

CHỦ ĐỀ 6

ĐƯỜNG THẲNG LIÊN QUAN ĐẾN GÓC VÀ KHOẢNG CÁCH

DẠNG 1

LẬP PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG LIÊN QUAN ĐẾN GÓC

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-2; 0; 1)$, đường thẳng d qua điểm A và tạo với trục Oy góc 45° . Phương trình đường thẳng d là

A.
$$\begin{cases} \frac{x+2}{2} = \frac{y}{\sqrt{5}} = \frac{z-1}{-1} \\ \frac{x+2}{2} = \frac{y}{-\sqrt{5}} = \frac{z-1}{-1} \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} \frac{x-2}{2} = \frac{y}{\sqrt{5}} = \frac{z+1}{-1} \\ \frac{x-2}{2} = \frac{y}{-\sqrt{5}} = \frac{z+1}{-1} \end{cases}$$

C.
$$\begin{cases} \frac{x+2}{2} = \frac{y}{\sqrt{5}} = \frac{z-1}{-1} \\ \frac{x-2}{2} = \frac{y}{\sqrt{5}} = \frac{z+1}{-1} \end{cases}$$

D.
$$\begin{cases} \frac{x+2}{2} = \frac{y}{-\sqrt{5}} = \frac{z-1}{-1} \\ \frac{x-2}{2} = \frac{y}{\sqrt{5}} = \frac{z+1}{-1} \end{cases}$$

Lời giải

Chọn A

Cách 1: Điểm $M(0; m; 0) \in Oy$, $j(0; 1; 0)$ là vector chỉ phương của trục Oy , $\vec{AM}(2; -m; -1)$

$$|\cos(\vec{AM}, j)| = \cos 45^\circ \Leftrightarrow \frac{|m|}{\sqrt{m^2 + 5}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{5}$$

nên có 2 đường thẳng:

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y}{\sqrt{5}} = \frac{z-1}{-1}; \frac{x+2}{2} = \frac{y}{-\sqrt{5}} = \frac{z-1}{-1}$$

Cách 2: $u_1(2; \sqrt{5}; -1) \Rightarrow |\cos(u_1, j)| = \frac{1}{\sqrt{2}}; u_2(2; -\sqrt{5}; -1) \Rightarrow |\cos(u_2, j)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Đường thẳng d đi qua điểm $A(-2; 0; 1)$ nên chọn đáp án A.

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 4x = 7y + z + 25 = 0$ và đường thẳng $d_1: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}$. Gọi d_1' là hình chiếu vuông góc của d_1 lên mặt phẳng (P) . Đường thẳng d_2 nằm trên

(P) tạo với d_1, d_1' các góc bằng nhau, d_2 có vector chỉ phương $u_2(a; b; c)$. Tính $\frac{a+2b}{c}$.

A. $\frac{a+2b}{c} = \frac{2}{3}$

B. $\frac{a+2b}{c} = 0$

C. $\frac{a+2b}{c} = \frac{1}{3}$

D. $\frac{a+2b}{c} = 1$

Lời giải

Cách 1:

Gọi $(Q) = (d_1, d_1')$ khi đó (Q) có vector pháp tuyến $\vec{n}_Q = \begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{n}_P, \vec{u}_1 \end{bmatrix} = (5; 5; 15)$.

Đường thẳng d_1' có vector chỉ phương $\vec{u}_1' = \begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{n}_P, \vec{u}_1 \end{bmatrix} = (22; 11; -11)$ hay một vectơ chỉ phương khác $\vec{u} = (2; 1; -1)$.

$$\forall \vec{n}_P, \vec{u}_2 = 0 \Rightarrow 4a - 7b + c = 0 \Rightarrow c = 7b - 4a \Rightarrow \vec{u}_2 = (a; b; 7b - 4a)$$

$$\text{Ta lại có } (d_1; d_2) = (d_1'; d_2) \Leftrightarrow \left| \cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \right| = \left| \cos(\vec{u}_1', \vec{u}_2) \right|$$

$$\Leftrightarrow |a + 2b + 4a - 7b| = |2a + b + 4a - 7b| \Leftrightarrow |5a - 5b| = |6a - 6b| \Leftrightarrow |a - b| = 0 \Leftrightarrow a = b$$

$$a = 1 \Rightarrow b = 1, c = 3 \Rightarrow \frac{a + 2b}{c} = 1$$

Chọn

Cách 2:

Gọi $(Q) = (d_1, d_1')$ khi đó $(P) \perp (Q)$. Các đường thẳng nằm trong (P) mà vuông góc với (Q) thì vuông góc với tất cả các đường thẳng trong (Q) hay chúng cùng tạo với d_1, d_1' các góc 90° . Do đó, các đường

thẳng này thỏa mãn yêu cầu đề bài. Chúng có vector chỉ phương $\vec{u} = \vec{n}_Q(1; 1; 3) \Rightarrow \frac{a + 2b}{c} = 1$.

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{-1}$,

$d_2: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = -t \end{cases}$. Mặt phẳng (P) qua d_1 tạo với d_2 một góc 45° và nhận vector $\vec{n} = (1; b; c)$ làm một vector pháp tuyến. Xác định tích bc .

