|  |  |
| --- | --- |
| **SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO****TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÀO CAI****GV ra đề: Nguyễn Quang Tân**  | **ĐỀ ĐỀ XUẤT HSG****VÙNG DUYÊN HẢI VÀ ĐBBB****NĂM HỌC 2022 – 2023****Môn: Toán – Lớp 11*****Thời gian làm bài: 180 phút, không kể phát đề*** |

**Câu 1 (4 điểm).** Cho dãy số ($u\_{n}$) thỏa mãn $u\_{1}=\frac{2023}{2022}$ , $u\_{n+1}=u\_{n}+2\sqrt{u\_{n}}+\frac{n^{2}}{u\_{n}}$ với $n\geq 1.$

1. Tính $\left⌊\sqrt{u\_{2023}}\right⌋$.
2. Chứng minh rằng dãy $a\_{n}=\frac{1}{u\_{1}}+\frac{2}{u\_{2}}+…+\frac{n}{u\_{n}}$ không có giới hạn hữu hạn.

**Câu 2 (4 điểm).** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có M là trung điểm BC. Tiếp tuyến tại B,C của O cắt nhau tại T. (BOC) lần lượt cắt lại AC,AB tại điểm thứ hai là E,F. Gọi S là hình chiếu của O trên AT, H là trực tâm của tam giác BOC.

1. Kẻ đường cao AD của tam giác ABC, gọi L là điểm Lemoine của tam giác ABC. Chứng minh rằng khi A di động trên (O) sao cho ABC là tam giác nhọn, DL luôn đi qua một điểm cố định.
2. Chứng minh rằng hai đường tròn (AEF) và (HST) trực giao.

**Câu 3 (4 điểm).** Tìm tất cả các hàm số$ f:R\rightarrow R$ thỏa mãn:

$$f\left(xy+xf\left(y\right)\right)=xy+yf\left(x\right), ∀x,y \in R.$$

**Câu 4 (4 điểm).** Cho a là số nguyên dương thỏa mãn gcd(an+1,2n+1) = 1 với mọi số nguyên n.

1. Chứng minh rằng gcd(a-2,2n+1) = 1 với mọi số nguyên n.
2. Tìm tất cả số nguyên a thỏa mãn.

**Câu 5 (4 điểm).** Cho một bảng kích thước 2024 × 2024 được điền các số tự nhiên từ 1 đến

2024 theo quy tắc sau: Hàng thứ nhất ta điền các số từ 1 đến 2024 từ trái qua phải, ở

hàng thứ hai ta đánh các số từ 2025 đến 4048 từ phải qua trái, các hàng tiếp theo được

đánh theo kiểu zích zắc tương tự như trên. Hãy tìm các phủ kín bẳng trên bởi 1012 × 2024

quân cơ Domino 1x2 sao cho tổng của tích các số trên mỗi quân cờ Domino lớn nhất.

------ Hết ------

**ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM THI**

**Câu 1 (4 điểm).** Cho dãy số ($u\_{n}$) thỏa mãn $u\_{1}=\frac{2023}{2022}$ , $u\_{n+1}=u\_{n}+2\sqrt{u\_{n}}+\frac{n^{2}}{u\_{n}}$ với $n\geq 1.$

1. Tính $\left⌊\sqrt{u\_{2023}}\right⌋$.
2. Chứng minh rằng dãy $a\_{n}=\frac{1}{u\_{1}}+\frac{2}{u\_{2}}+…+\frac{n}{u\_{n}}$ không có giới hạn hữu hạn.

