



Chương

Bài 3. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ



Lý thuyết

1. Biểu thức tọa độ của tổng, hiệu hai vectơ và tích của một số với một vectơ



Định nghĩa:

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ và số k .
Khi đó:

$$\begin{aligned} \gg \vec{a} + \vec{b} &= (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3) & \gg \vec{a} - \vec{b} &= (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3) \\ \gg k\vec{a} &= (ka_1; ka_2; ka_3) \end{aligned}$$

$$\vec{a} = k\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases}$$



Chú ý

» Từ nay, các bài tập liên quan đến tọa độ đều được xét trong không gian $Oxyz$.

2. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng



Định nghĩa:

Trong không gian $Oxyz$, tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ được xác định bởi công thức

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

3. Vận dụng



Tọa độ điểm đầu cuối:

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(x_A; y_A; z_A), B(x_B; y_B; z_B)$.
Ta có: $\vec{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.



Tọa độ trung điểm đoạn thẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(x_A; y_A; z_A), B(x_B; y_B; z_B)$.

Tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB là: $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$



Tọa độ trọng tâm tam giác

Trong không gian $Oxyz$, cho $\triangle ABC$ có $A(x_A; y_A; z_A), B(x_B; y_B; z_B)$ và $C(x_C; y_C; z_C)$.

$(x_G; y_G; z_G) = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \right)$



Các dạng bài tập

Dạng 1. Tọa độ tổng hiệu vectơ



Phương

Trong không gian $Oxyz$, hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ và số thực k .

$$(1) \quad \vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$$

$$(2) \quad \vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$$

$$(3) \quad k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases}$$

$$(4) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$



Ví dụ 1.1.

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (2; -1; 5)$ và $\vec{b} = (0; -2; -4)$. Tìm tọa độ của các vectơ sau: $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $5\vec{a}$, $2\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$

Lời giải

Ta có:

$$\vec{a} + \vec{b} = (2 + 0; -1 + (-2); 5 + (-4)) = (2; -3; 1)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (2 - 0; -1 - (-2); 5 - (-4)) = (2; 1; 9)$$

$$5\vec{a} = (5 \cdot 2; 5 \cdot (-1); 5 \cdot 5) = (10; -5; 25)$$

$$2\vec{a} = (4; -2; 10), \quad \frac{1}{2}\vec{b} = (0; -1; -2) \quad \text{Do đó:} \quad 2\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} = (4; -1; 12)$$



Ví dụ 1.2.

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1; -3; -2)$, $B(2; 3; 4)$ và $C(3; 5; 7)$.

Chứng minh rằng ba điểm A, B, C tạo thành tam giác.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \vec{AB} = (3; 6; 6); \quad \vec{AC} = (4; 8; 9)$$

Vì $\frac{3}{4} \neq \frac{6}{8} \neq \frac{6}{9}$ nên $\vec{AB}$ và $\vec{AC}$ không cùng phương.

Vậy ba điểm A, B, C tạo thành tam giác.



Dạng 2. Tọa độ điểm - vector thỏa điều kiện



Phương pháp

- (1) Tích vô hướng của hai vector: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$.
- (2) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc $\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$
- (3) I là trung điểm AB : $I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$
 $\rightarrow \vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0} \Rightarrow \forall M: \vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$
- (4) G là trọng tâm $\triangle ABC$: $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$
 $\rightarrow \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0} \Rightarrow \forall M: \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$
- (5) G là trọng tâm chóp $ABCD$: $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}; \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}; \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4}\right)$
 $\rightarrow \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0} \Rightarrow \forall M: \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = 4\vec{MG}$



Ví dụ 2.1.

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;2;1)$, $B(1;-1;2)$ và $C(1;2;-1)$. Tìm tọa độ vector $\vec{u}$ thỏa $\vec{u} = \vec{BC} - 3\vec{AO}$

Lời giải

Ta có: $\vec{BC} = (0;3;-3)$, $\vec{AO} = (-3;-2;-1)$

Do đó: $\vec{u} = \vec{BC} - 3\vec{AO} = (0 - 3(-3); 3 - 3(-2); -3 - 3(-1)) = (9;9;0)$



Ví dụ 2.2.