- A. -4 hoặc 0. B. 4 hoặc 0. C. -4. D. 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có vector chỉ phương của d_1, d_2 lần lượt là $\vec{u}_1 = (2; -2; -1)$ và $\vec{u}_2 = (1; 0; -1)$.

Mặt phẳng (P) qua $d_1 \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{u}_1 = 0 \Leftrightarrow 2 - 2b - c = 0. \quad (1)$

$$\sin(d_2, (P)) = \frac{|\vec{u}_2 \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}_2| \cdot |\vec{n}|} = \sin 45^\circ \Leftrightarrow \frac{|1 - c|}{\sqrt{b^2 + c^2 + 1} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow |1 - c| = \sqrt{b^2 + c^2 + 1} \Leftrightarrow b^2 + 2c = 0. \quad (2)$$

Từ (1)

$$\text{và } (2) \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ c = -2 \end{cases} \Rightarrow bc = -4.$$

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{-1}$ và $d_2: \begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=-t \end{cases}$. Mặt phẳng (P) qua d_1 , tạo với d_2 một góc 45° và nhận vector $n(1;b;c)$ làm một vec tơ pháp tuyến. Xác định tích $b.c$.

A. - 4.

B. 4.

C. 4 hoặc 0.

D. - 4 hoặc 0.

Lời giải.

Chọn A

$\vec{u}_1 = (2; -2; -1)$, $\vec{u}_2 = (1; 0; -1)$ lần lượt là vector chỉ phương của d_1, d_2 .

Theo bài ra ta có

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{u}_1 = 0 \\ \left| \cos(\vec{n}, \vec{u}_2) \right| = \sin(d_2; (P)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2.1 + (-2)b + (-1)c = 0 \\ \frac{|1.1 + 0.b + (-1)c|}{\sqrt{1+b^2+c^2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 - 2b \\ (c-1)^2 = 1 + b^2 + c^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ c = -2 \end{cases}$$

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x=0 \\ y=3-t \\ z=t \end{cases}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và tạo với mặt phẳng (Oxy) một góc 45° . Điểm nào sau đây thuộc mặt phẳng (P) ?

A. $M(3; 2; 1)$.

B. $N(3; 2; -1)$.

C. $P(3; -1; 2)$.

D. $M(3; -1; -2)$.

Lời giải

Chọn A

Ta viết phương trình đường thẳng $d: \begin{cases} x=0 \\ y+z-3=0 \end{cases}$.

Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d nên có dạng: $mx + n(y+z-3) = 0, m^2 + n^2 \neq 0$

$\Leftrightarrow mx + ny + nz - 3n = 0 \Rightarrow (P)$ có một vec tơ pháp tuyến là $\vec{n}_P = (m; n; n)$.

Mặt phẳng (Oxy) có một vec tơ pháp tuyến là $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

$$\cos((P); (Oxy)) = \left| \cos(\vec{n}_P; \vec{k}) \right| \Leftrightarrow \cos 45^\circ = \frac{\left| \vec{n}_P \cdot \vec{k} \right|}{\left| \vec{n}_P \right| \cdot \left| \vec{k} \right|} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{|n|}{\sqrt{m^2 + n^2 + n^2}}$$

Ta có:

$$\Leftrightarrow \sqrt{m^2 + 2n^2} = \sqrt{2}|n| \Leftrightarrow m^2 = 0 \Leftrightarrow m = 0$$

Chọn $n=1 \Rightarrow (P): y+z-3=0$.

Do đó: $M(3; 2; 1) \in (P)$.

Bình luận: Đối với những bài toán viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng cho trước ta nên sử dụng khái niệm chùm mặt phẳng như sau: Mặt phẳng (α) qua giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ và $(Q): a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ có phương trình dạng $m(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + n(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0, m^2 + n^2 \neq 0$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC vuông tại A , $\angle ABC = 30^\circ$, $BC = 3\sqrt{2}$, đường thẳng BC có phương trình $\frac{x-4}{1} = \frac{y-5}{1} = \frac{z+7}{-4}$, đường thẳng AB nằm trong mặt phẳng $(\alpha): x + z - 3 = 0$. Biết đỉnh C có cao độ âm. Tính hoành độ đỉnh A .

A. $\frac{3}{2}$.

B. 3.

C. $\frac{9}{2}$.

D. $\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Vì $C \in BC$ nên $C(4+t; 5+t; -7-4t)$.

BC có véc tơ chỉ phương $u = (1; 1; -4)$. Mặt phẳng (α) có véc tơ pháp tuyến $n = (1; 0; 1)$.

Gọi φ là góc giữa BC và (α) . Ta có $\sin \varphi = \left| \cos(\vec{u}; \vec{n}) \right| = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 30^\circ$. Tức là A là hình chiếu của C lên (α) .

Vậy $\frac{3\sqrt{2}}{2} = CA = d(C; (\alpha)) = \frac{|4+t-7-4t-3|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C(3; 4; -3) \\ C(1; 2; 5) \end{cases}$

Mà C có cao độ âm, suy ra $C(1; 2; 5)$.

