frac{1}{3} + m^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6m^2 + 3m - 2 = 0 \text{ Vậy } m_1 + m_2 = -\frac{1}{2}.$$

Câu 19. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + (m-1)x + m^2 - 2m + 1}{1-x}$ (1). Tổng tất cả các giá trị của m để đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số (1) tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\frac{1}{2}$.

Trả lời :

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$

Ta có: $y = -x - m + \frac{m^2 - m + 1}{1-x}$

Vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} [y - (-x - m)] = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} [y - (-x - m)] = 0$ nên đường thẳng (d) $y = -x - m$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số (1).

(d) cắt hai trục tọa độ tại hai điểm $A(0; -m)$ và $B(-m; 0)$.

Diện tích tam giác OAB : $S = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} |y_A| \cdot |x_B| = \frac{1}{2} m^2$.

Theo giả thiết ta có: $S = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

Câu 20. (Chuyên Vĩnh Phúc - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = m$. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{f(x)+2}$ có duy nhất một tiệm cận ngang.

Trả lời :

Lời giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)+2} = 1 \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 1$.

TH 1: Nếu $m = -1$ thì $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)+2} = 1$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)+2} = 1$ thì đồ thị hàm số có một tiệm cận.

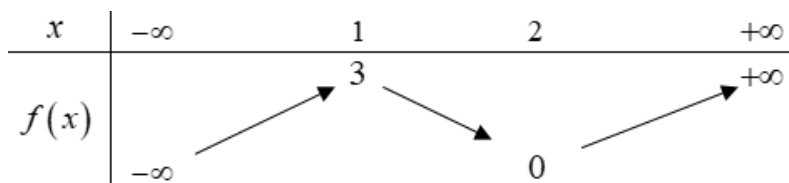
TH 2: Nếu $m \neq -1$

Để đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)+2}$ không có giá trị hữu hạn

$\Leftrightarrow m+2=0 \Leftrightarrow m=-2$.

Vậy khi $m \in \{-2; -1\}$ thì đồ thị hàm số có duy nhất một tiệm cận ngang.

Câu 21. (THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên dưới:



Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-1}$ là?

Trả lời :

Lời giải

Đặt
$$h(x) = \frac{1}{2f(x)-1}$$

*) Tiệm cận ngang:

Ta có:
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2f(x)-1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2f(x)-1} = 0$$

Suy ra đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang $y=0$.

*) Tiệm cận đứng:

Xét phương trình:
$$2f(x)-1=0 \Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{2}$$

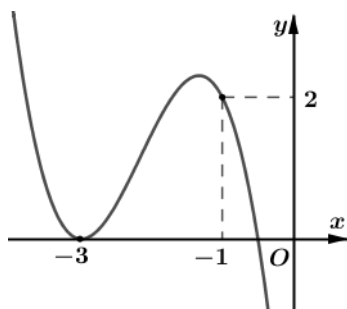
Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(x)=\frac{1}{2}$ có ba nghiệm phân biệt a, b, c thỏa mãn $a < 1 < b < 2 < c$.

Đồng thời $\lim_{x \rightarrow a^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} h(x) = +\infty$ nên đồ thị hàm số $y=h(x)$ có ba đường tiệm cận đứng là $x=a$, $x=b$ và $x=c$.

Vậy tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=h(x)$ là 4.

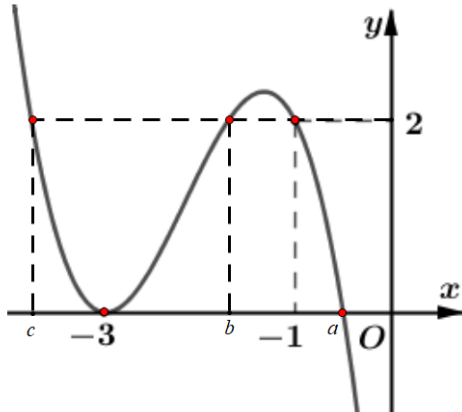
Câu 22. (THPT Bạch Đằng Quảng Ninh 2019) Cho hàm bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Hỏi đồ thị hàm số $y = \frac{(x^2+4x+3)\sqrt{x^2+x}}{x[f^2(x)-2f(x)]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