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$ và $C(-3;5;1)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho $\vec{AB} = 2\vec{DC}$

Lời giải

Gọi $D(x;y;z)$ là điểm cần tìm.

Ta có: $\vec{AB} = (1;-3;4)$, $\vec{DC} = (-3-x;5-y;1-z)$

$$\Leftrightarrow \vec{AB} = 2\vec{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 2(-3-x) \\ -3 = 2(5-y) \\ 4 = 2(1-z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{7}{2} \\ y = \frac{13}{2} \\ z = -1 \end{cases}$$

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành

Vậy $D\left(-\frac{7}{2}; \frac{13}{2}; -1\right)$.



Ví dụ 2.3.

Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;2)$ và $D(2;2;2)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB và CD . Xác định tọa độ trung

Lời giải

Ta có M là trung điểm $AB \Rightarrow M\left(\frac{2+0}{2}; \frac{0+2}{2}; \frac{0+0}{2}\right) \Rightarrow M(1;1;0)$

Và N là trung điểm $CD \Rightarrow N\left(\frac{0+2}{2}; \frac{0+2}{2}; \frac{2+2}{2}\right) \Rightarrow N(1;1;2)$

Vậy I là trung điểm $MN \Rightarrow I\left(\frac{1+1}{2}; \frac{1+1}{2}; \frac{0+2}{2}\right) \Rightarrow I(1;1;1)$.



Ví dụ 2.4.

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-1)$ và $B(0;-2;3)$. Tìm tọa độ chân đường cao kẻ từ đỉnh O của tam giác OAB .

Lời giải

Gọi $K(x;y;z)$ là điểm cần tìm.

Ta có: $\vec{AK} = (x-1; y-2; z+1)$, $\vec{AB} = (-1; -4; 4)$

$$\vec{AK} = k\vec{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=k(-1) \\ y-2=k(-4) \\ z+1=k4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-k+1 \\ y=-4k+2 \\ z=4k-1 \end{cases}$$

Vì A, K, B thẳng hàng nên

$$\Rightarrow K(-k+1; -4k+2; 4k-1) \Rightarrow \vec{OK} = (-k+1; -4k+2; 4k-1)$$

Vì $OK \perp AB$ nên $\vec{OK} \cdot \vec{AB} = 0 \Leftrightarrow (-k+1) \cdot (-1) + (-4k+2) \cdot (-4) + (4k-1) \cdot 4 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{13}{33}$.

Vậy $K\left(\frac{20}{33}; \frac{14}{33}; \frac{19}{33}\right)$.



Ví dụ 2.5.

Trong không gian $Oxyz$, cho $\triangle ABC$ biết $A(2;4;-3)$ có trọng tâm $G(2;1;0)$. Khi đó xác định tọa độ $\vec{AB} + \vec{AC}$

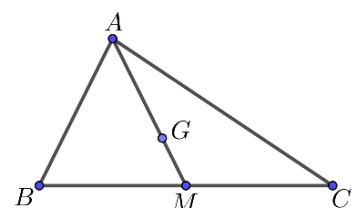
Lời giải

Gọi M là trung điểm đoạn BC , G là trọng tâm $\triangle ABC$

Ta có $\vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AM}$ (quy tắc hình bình hành)

$$\vec{AM} = \frac{3}{2}\vec{AG}$$

Và





Do đó $\vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AM} = 2 \cdot \frac{3}{2} \vec{AG} = 3(0; -3; 3) = (0; -9; 9)$.



Dạng 3. Độ dài vectơ



Phương

$$(1) \vec{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) \rightarrow AB = |\vec{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

$$(2) \text{Độ dài vectơ } \vec{a}: |\vec{a}| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2} \rightarrow |\vec{a}|^2 = a^2 = (a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2$$



Ví dụ 3.1.

Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1; 2; -1)$ và $B(0; 3; 1)$. Tính độ dài đoạn thẳng

Lời giải

Ta có $\vec{AB} = (-1; 1; 2) \Rightarrow AB = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}$



Ví dụ 3.2.

Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC biết $A(1; 0; -2), B(2; 1; -1), C(1; -2; 2)$. Tính chu vi của $\triangle ABC$

Lời giải

Theo công thức tính độ dài ta được

$$AB = \sqrt{(2-1)^2 + (1-0)^2 + (-1+2)^2} = \sqrt{3};$$

$$BC = \sqrt{1+9+9} = \sqrt{10};$$

$$AC = \sqrt{0+4+16} = 2\sqrt{5}.$$

Chu vi của $ABC: \sqrt{3} + \sqrt{10} + 2\sqrt{5}.$



Ví dụ 3.3.

Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1; 2; -1), B(0; 3; 1); C(3; 2; 0)$. Tính diện tích $DABC$ (nếu có).

Lời giải

Ta có $\vec{AB} = (-1; 1; 2)$ và $\vec{AC} = (2; 0; 1)$ không cùng phương nên ba điểm $A; B; C$ lập thành tam giác.

Và $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow \vec{AB} \perp \vec{AC} \Rightarrow AB \perp AC$ nên $DABC$ vuông tại A .

Mặt khác $AB = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}$ và $AC = \sqrt{2^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

Vậy diện tích tam giác ABC là $S = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \sqrt{6} \cdot \sqrt{5} = \frac{\sqrt{30}}{2}.$



Ví dụ 3.4.

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;0;0)$, $B(0;3;1)$, $C(-3;6;4)$. Tìm điểm M thuộc đoạn BC sao cho $MC = 2MB$. Tìm độ dài đoạn AM .

Lời giải

Giả sử $M(a;b;c) \Rightarrow \vec{BM} = (a; b-3; c-1)$ và $\vec{BC} = (-3; 3; 3)$.

$$MC = 2MB \Rightarrow \vec{BM} = \frac{1}{3} \vec{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \cdot (-3) \\ b-3 = \frac{1}{3} \cdot 3 \\ c-1 = \frac{1}{3} \cdot 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow M(-1; 4; 2)$$

Điểm $M \in BC$:

Vậy $AM = \sqrt{9+16+4} = \sqrt{29}$.



▮ Dạng 4. Sự cùng phương của hai vectơ



Phương

Xét hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ ta có:

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$$

(1) Hai vectơ bằng nhau:

$$\vec{a} = k\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = k$$



Ví dụ 4.1.

Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a} = (4; 1; -2)$; $\vec{b} = (1; -2; -1)$; $\vec{c} = (8; 2; -4)$; $\vec{d} = (-4; -1; 2)$. Vectơ $\vec{a} = (4; 1; -2)$ cùng phương với vectơ nào đã cho?

🔗 Lời giải

Xét $\begin{cases} \vec{a} = (4; 1; -2) \\ \vec{b} = (1; -2; -1) \end{cases} \Rightarrow \frac{4}{1} \neq \frac{1}{-2} \neq \frac{-2}{-1}$ nên $\vec{a}$ không cùng phương $\vec{b}$.

Xét $\begin{cases} \vec{a} = (4; 1; -2) \\ \vec{c} = (8; 2; -4) \end{cases} \Rightarrow \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = \frac{-2}{-4}$ nên $\vec{a}$ cùng phương $\vec{c}$.

Xét $\begin{cases} \vec{a} = (4; 1; -2) \\ \vec{d} = (-4; -1; 2) \end{cases} \Rightarrow \frac{4}{-4} = \frac{1}{-1} = \frac{-2}{2}$ nên $\vec{a}$ cùng phương $\vec{d}$.

Vậy vectơ $\vec{a}$ cùng phương với vectơ $\vec{c}$ và $\vec{d}$.



Ví dụ 4.2.

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (1; 1; 5)$ và $\vec{b} = (m+1; 2n; 10)$. Tìm m, n để hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.

🔗 Lời giải

Để hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = k(m+1) \\ 1 = k(2n) \\ 5 = k \cdot 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ m = 1 \\ n = 1 \end{cases}$$

Vậy: $m=1; n=1$.



Ví dụ 4.3.

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; -1; 5)$, $B(5; -5; 7)$, $M(x; y; 1)$. Với giá trị nào của x, y thì A, B, M thẳng hàng.