Lúc này AC qua $C(1; 2; 5)$ và có véc tơ chỉ phương $n = (1; 0; 1)$. Nên $A(3+t; 4; -3+t)$.

Mặt khác A nằm trong mặt phẳng $(\alpha): x + z - 3 = 0 \Rightarrow t = \frac{3}{2} \Rightarrow x_A = \frac{9}{2}$.

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng nào dưới đây đi qua $A(2; 1; -1)$ tạo với trục Oz một góc 30° ?

A. $\sqrt{2}(x-2) + (y-1) - (z-2) - 3 = 0$.

B. $(x-2) + \sqrt{2}(y-1) - (z+1) - 2 = 0$.

C. $2(x-2) + (y-1) - (z-2) = 0$.

D. $2(x-2) + (y-1) - (z-1) - 2 = 0$.

Lời giải

Chọn A

Gọi phương trình mặt phẳng (α) cần lập có dạng $A(x-2) + B(y-1) + C(z+1) = 0; n(A; B; C)$

Oz có vector chỉ phương là $k(0; 0; 1)$.

$$\sin((\alpha), Oz) = \frac{|nk|}{|n||k|} = \sin 30^\circ$$

Áp dụng công thức

Sau khi tìm được các vector pháp tuyến thỏa mãn, thay giá trị của A vào để viết phương trình mặt phẳng.

Câu 8. Cho mặt phẳng $(\alpha): 3x - 2y + 2z - 5 = 0$. Điểm $A(1; -2; 2)$. Có bao nhiêu mặt phẳng đi qua A và tạo với mặt phẳng (α) một góc 45° .

A. Vô số.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

[Phương pháp tự luận]

Gọi $\vec{n}_\beta(a; b; c)$ là vector pháp tuyến của mặt phẳng (β) cần lập.

$$\cos((\alpha), (\beta)) = \left| \cos(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta) \right| = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{n}_\beta|} = \frac{|3a - 2b + 2c|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow 2(3a - 2b + 2c)^2 = 17(a^2 + b^2 + c^2)$$

Phương trình trên có vô số nghiệm.

Suy ra có vô số vector $\vec{n}_\beta(a; b; c)$ là véc tơ pháp tuyến của (β) . Suy ra có vô số mặt phẳng (β) thỏa mãn điều kiện bài toán

[Phương pháp trắc nghiệm]

Dùng hình.

Giả sử tồn tại mặt phẳng (β) thỏa mãn điều kiện bài toán. (Đi qua A và tạo với mặt phẳng (α) một góc 45°). Gọi Δ là đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (α) . Sử dụng phép quay theo trục Δ với mặt phẳng (β) . Ta được vô số mặt phẳng (β') thỏa mãn điều kiện bài toán.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 9. Tìm tất cả các mặt phẳng (α) chứa đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-3}$ và tạo với mặt phẳng $(P): 2x - z + 1 = 0$ góc 45° .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $(\alpha): 3x + z = 0$ hay $(\alpha): 8x + 5y + z = 0$.

d đi qua điểm $O(0; 0; 0)$ có vtcp $u = (1; -1; -3)$.

(α) qua O có vtcp $n = (a; b; c)$ có dạng $ax + by + cz = 0$, do $n \cdot u = 0 \Rightarrow a - b - 3c = 0$.

$$(P): 2x - z + 1 = 0 \text{ vptpt } k = (2; 0; -1)$$

$$\cos 45^\circ = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{k}|}{|\vec{n}| |\vec{k}|} = \frac{|2a - c|}{\sqrt{5(a^2 + b^2 + c^2)}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 10(a^2 + b^2 + c^2) = (4a - 2c)^2$$

Ta có

$$\Leftrightarrow 10(b^2 + 6bc + 9c^2 + b^2 + c^2) = (4b + 12c - 2c)^2 \Leftrightarrow 10(2b^2 + 6bc + 10c^2) = (4b + 10c)^2$$

$$\Leftrightarrow 4b^2 - 20bc = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = 5c \end{cases}$$

$$+ b = 0 \Rightarrow a = 3c \Rightarrow (\alpha): x + 3z = 0$$

$$+ b = 5c, \text{ chọn } c = 1 \Rightarrow b = 5, a = 8 \Rightarrow (\alpha): 8x + 5y + z = 0$$

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{-1}$ và

$d_2: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = -t \end{cases}$. Mặt phẳng (P) qua d_1 tạo với d_2 một góc 45° và nhận vectơ $n(1; b; c)$ làm một vectơ pháp tuyến. Xác định tích bc .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $bc = -4$

Đường thẳng d_1 và d_2 có vectơ chỉ phương lần lượt là $u_1 = (2; -2; -1)$ và $u_2 = (1; 0; -1)$.

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là $n = (1; b; c)$.

$$\text{Từ giả thiết ta có: } \begin{cases} u_1 \perp n \\ \vec{u_2} \cdot n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 \cdot n = 0 \\ \left| \frac{\vec{u_2} \cdot n}{|u_2| \cdot |n|} \right| = \sin 45^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \cdot 1 + 0 \cdot b + (-1) \cdot c = 0 \\ \left| \frac{1 \cdot 1 + 0 \cdot b + (-1) \cdot c}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + b^2 + c^2}} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 2b - c = 0 \\ |1 - c| = \sqrt{1 + b^2 + c^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b + c = 2 \\ (1 - c)^2 = 1 + b^2 + c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b + c = 2 \\ b^2 + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ c = -2 \end{cases}$$

Vậy $b, c = -4$.