Trả lời :

Lời giải



$$y = \frac{(x^2 + 4x + 3)\sqrt{x^2 + x}}{x[f^2(x) - 2f(x)]} = \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x \cdot f(x) \cdot [f(x) - 2]}$$

Điều kiện tồn tại căn $\sqrt{x^2 + x} : \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq -1 \end{cases}$.

$$x[f^2(x) - 2f(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = 2 \end{cases}$$

Xét phương trình

Với $x = 0$ ta có $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x \cdot f(x) \cdot [f(x) - 2]} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x+1}}{\sqrt{x} \cdot f(x) \cdot [f(x) - 2]} = +\infty$. Suy ra $x = 0$ là tiệm cận đứng.

Với $f(x) = 0 \Rightarrow x = -3$ (nghiệm bội 2) hoặc $x = a$ (loại vì $-1 < a < 0$).

Ta có: $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x \cdot f(x) \cdot [f(x) - 2]} = -\infty$ nên $x = -3$ là tiệm cận đứng.

Với $f(x) = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = b \ (-3 < b < -1) \\ x = c \ (c < -3) \end{cases}$ (nghiệm bội 1). Ta có:

$\lim_{x \rightarrow b^+} \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x \cdot f(x) \cdot [f(x) - 2]} = 0$ $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x \cdot f(x) \cdot [f(x) - 2]} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x \cdot f(x) \cdot [f(x) - 2]} = 0 \end{cases}$ nên $x = -1$ không là tiệm cận đứng.

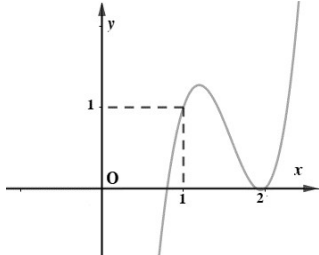
$\lim_{x \rightarrow b^+} \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x \cdot f(x) \cdot [f(x) - 2]} = +\infty$ (do $x \rightarrow b^+$ thì $f(x) \rightarrow 2^+$) nên $x = b$ là tiệm cận đứng.

$\lim_{x \rightarrow c^+} \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x \cdot f(x) \cdot [f(x) - 2]} = +\infty$ (do $x \rightarrow c^+$ thì $f(x) \rightarrow 2^-$) nên $x = c$ là tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số có 4 tiệm cận đứng.

Câu 23. (Lý Nhân Tông - Bắc Ninh 2019) Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ

bên. Hỏi đồ thị hàm số $g(x) = \frac{(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x-1}}{x[f^2(x) - f(x)]}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?



Trả lời :

Lời giải

Nhận xét 1: Với $x_0 \geq 1$ và $\lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x)$ hoặc $\lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x)$ có kết quả là $+\infty$ hoặc $-\infty$ thì $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x)$.

Nhận xét 2: Dựa vào đồ thị hàm số $f(x)$ ta có: $f(x) = a(x - x_1)(x - 2)^2$.

$$x[f^2(x) - f(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = 1 \end{cases}$$

Ta có

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1, 0 < x_1 < 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = x_2, 1 < x_2 < 2 \\ x = x_3, x_3 > 2 \end{cases} \quad \text{suy ra} \quad f(x) - 1 = a(x - 1)(x - x_2)(x - x_3)$$

$$g(x) = \frac{(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x-1}}{x[f^2(x) - f(x)]} = \frac{(x-1)(x-2)\sqrt{x-1}}{x \cdot f(x)[f(x) - 1]}$$