Lời giải

Ta có $\vec{AB} = (3; -4; 2)$, $\vec{AM} = (x-2; y+1; -4)$.

A, B, M thẳng hàng. $\Leftrightarrow \vec{AB}, \vec{AM}$ cùng phương $\Leftrightarrow \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-4} = \frac{-4}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 7 \end{cases}$.



Ví dụ 4.4.

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2; 3; 1)$ và $B(5; 6; 2)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm M . Tính tỉ số $\frac{AM}{BM}$.

Lời giải

$M \in (Oxz) \Rightarrow M(x; 0; z)$; $\vec{AB} = (7; 3; 1) \Rightarrow AB = \sqrt{59}$; $\vec{AM} = (x+2; -3; z-1)$

A, B, M thẳng hàng $\Rightarrow \vec{AM} = k\vec{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = 7k \\ -3 = 3k \\ z-1 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -9 \\ -1 = k \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow M(-9; 0; 0).$

$\vec{BM} = (-14; -6; -2)$, $\vec{AM} = (-7; -3; -1) \Rightarrow AM = \sqrt{59}$, $BM = 2\sqrt{59} \Rightarrow \frac{AM}{BM} = \frac{1}{2}$.



Dạng 5. Tích vô hướng và ứng dụng



Phương

Xét hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ ta có:

$$\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}; \vec{b}) \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \end{cases}$$

(1) Tích vô hướng hai vectơ:

$$\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2} \cdot \sqrt{(b_1)^2 + (b_2)^2 + (b_3)^2}}$$

→ Góc giữa 2 vectơ:

Chú ý: Khi $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ thì $\cos(\vec{a}; \vec{b}) > 0 \Rightarrow (\vec{a}; \vec{b})$ là góc nhọn,
 Khi $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ thì $\cos(\vec{a}; \vec{b}) < 0 \Rightarrow (\vec{a}; \vec{b})$ là góc tù.

(2) Vectơ $\vec{a}$ vuông góc vectơ $\vec{b}$: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$

► Bài toán liên quan giữa độ dài và tích vô hướng:

Cho hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ có $|\vec{u}| = m$, $|\vec{v}| = n$ và tạo với nhau một góc α . Tính $|\vec{u} + \vec{v}|$ hoặc $|\vec{u} - \vec{v}|$ hoặc tùy vào yêu cầu bài toán.

Hướng giải quyết

» **Bước 1:** Biến đổi $(\vec{u} + \vec{v})^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$

$$\begin{cases} \vec{u}^2 = |\vec{u}|^2 \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}; \vec{b}) \end{cases}$$

» **Bước 2:** Áp dụng:

$$\vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 = |\vec{u}|^2 + 2|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos(\vec{u}; \vec{v}) + |\vec{v}|^2 \quad (*)$$

Để biến đổi:



Ví dụ 5.1.

Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (-3; 4; 0)$, $\vec{b} = (5; 0; 12)$. Tính cosin của góc giữa

Lời giải

$$\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-3 \cdot 5 + 4 \cdot 0 + 0 \cdot 12}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2 + 0^2} \cdot \sqrt{5^2 + 0^2 + 12^2}} = -\frac{3}{13}$$

Ta có:



Ví dụ 5.2.

Trong không gian $Oxyz$, cho $A(-1; -2; 3)$, $B(0; 3; 1)$, $C(4; 2; 2)$. Cosin của $\angle BAC$

Lời giải

$$\cos(\angle BAC) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|}$$

Ta có $\cos \angle BAC =$

$$\text{mà: } \vec{AB} = (1; 5; -2), \vec{AC} = (5; 4; -1)$$



$$\cos(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{1.5 + 5.4 + (-2)(-1)}{\sqrt{1^2 + 5^2 + (-2)^2} \sqrt{5^2 + 4^2 + (-1)^2}} = \frac{27}{\sqrt{30}\sqrt{42}} = \frac{9}{2\sqrt{35}}$$



Ví dụ 5.3.