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3; -1; 0)$ và đường thẳng

$d: \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}$. Lập phương trình mặt phẳng (α) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (α) lớn nhất.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $x + y - z = 0$

Gọi H là hình chiếu của A đến d . Khi đó $H(2-t; -1+2t; 1+t) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = (-1-t; 2t; 1+t)$.

Do $AH \perp d \Rightarrow -(-1-t) + 2 \cdot 2t + 1+t = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{3}$. Khi đó $\overrightarrow{AH} = \left(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Mặt phẳng (α) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (α) lớn nhất khi $AH \perp (\alpha)$.

Do đó (α) có vectơ pháp tuyến là $n = (1; 1; -1)$.

Vậy $(\alpha): 1(x-2) + 1(y+1) - 1(z-1) = 0 \Leftrightarrow x + y - z = 0$.

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 1 = 0$, $(Q): x + my + (m-1)z + 2024 = 0$. Khi hai mặt phẳng (P) , (Q) tạo với nhau một góc nhỏ nhất thì giá trị của bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $m = \frac{1}{2}$

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) .

$$\cos \varphi = \frac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot m - 2 \cdot (m-1)|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{1^2 + m^2 + (m-1)^2}} = \frac{1}{3\sqrt{2m^2 - 2m + 2}} = \frac{1}{3\sqrt{2\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}}} \leq \frac{1}{3\sqrt{\frac{3}{2}}}$$

Khi đó:

Góc φ nhỏ nhất $\Leftrightarrow \cos \varphi$ lớn nhất $\Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$.

Câu 13. Cho hai điểm $A(1; -1; 1); B(2; -2; 4)$. Có bao nhiêu mặt phẳng chứa A, B và tạo với mặt phẳng $(\alpha): x - 2y + z - 7 = 0$ một góc 60° .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: có 2 mặt phẳng.

$\overrightarrow{AB}(1; -1; 3), \overrightarrow{n_\alpha}(1; -2; 1)$

Gọi $\overrightarrow{n_\beta}(a; b; c)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (β) cần lập.

$$\begin{aligned} \cos((\alpha), (\beta)) &= \left| \cos(\overrightarrow{n_\alpha}, \overrightarrow{n_\beta}) \right| = \frac{|\overrightarrow{n_\alpha} \cdot \overrightarrow{n_\beta}|}{|\overrightarrow{n_\alpha}| \cdot |\overrightarrow{n_\beta}|} \\ &= \frac{|1 \cdot a - 2 \cdot b + 1 \cdot c|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2(a - 2b + c)^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2) \quad (1)$$

Mặt khác vì mặt phẳng (β) chứa A, B nên:

$$\vec{n}_{\beta} \cdot \vec{AB} = 0 \Leftrightarrow a - b + 3c = 0 \Leftrightarrow a = b - 3c$$

Thế vào (1) ta được: $2b^2 - 13bc + 11c^2 = 0$ (2)

Phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt. Suy ra có 2 vector $\vec{n}_{\beta}(a, b, c)$ thỏa mãn.

Suy ra có 2 mặt phẳng.

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;0;1), B(6;-2;1)$. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, B và tạo với mặt phẳng (Oyz) một góc α thỏa mãn $\cos \alpha = \frac{2}{7}$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $2x + 3y - 6z = 0$ hoặc $2x + 3y + 6z - 12 = 0$

Giả sử (P) có VTPT $\vec{n}_1 = (a; b; c)$

(P) có VTCP $\vec{AB} = (3; -2; 0)$ suy ra $\vec{n}_1 \perp \vec{AB} \Rightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{AB} = 0$

$$\Rightarrow 3a + b(-2) + 0 \cdot c = 0 \Rightarrow 3a - 2b = 0 \Rightarrow a = \frac{2}{3}b \quad (1)$$

(Oyz) có phương trình $x = 0$ nên có VTPT $\vec{n}_2 = (1; 0; 0)$

$$\text{Mà } \cos \alpha = \frac{2}{7} \Leftrightarrow \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{2}{7} \Leftrightarrow \frac{|a \cdot 1 + b \cdot 0 + c \cdot 0|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2}} = \frac{2}{7}$$

$$\frac{|a|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{2}{7} \Leftrightarrow 7|a| = 2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \Leftrightarrow 49a^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\Leftrightarrow 45a^2 - 4b^2 - 4c^2 = 0 \quad (2)$$

Thay (1) vào (2) ta được $4b^2 - c^2 = 0$

$$4b^2 - c^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ a = -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{n} = \left(\frac{2}{3}; 1; 2\right) \\ \vec{n} = \left(-\frac{2}{3}; -1; 2\right) \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} \vec{n} = (2; 3; 6) \\ \vec{n} = (2; 3; -6) \end{cases}$$

Chọn $c = 2$ ta có

Vậy $(P): 2x + 3y - 6z = 0$ hoặc $2x + 3y + 6z - 12 = 0$

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, biết mặt phẳng $(P): ax + by + cz + d = 0$ với $c < 0$ đi qua hai điểm $A(0;1;0), B(1;0;0)$ và tạo với mặt phẳng (yOz) một góc 60° . Tính giá trị $a + b + c$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $a + b + c = 2 - \sqrt{2}$

Ta có: $A, B \in (P)$ nên $\begin{cases} b + d = 0 \\ a + d = 0 \end{cases}$. Suy ra (P) có dạng $ax + ay + cz - a = 0$ có vector pháp tuyến là $n = (a; a; c)$.