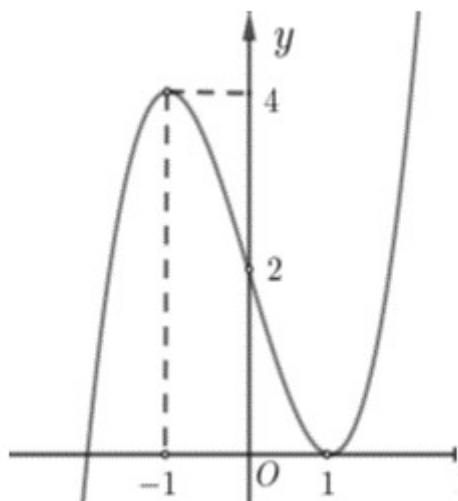
Khi đó ta có

$$g(x) = \frac{(x-1)(x-2)\sqrt{x-1}}{x \cdot a(x-x_1)(x-2)^2 \cdot a(x-1)(x-x_2)(x-x_3)} = \frac{\sqrt{x-1}}{a^2 x(x-x_1)(x-2)(x-x_2)(x-x_3)}$$

$x=0, x=x_1$ không phải tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=g(x)$ không thỏa mãn điều kiện $x_0 \geq 1$. Đồ thị hàm số $g(x)$ có 3 đường tiệm cận đứng là: $x=2, x=x_2, x=x_3$.

Câu 24. (THPT Thuận Thành 3 - Bắc Ninh 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số đa thức có đồ thị như

hình vẽ dưới đây, đặt $g(x) = \frac{x^2 - x}{f^2(x) - 2f(x)}$. Hỏi đồ thị hàm số $y = g(x)$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?



Trả lời :

Lời giải

$$f^2(x) - 2f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = x_1 < -1 \\ x = 0 \\ x = x_2 > 1 \\ x = x_3 < -1, x_3 \neq x_1 \end{cases} \text{ Khi đó}$$

Ta xét phương trình

$$g(x) = \frac{x^2 - x}{ax(x-1)^2(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)} = \frac{1}{a(x-1)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}; (a \neq 0)$$

Vậy đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 4 đường tiệm cận đứng.

Câu 25. (Chuyên Bắc Giang 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên dưới.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	3	0	$+\infty$

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x^3 + x) + 3}$ là?

Trả lời :

Lời giải

Tính tiệm cận ngang.

$$x^3 + x - \frac{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow +\infty} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x^3 + x) + 3} = 0$$

Ta có

$$x^3 + x - \frac{x \rightarrow -\infty}{\rightarrow -\infty} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x^3 + x) + 3} = 0$$

Vậy đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang $y = 0$.

Tính tiệm cận đứng.

Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là số nghiệm của phương trình $f(x^3 + x) + 3 = 0$.

Dựa vào bảng biến thiên ta có $f(x^3 + x) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(x^3 + x) = -3 \Leftrightarrow x^3 + x = x_0; x_0 \in (-\infty; 1)$

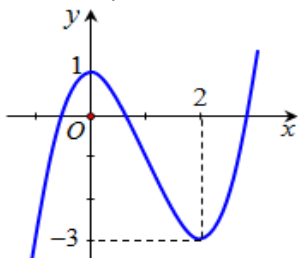
Vì hàm số $y = x^3 + x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ do đó $x^3 + x = x_0; x_0 \in (-\infty; 1)$ có một nghiệm duy nhất.

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x^3 + x) + 3}$ có 1 tiệm cận đứng.

Câu 26. (Chuyên Bắc Ninh 2022) Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ.

$$g(x) = \frac{(x^2 - 2x)\sqrt{2-x}}{(x-3)[f^2(x) + 3f(x)]}$$

Hỏi đồ thị hàm số có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



Trả lời :

Lời giải

ĐK xác định của $\sqrt{2-x}$ là $x \leq 2$ (*)

$$(x-3)[f^2(x) + 3f(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ f(x)=0 \\ f(x)=-3 \end{cases}$$

Ta có

* Ta có $x=3$ không thỏa mãn (*)

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=a < 0 \\ x=b \in (0;2) \\ x=c > 2 \end{cases}$$

* Ta có $x=c$ không thỏa mãn (*)

$$\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow b^+} g(x) = +\infty$$

Ta có $x=a; x=b$ là các đường tiệm cận đứng.

$$* \quad f(x) = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = d < 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Ta có $\lim_{x \rightarrow d^+} g(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = +\infty$. Vậy $x = d; x = 2$ là các đường tiệm cận đứng.