|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung** | **Điểm** |
| a) Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp: $n^{2}<u\_{n}<(n+1)^{2}.$Thật vậy: Xét $n=1$ đúng, giả sử khẳng định đúng tới $n=k\geq 1$, ta sẽ chứng minh khẳng định vẫn đúng với $n=k+1$ | 0,5 |
| Ta có: $u\_{k+1}=u\_{k}+2\sqrt{u\_{k}}+\frac{k^{2}}{u\_{k}}>k^{2}+2k+1=(k+1)^{2}$ $u\_{k+1}=u\_{k}+2\sqrt{u\_{k}}+\frac{k^{2}}{u\_{k}}<(k+1)^{2}+2(k+1)+1=(k+2)^{2}$ | 0,5 |
| Vậy theo nguyên lý quy nạp toán học, ta có $n^{2}<u\_{n}<(n+1)^{2}.$ | 0,5 |
| $\rightarrow \left⌊\sqrt{u\_{2023}}\right⌋=2023$. | 0,5 |
| b) Rõ ràng $(a\_{n}) $là dãy tăng, hơn nữa:$$a\_{n}=\frac{1}{u\_{1}}+\frac{2}{u\_{2}}+…+\frac{n}{u\_{n}}>\frac{1}{2^{2}}+\frac{2}{3^{2}}+…+\frac{n}{(n+1)^{2}}$$ | 0,5 |
| Ta sẽ chứng minh: lim $\left(\frac{1}{2^{2}}+\frac{2}{3^{2}}+…+\frac{n}{(n+1)^{2}}\right)=+\infty $. Thật vậy:Gọi $(s\_{n})$ là dãy thỏa mãn: $s\_{n}=\sum\_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)^{2}}$. Xét dãy con $(s\_{2^{k}-1})$, ta có:$$\frac{2^{k}}{\left(2^{k}+1\right)^{2}}+\frac{2^{k}+1}{\left(2^{k}+1\right)^{2}}+…+\frac{2^{k+1}-1}{\left(2^{k}+1\right)^{2}}>\frac{2^{k}+2^{k}+1+…+2^{k+1}-1}{2^{2k+2}}$$ | 0,5 |
| $$=\frac{2^{k}(2^{k}+2^{k+1}-1)}{2^{2k+3}}=\frac{2^{k}+2^{k+1}-1}{2^{2k+2}}>\frac{2^{k+1}}{2^{k+3}}=\frac{1}{4}$$ | 0,5 |
| $$\rightarrow s\_{2^{k}-1}>\frac{k}{4}, ∀k\in N^{\*}$$Mà $\lim\_{k\to +\infty }\frac{k}{4}=+\infty $ nên lim$s\_{2^{k}-1}=+\infty \rightarrow $ lim$s\_{n}=+\infty $. | 0,5 |

**Câu 2 (4 điểm).** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có M là trung điểm BC. Tiếp tuyến tại B,C của O cắt nhau tại T. (BOC) lần lượt cắt lại AC,AB tại điểm thứ hai là E,F. Gọi S là hình chiếu của O trên AT, H là trực tâm của tam giác BOC.

1. Kẻ đường cao AD của tam giác ABC, gọi L là điểm Lemoine của tam giác ABC. Chứng minh rằng khi A di động trên (O) sao cho ABC là tam giác nhọn, DL luôn đi qua một điểm cố định.
2. Chứng minh rằng hai đường tròn (AEF) và (HST) trực giao.

|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung** | **Điểm** |
|  |  |
| a) Gọi M là trung điểm BC, ta có chùm điều hòa cơ bản D(AM,ST)=-1 (1). | 0,5 |
| Mặt khác, do H là trực tâm của tam giác BOC nên $\overbar{MO}.\overbar{MH}=-\overbar{MB}.\overbar{MC}=-\overbar{MT}.\overbar{MO} \rightarrow \overbar{MH}=-\overbar{MT} $hay M là trung điểm HT. | 1,0 |
| Lại có $DA//HT$ nên D(AM,HT)=-1 (2). Từ (1) và (2) suy ra D,L,H thẳng hàng. Rõ ràng khi A di động thì H là điểm cố định nên ta có điều phải chứng minh. | 0,5 |
| b) Xét phép nghịch đảo f cực A, phương tích $\overbar{AB}.\overbar{AF},$ ta có: | 0,5 |
| f: $B\leftrightarrow F, C\leftrightarrow E, S\leftrightarrow T, \left(AEF\right)\leftrightarrow BC, (HST)\leftrightarrow (HST) $. | 0,5 |
| Mặt khác, theo ý a ta có H,T đối xứng nhau qua BC nên tâm của (HST) thuộc BC. | 0,5 |
| Do phép nghịch đảo có tính bảo toàn góc nên (AEF) trực giao với (HST), ta có điều phải chứng minh. | 0,5 |