Mặt phẳng (yOz) có vector pháp tuyến là $i = (1; 0; 0)$.

Ta có: $\cos 60^\circ = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{i}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{i}|} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{|a|}{\sqrt{2a^2 + c^2} \cdot 1} \Leftrightarrow 2a^2 + c^2 = 4a^2 \Leftrightarrow 2a^2 - c^2 = 0$.

Chọn $a = 1$, ta có: $c^2 = 2 \Rightarrow c = -\sqrt{2}$ do $c < 0$.

Ta có: $a + b + c = a + a + c = 1 + 1 - \sqrt{2} = 2 - \sqrt{2}$.

DẠNG 2

KHOẢNG CÁCH

1. Khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng

▮ Khoảng cách từ điểm M đến một đường thẳng d qua điểm M_0 có vectơ chỉ phương u_d

$$d(M, d) = \frac{\left| \overrightarrow{M_0 M}, u_d \right|}{|u_d|}.$$

được xác định bởi công thức

▮ Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song là khoảng cách từ một điểm thuộc đường thẳng này đến đường thẳng kia.

2. Khoảng cách giữa hai đường thẳng

▮ Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song là khoảng cách từ một điểm thuộc đường thẳng này đến đường thẳng kia.

▮ Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau: d đi qua điểm M và có vectơ chỉ phương

$$d(d, d') = \frac{\left| \overrightarrow{u, u'}, M_0 M \right|}{\left| \overrightarrow{u, u'} \right|}.$$

u và d' đi qua điểm M' và có vectơ chỉ phương u' là

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách từ điểm $M(2; -4; -1)$ tới đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ bằng

A. $\sqrt{14}$. B. $\sqrt{6}$. C. $2\sqrt{14}$. D. $2\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng Δ đi qua $N(0; 2; 3)$, có vectơ chỉ phương $u = (1; -1; 2)$

$$\overrightarrow{MN} = (-2; 6; 4); \quad \left[\overrightarrow{MN}, u \right] = (16; 8; -4)$$

$$d(M, \Delta) = \frac{\left| \left[\overrightarrow{MN}, u \right] \right|}{|u|} = \frac{\sqrt{336}}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{14}.$$

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $(d): \frac{x-3}{-2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{1}$ và điểm $A(2; -1; 0)$. Khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng (d) bằng

- A. $\sqrt{7}$. B. $\frac{\sqrt{7}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{21}}{3}$. D. $\frac{\sqrt{7}}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $M(3; 0; 1) \in d$.

$$\overrightarrow{AM}(1; 1; 1); \overrightarrow{u_d}(-2; -1; 1) \Rightarrow [\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{u_d}] = (2; -3; 1) \Rightarrow \left| [\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{u_d}] \right| = \sqrt{14}$$

$$d(A, d) = \frac{\left| [\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{u_d}] \right|}{\left| \overrightarrow{u_d} \right|} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{21}}{3}$$

khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng (d) bằng

Vậy

$$d_1: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 3 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ và mặt phẳng } (P):$$

Câu 18. Khoảng cách từ điểm $H(1; 0; 3)$ đến đường thẳng d_1 và mặt phẳng $(P): z - 3 = 0$ lần lượt là $d(H, d_1)$ và $d(H, (P))$. Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

- A. $d(H, d_1) > d(H, (P))$. B. $d(H, (P)) > d(H, d_1)$.
C. $d(H, d_1) = 6d(H, (P))$. D. $d(H, (P)) = 1$.

Lời giải

Chọn C

Vì H thuộc đường thẳng d_1 và H thuộc mặt phẳng (P) nên khoảng cách từ điểm H đến đường thẳng d_1 bằng 0 và khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (P) bằng 0.

Câu 19. Tính khoảng cách giữa mặt phẳng $(\alpha): 2x - y - 2z - 4 = 0$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 4t \\ z = -t \end{cases}$.

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{4}{3}$. C. 0. D. 2.

Lời giải

Chọn B

Đường thẳng d song song với mặt phẳng (α) .

Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song bằng khoảng cách từ một điểm bất kỳ của đường thẳng đến mặt phẳng.

Ta lấy điểm $H(1; 2; 0)$ thuộc đường thẳng d . Khi đó:

$$d(d, (\alpha)) = d(H, (\alpha)) = \frac{|2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 - 2 \cdot 0 - 4|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{4}{3}.$$

Câu 20. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - 2y - z + 1 = 0$ và đường thẳng

$$\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{2}. \text{ Tính khoảng cách } d \text{ giữa } \Delta \text{ và } (P).$$

- A. $d = 2$ B. $d = \frac{5}{3}$ C. $d = \frac{2}{3}$ D. $d = \frac{1}{3}$

Lời giải

Chọn A

(P) có vectơ pháp tuyến $n(2; -2; -1)$ và đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $u(2; 1; 2)$ thỏa mãn $n \cdot u = 0$ nên $\Delta // (P)$ hoặc $\Delta \subset (P)$.