Trong không gian $Oxyz$, cho hai véc tơ $\vec{a} = (2; 1; -2)$, $\vec{b} = (0; -\sqrt{2}; \sqrt{2})$. Tìm tất cả giá trị của m để hai véc tơ $\vec{u} = 2\vec{a} + 3m\vec{b}$ và $\vec{v} = m\vec{a} - \vec{b}$ vuông góc với nhau.

Lời giải

$$\begin{cases} \vec{u} = 2\vec{a} + 3m\vec{b} = (2; 2 - 3m\sqrt{2}; -4 + 3m\sqrt{2}) \\ \vec{v} = m\vec{a} - \vec{b} = (2m; m + \sqrt{2}; -2m - \sqrt{2}) \end{cases}$$

Ta có:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow 4m + (2 - 3m\sqrt{2})(m + \sqrt{2}) + (-4 + 3m\sqrt{2})(-2m - \sqrt{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 9m^2\sqrt{2} - 6m - 6\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{\pm\sqrt{26} + \sqrt{2}}{6}$$



Ví dụ 5.4.

Trong không gian $Oxyz$, cho vector $\vec{u} = (1; 1; -2)$, $\vec{v} = (1; 0; m)$. Tìm m để góc giữa hai vector $\vec{u}, \vec{v}$ bằng 45°

Lời giải

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \cos 45^\circ \Leftrightarrow \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{1 - 2m}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{1^2 + m^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ta có:

$$\Leftrightarrow \frac{1 - 2m}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{1 + m^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 1 - 2m = \sqrt{3 + 3m^2} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2m \geq 0 \\ (1 - 2m)^2 = 3 + 3m^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{1}{2} \\ m^2 - 4m - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{1}{2} \\ m = 2 \pm \sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow m = 2 - \sqrt{6}$$



Ví dụ 5.5.

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{u}$ và $\vec{v}$ tạo với nhau một góc 120° và $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 5$. Tính $|\vec{u} + \vec{v}|$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } (\vec{u} + \vec{v})^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})$$

$$= \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 = |\vec{u}|^2 + 2|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos(\vec{u}, \vec{v}) + |\vec{v}|^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 5^2 = 19$$

$$\text{Suy ra } |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{19}$$



Dạng 6. Tâm tỷ cự



Phương

► Bài toán cực trị độ dài vecto:

Cho n điểm $A_1; A_2; \dots; A_n$ và các hệ số $k_1; k_2; \dots; k_n$ sao cho $k = k_1 + k_2 + \dots + k_n \neq 0$ và đường thẳng d hoặc mặt phẳng (P) . Tìm điểm M trên đường thẳng d hoặc mặt phẳng (P) , sao cho $|k_1 \vec{MA}_1 + k_2 \vec{MA}_2 + \dots + k_n \vec{MA}_n|$ nhỏ nhất.

Hướng giải quyết

» **Bước 1:** Gọi I là điểm thỏa mãn $k_1 \vec{IA}_1 + k_2 \vec{IA}_2 + \dots + k_n \vec{IA}_n = \vec{0}$.

» **Bước 2:** Áp dụng quy tắc ba điểm biến đổi:

$$|k_1 \vec{MA}_1 + k_2 \vec{MA}_2 + \dots + k_n \vec{MA}_n| = |(k_1 + k_2 + \dots + k_n) \vec{MI}| = |k| |\vec{MI}|$$

» **Bước 3:** Tìm độ dài nhỏ nhất của các vecto đã cho xảy ra khi M xảy ra ở vị trí nào?

► Bài toán cực trị độ dài bình phương vecto:

Cho đa giác $A_1 A_2 \dots A_n$ và các hệ số $k_1; k_2; \dots; k_n$ sao cho $k = k_1 + k_2 + \dots + k_n > 0$. Tìm điểm M trên đường thẳng d hoặc mặt phẳng (P) , sao cho tổng $S = k_1 \cdot MA_1^2 + k_2 \cdot MA_2^2 + \dots + k_n \cdot MA_n^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Hướng giải quyết

» **Bước 1:** Gọi I là điểm thỏa mãn $k_1 \vec{IA}_1 + k_2 \vec{IA}_2 + \dots + k_n \vec{IA}_n = \vec{0}$.