**Câu 3 (4 điểm).** Tìm tất cả các hàm số$ f:R\rightarrow R$ thỏa mãn:

$$f\left(xy+xf\left(y\right)\right)=xy+yf\left(x\right), ∀x,y \in R.$$

|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung** | **Điểm** |
| Gọi là phép thế chỉ khẳng định (1) (2)Giả sử sao cho (3) | 0,5 |
| Từ (3)  (4)Trong (4) thay  Thử lại thấy không thỏa mãn.Suy ra  | 0,5 |
| Xét 2 trường hợp sau:Trường hợp 1:  Thử lại thấy thỏa mãn.Trường hợp 2: Giả sử và  (5) (6) | 1,0 |
| Từ (5), (6) suy ra (7)Trong (7) thay  bởi  (8) | 0,5 |
| Từ (8) suy ra Cũng từ (1) : Suy raKết hợp với suy ra đơn ánh trên Viết lại (1) thành (9)Trong (9) thay  ta được | 0,5 |
| Đổi vai trò  suy raThay Từ (2)  | 0,5 |
| Thử lại ta được Vậy tất cả các hàm thỏa mãn là  | 0,5 |

***Câu 4 (4 điểm).***Cho *a* là số nguyên dương thỏa mãn gcd(*an*+1,2*n*+1) = 1 với mọi số nguyên *n*.

1. Chứng minh rằng gcd(*a*-2,2*n*+1) = 1 với mọi số nguyên *n.*
2. Tìm tất cả số nguyên *a* thỏa mãn.

|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung** | **Điểm** |
| 1. Ta có an + 1 = 2n + 1 + (a-2)n nên (an+1,2n+1) = (2n+1,(a-2)n)=1

Suy ra (2n+1,a-2) = 1 | 1,0 |
| 1. TH1 : a chẵn , đặt a=2k ( k nguyên dương)

Theo ý a ta có (2n+1,2k-2) = (2n+1,a-2) = 1 với mọi n nguyênHay (2n+1, k-1) = 1 với mọi n nguyênSuy ra k-1 = 2x  nên a = 2x+1 +2 với x là số nguyên không âm | 1,0 |
| TH2 : a lẻNếu a = 1 hoặc a = 3 thì thỏa mãn | 1,0 |
| Nếu a = 1 hoặc a = 3 thì thỏa mãnXét a ≥ 5 , đặt a = 2k+1 với k ≥ 2Khi đó với n = 3k – 2 thì gcd (an+1,2n+1) = 2k-1 > 1 Vậy a = 1, a = 3 hoặc a = 2m + 2, m ≥ 1 thì thỏa mãn | 1,0 |

**Câu 5 (4 điểm).** Cho một bảng kích thước 2024 × 2024 được điền các số tự nhiên từ 1 đến

2024 theo quy tắc sau: Hàng thứ nhất ta điền các số từ 1 đến 2024 từ trái qua phải, ở

hàng thứ hai ta đánh các số từ 2025 đến 4048 từ phải qua trái, các hàng tiếp theo được

đánh theo kiểu zích zắc tương tự như trên. Hãy tìm các phủ kín bẳng trên bởi 1012 × 2024

quân cơ Domino 1x2 sao cho tổng của tích các số trên mỗi quân cờ Domino lớn nhất.

|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung** | **Điểm** |
| Đặt A = { 1,2,…,20242 }. Gọi $a\_{i}$ , $b\_{i}$ là hai số được ghi trên quân cờ Domino thứ I với $a\_{i}$ , $b\_{i}$$\in ${ 1,2,…, 20242 } ; i = 1,…, 1006 x 2012 và S = $\sum\_{i=1}^{n}a\_{i}.b\_{i} $với n = 1012 x 2024. Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của S. | 0,5 |
| Vì xy = $\frac{x^{2} + y^{2}}{2}$ - $\frac{(x - y)^{2}}{2}$ Nên ta có:  S = $\frac{1}{2}$ $\sum\_{i=1}^{n}\left(a\_{i}^{2}+ b\_{i}^{2}\right)$ - $\frac{1}{2}\sum\_{i=1}^{n}(a\_{i}- b\_{i})^{2}$ | 1,0 |
| Mặt khác $a\_{i} , b\_{i}$ là các số tự nhiên khác nhau thuộc tập A nên  $\sum\_{i=1}^{n}\left(a\_{i}^{2}+ b\_{i}^{2}\right)$ = $\sum\_{i=1}^{2n}i^{2}$ và $(a\_{i}- b\_{i})^{2}$ ≥ 1  | 1,0 |
|  Suy ra S ≤ $\frac{1}{2}$ $\sum\_{i=1}^{2n}(i^{2}-n)$ | 0,5 |
| Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a\_{i} , b\_{i} $là hai số tự nhiên liên tiếpVậy để S lớn nhất ta phủ các quân cờ Domino sao cho mỗi quân cờ chứa hai số tự nhiên liên tiếp. | 1,0 |