Do đó: lấy $A(1; -2; 1) \in \Delta$ ta có: $d(\Delta(P)) = d(A; (P)) = \frac{|2 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) - 1 + 1|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = 2$.

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách giữa đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-2}$ và mặt phẳng $(P): x + y + z + 2 = 0$ bằng:

- A. $2\sqrt{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. D. $\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D.

Đường thẳng d qua $M(1; 0; 0)$ và có vec-tơ chỉ phương $a = (1; 1; -2)$.

Mặt phẳng (P) có vec-tơ pháp tuyến $n = (1; 1; 1)$.

Ta có:
$$\begin{cases} a \cdot n = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow d // (P). \\ M \notin (P) \end{cases}$$

$$d(d, (P)) = d(M, (P)) = \frac{|1 + 0 + 0 + 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \sqrt{3}.$$

Câu 22. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, khoảng cách giữa đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z + 4 = 0$

- A. 1. B. 0. C. 3. D. 2.

Lời giải

Chọn A

Vì đường thẳng d song song với mặt phẳng (P) nên : Chọn $M(1; 3; 2) \in d$

$$d(d;(P))=d(M;(P))=\frac{|1-6+4+4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=1$$

- Câu 23.** Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(3;-2;4)$ và đường thẳng $d: \frac{x-5}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-2}{-2}$. Điểm M thuộc đường thẳng d sao cho M cách A một khoảng bằng $\sqrt{17}$. Tọa độ điểm M là
- A. $(5;1;2)$ và $(6;9;2)$. B. $(5;1;2)$ và $(-1;-8;-4)$.
 C. $(5;-1;2)$ và $(1;-5;6)$. D. $(5;1;2)$ và $(1;-5;6)$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1: $M(5+2t;1+3t;2-2t) \in d$; $\overrightarrow{AM} (2+2m;3+3m;-2-2m)$

$$\Rightarrow AM = \sqrt{17} \Leftrightarrow 17(1+m)^2 = 17 \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(5;1;2) \\ M(1;-5;6) \end{cases}$$

Cách 2: Kiểm tra các điểm thuộc đường thẳng d có 2 cặp điểm trong đáp án B và C thuộc đường thẳng d . Dùng công thức tính độ dài AM suy ra đáp án C thỏa mãn.

$$d_1: \frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{3}; d_2: \begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=m \end{cases}$$

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng

Gọi S là tập tất cả các số m sao cho d_1 và d_2 chéo nhau và khoảng cách giữa chúng bằng $\frac{5}{\sqrt{19}}$. Tính tổng các phần tử của S .

- A. - 11. B. 12. C. - 12. D. 11.

Lời giải

Chọn C

d_1 đi qua điểm $M(1;0;0)$, có vector chỉ phương $u_1=(2;1;3)$.

d_2 đi qua điểm $N(1;2;m)$, có vector chỉ phương $u_2=(1;1;0)$.

$$[u_1, u_2] = (-3; 3; 1); \overrightarrow{MN} = (0; 2; m)$$

d_1 và d_2 chéo nhau khi và chỉ khi $[u_1, u_2] \cdot \overrightarrow{MN} \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -6$.

$$d(d_1, d_2) = \frac{5}{\sqrt{19}} \Leftrightarrow \frac{|[u_1, u_2] \cdot \overrightarrow{MN}|}{|[u_1, u_2]|} = \frac{5}{\sqrt{19}} \Leftrightarrow \frac{|m+6|}{\sqrt{19}} = \frac{5}{\sqrt{19}} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -11 \end{cases}$$

Mặt khác

Khi đó tổng các phần tử của m là - 12.

Câu 25. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $d_1: \frac{x}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{1}$ và $d_2: \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{1}$

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

B. $\frac{12}{5}$.

C. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

D. 3.

Lời giải

Chọn C.

d_1 qua $M(0; 3; 2)$ có vtcp $u = (1; 2; 1)$, d_2 qua $N(3; -1; 2)$ có vtcp $v = (1; -2; 1)$.

$[u, v] = (4; 0; -4)$, $\overrightarrow{MN} = (3; -4; 0)$.

$d(d_1, d_2) = \frac{|\overrightarrow{[u, v]} \cdot \overrightarrow{MN}|}{|\overrightarrow{[u, v]}|} = \frac{12}{4\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 26. Cho $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$, $d': \frac{x}{3} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-1}{1}$. Khi đó khoảng cách giữa d và d' là

A. $\frac{13\sqrt{30}}{30}$.

B. $\frac{\sqrt{30}}{3}$.

C. $\frac{9\sqrt{30}}{10}$.

D. 0.

Lời giải

Chọn C

Ta có $A(1; -3; 2) \in d$, $B(0; 3; 1) \in d'$ và $u(1; -1; 2), u'(3; -1; 1)$ lần lượt là vector chỉ phương của d, d'

$d(d, d') = \frac{|\overrightarrow{[u, u']} \cdot \overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{[u, u']}|} = \frac{27}{\sqrt{30}} = \frac{9\sqrt{30}}{10}$

Ta có

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{1}$ và $d_2: \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -1 - 2t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng đã cho bằng?