» **Bước 2:** Thấy rằng

$$MA_1^2 = |\vec{MA}_1|^2 = (\vec{MI} + \vec{IA}_1)^2 = (\vec{MI})^2 + 2(\vec{MI} \cdot \vec{IA}_1) + (\vec{IA}_1)^2$$

Áp dụng quy tắc ba điểm biến đổi:

$$\begin{aligned} S &= k_1 \cdot MA_1^2 + k_2 \cdot MA_2^2 + \dots + k_n \cdot MA_n^2 \\ &= k_1 \left[(\vec{MI})^2 + 2(\vec{MI} \cdot \vec{IA}_1) + (\vec{IA}_1)^2 \right] + \dots + k_n \left[(\vec{MI})^2 + 2(\vec{MI} \cdot \vec{IA}_n) + (\vec{IA}_n)^2 \right] \\ &= (k_1 + k_2 + \dots + k_n) MI^2 + (k_1 \cdot IA_1^2 + \dots + k_n \cdot IA_n^2) + 2\vec{MI} \cdot \left(k_1 \vec{IA}_1 + k_2 \vec{IA}_2 + \dots + k_n \vec{IA}_n \right) \\ &= (k_1 + k_2 + \dots + k_n) MI^2 + (k_1 \cdot IA_1^2 + \dots + k_n \cdot IA_n^2) \end{aligned}$$

» **Bước 3:** Do $k > 0$, để $S = k_1 \cdot MA_1^2 + k_2 \cdot MA_2^2 + \dots + k_n \cdot MA_n^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì ta xác định vị trí điểm M cần tìm.

► **Chú ý:** Cho đa giác $A_1 A_2 \dots A_n$ và các hệ số $k_1; k_2; \dots; k_n$ sao cho $k = k_1 + k_2 + \dots + k_n < 0$. Tìm điểm M trên d hoặc (P) , sao cho tổng



Ví dụ 6.1.

Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2; -3; 7), B(0; 4; 1), C(3; 0; 5)$ và $D(3; 3; 3)$. Gọi M là điểm nằm trên mặt phẳng (Oyz) sao cho biểu thức $|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD}|$

Lời giải

Ta có $\vec{AB} = (-2; 7; -6), \vec{AC} = (1; 3; -2), \vec{AD} = (1; 6; -4)$ nên $[\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD} = -4 \neq 0$.

Suy ra $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ không đồng phẳng.

Gọi G là trọng tâm tứ diện $ABCD$. Khi đó $G(2; 1; 4)$

Ta có $|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD}| = |4\vec{MG}| = 4MG$.

Do đó $|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD}|$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MG ngắn nhất.

Vậy M là hình chiếu vuông góc của G lên mặt phẳng (Oyz) nên $M(0; 1; 4)$.



Ví dụ 6.2.

Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{OA} = \vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}, B(2; 2; 1)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc trục tung sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất.

Lời giải

Cách 1.

Do $M \in Oy$, nên $M(0; y; 0)$.

Tính $MA^2 + MB^2 = 2y^2 - 6y + 20 = f(y)$.

Do đó $f(y)$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $y = \frac{3}{2}$. Vậy $M(0; \frac{3}{2}; 0)$.

Cách 2.

Ta có $A(1; 1; -3)$. Gọi I là trung điểm của AB . Suy ra $I(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; -1)$.

Khi đó $MA^2 + MB^2 = \vec{MA}^2 + \vec{MB}^2 = (\vec{MI} + \vec{IA})^2 + (\vec{MI} + \vec{IB})^2$

$= 2\vec{MI}^2 + \vec{IA}^2 + \vec{IB}^2 + 2\vec{MI} \cdot (\vec{IA} + \vec{IB}) = 2MI^2 + IA^2 + IB^2 = 2MI^2 + 9$.

Do đó $MA^2 + MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất

$\Leftrightarrow$ khi MI có độ dài ngắn nhất

$\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I trên trục tung.



Vậy $M\left(0; \frac{3}{2}; 0\right)$.

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com
<https://www.vnteach.com>