A. $\frac{\sqrt{87}}{6}$.

B. $\frac{\sqrt{174}}{6}$.

C. $\frac{\sqrt{174}}{3}$.

D. $\frac{\sqrt{87}}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: Đường thẳng d_1 đi qua điểm $M(1; -2; 0)$ và nhận $u_1 = (2; -1; 1)$ làm VTCP.

Đường thẳng d_2 đi qua điểm $N(1; -1; 2)$ và nhận $u_2 = (4; -2; 2)$ làm VTCP.

Dễ thấy: $\vec{u}_2 = 2\vec{u}_1$ nên đường thẳng d_1 song song hoặc trùng với đường thẳng d_2 .

Lại có điểm $M(1; -2; 0) \in d_1$ nhưng $M(1; -2; 0) \notin d_2$ nên suy ra $d_1 \parallel d_2$.

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng đã cho bằng khoảng cách từ điểm $M(1; -2; 0)$ đến đường thẳng d_2 .

$$d(M; d_2) = \frac{|\overrightarrow{MN} \wedge \vec{u}_2|}{|\vec{u}_2|}$$

Ta có $\overrightarrow{MN} = (0; 1; 2)$, $\overrightarrow{MN} \wedge \vec{u}_2 = (6; 8; -4)$.

Câu 28. Tính khoảng cách từ giao điểm của hai đường thẳng $d_1; d_2$ tới mặt phẳng (P) trong đó:

$$d_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{3}; d_2: \frac{-x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}; (P): 2x+4y-4z-3=0$$

A. $\frac{4}{3}$.

B. $\frac{7}{6}$.

C. $\frac{13}{6}$.

D. $\frac{5}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình tham số của hai đường thẳng d_1, d_2 như sau:

$$d_1: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3t \\ z = 1 + 3t \end{cases}, d_2: \begin{cases} x = 1 - 2t' \\ y = t' \\ z = 1 + t' \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 + 2t = 1 - 2t' \\ 3t = t' \\ 1 + 3t = 1 + t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t + 2t' = 2 \\ 3t - t' = 0 \\ 3t - t' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{4} \\ t' = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Xét hệ phương trình:

Suy ra giao điểm của d_1, d_2 là $A\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \frac{7}{4}\right)$.

$$d(A; (P)) = \frac{\left| 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right) - 4 \cdot \left(\frac{7}{4}\right) - 3 \right|}{\sqrt{2^2 + 4^2 + (-4)^2}} = \frac{4}{3}$$

Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (P) là:

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 3 = 0$ và đường thẳng

$(\Delta): \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-1}$. Khoảng cách giữa (Δ) và (P) là

A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{8}{3}$

C. $\frac{2}{9}$

D. 1

Lời giải

Chọn A

Mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 3 = 0$ có véc tơ pháp tuyến là $n = (2; -1; 2)$.

Đường thẳng $(\Delta): \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-1}$ có véc tơ chỉ phương là $u = (2; 2; -1)$ và đi qua điểm $M = (1; -1; 1)$.

Ta có $\begin{cases} n \cdot u = 0 \\ M \notin (P) \end{cases}$ suy ra (Δ) song song với (P) .

Khi đó $d((\Delta), (P)) = d(M, (P)) = \frac{|2+1+2-3|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}} = \frac{2}{3}$.

$$\Rightarrow d(M; d_2) = \frac{\sqrt{6^2+8^2+(-4)^2}}{\sqrt{4^2+(-2)^2+2^2}} = \frac{\sqrt{174}}{6} \Rightarrow d(d_1; d_2) = \frac{\sqrt{174}}{6}.$$

Câu 30. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{-1}$, mặt phẳng $(P): x+y+z+2=0$. Gọi M là giao điểm của d và (P) . Gọi Δ là đường thẳng nằm trong (P) vuông góc với d và cách M một khoảng $\sqrt{42}$. Phương trình đường thẳng Δ là

A. $\frac{x-5}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z+4}{1}$.

B. $\frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+1}{1}$.

C. $\frac{x-3}{2} = \frac{y+4}{-3} = \frac{z+5}{1}$.

D. Đáp án khác.

Lời giải

Chọn D

Gọi $M = d \cap (P)$. Suy ra $M \in d \Rightarrow M(3+2t; -2+t; -1-t); M \in (P) \Rightarrow t = -1 \Rightarrow M(1; -3; 0)$.

(P) có véc tơ pháp tuyến là $n_P = (1; 1; 1)$. d có véc tơ chỉ phương $a_d = (2; 1; -1)$. Δ có véc tơ chỉ phương $a_\Delta = [a_d, n_P] = (2; -3; 1)$. Gọi $N(x; y; z)$ là hình chiếu vuông góc của M trên Δ , khi đó $MN = (x-1; y+3; z)$.

Ta có $\begin{cases} MN \perp a_\Delta \\ N \in (P) \\ MN = \sqrt{42} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y+z-11=0 \\ x+y+z+2=0 \\ (x-1)^2+(y+3)^2+z^2=42 \end{cases}$.

Giải hệ ta tìm được $N(5; -2; -5)$ và $N(-3; -4; 5)$.

Với $N(5; -2; -5)$, ta có $\Delta: \frac{x-5}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z+5}{1}$.

Với $N(-3; -4; 5)$, ta có $\Delta: \frac{x+3}{2} = \frac{y+4}{-3} = \frac{z-5}{1}$.

Câu 31. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 4 điểm $A(2; 0; 0), B(0; 3; 0), C(0; 0; 6)$ và $D(1; 1; 1)$. Gọi Δ là đường thẳng qua D và thỏa mãn tổng khoảng cách từ các điểm A, B, C đến Δ là lớn nhất. Khi đó Δ đi qua điểm nào dưới đây?

- A. $(4; 3; 7)$. B. $(-1; -2; 1)$. C. $(7; 5; 3)$. D. $(3; 4; 3)$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình mặt phẳng $(ABC): \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6} = 1 \Leftrightarrow 3x + 2y + z - 6 = 0$, dễ thấy $D \in (ABC)$.

Ta thấy $P = d(A, \Delta) + d(B, \Delta) + d(C, \Delta) \leq AD + BD + CD$.

Vậy P lớn nhất khi và chỉ khi các hình chiếu vuông góc của các điểm A, B, C trên Δ trùng D hay $\Delta \perp (ABC)$ tại D .

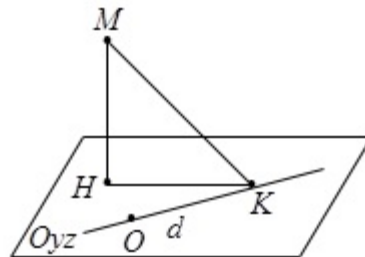
Phương trình đường thẳng Δ là $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$, ta thấy Δ đi qua điểm có tọa độ $(7; 5; 3)$.

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, gọi d là đường thẳng đi qua O , thuộc mặt phẳng (Oyz) và cách điểm $M(1; -2; 1)$ một khoảng nhỏ nhất. Côsin của góc giữa d và trục tung bằng

- A. $\frac{2}{5}$. B. $\frac{1}{5}$. C. $\frac{1}{\sqrt{5}}$. D. $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của M trên mặt phẳng (Oyz) và trên đường thẳng d .

Ta có: $d(M, d) = MK \geq MH = 1$ $H(0; -2; 1)$

Suy ra $d(M, d)$ nhỏ nhất khi $K \equiv H$. Khi đó d có một vectơ chỉ phương là $\vec{OH} = (0; -2; 1)$.

$$\cos(d, O_y) = \frac{\left| \begin{matrix} \overrightarrow{OH} \cdot \vec{j} \\ |\overrightarrow{OH}| |\vec{j}| \end{matrix} \right|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;1)$, mặt phẳng $(P): x - z - 1 = 0$ và đường thẳng

$(d): \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 \\ z = -2 + t \end{cases}$. Gọi $d_1; d_2$ là các đường thẳng đi qua A , nằm trong (P) và đều có khoảng cách đến đường thẳng d bằng $\sqrt{6}$. Côsin của góc giữa d_1 và d_2 bằng

A. $\frac{1}{3}$.

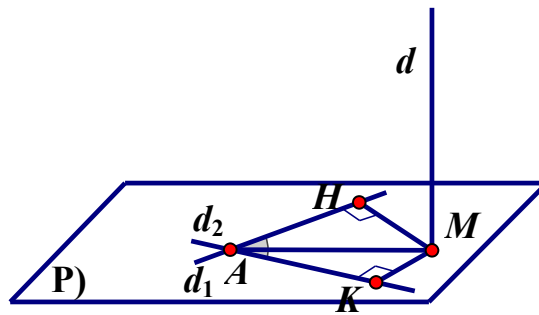
B. $\frac{2}{3}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



* Ta có: $n_P = (1; 0; -1)$, $u_d = (-1; 0; 1) \Rightarrow d \perp (P)$ và $d \cap (P) = M(0; 2; -1)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MA} = (2; -1; 2) \Rightarrow MA = 3$$

* Gọi $H; K$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên d_1 và d_2 , ta có

$$d(d_1; d) = d(M; d_1) = MH, d(d_2; d) = d(M; d_2) = MK \Rightarrow MH = MK = \sqrt{6}$$

$$\Rightarrow \sin \angle MAK = \sin \angle MAH = \frac{HM}{AM} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\Rightarrow \cos(d_1; d_2) = \left| \cos(2 \cdot \angle MAH) \right| = \left| 1 - 2 \sin^2 \angle MAH \right| = \left| 1 - \frac{4}{3} \right| = \frac{1}{3}$$

Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $(d): \frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{2}$, mặt phẳng $(P): x + y - z + 3 = 0$ và điểm $A(1; 2; -1)$. Cho đường thẳng (Δ) đi qua A , cắt (d) và song song với mặt phẳng (P) . Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O đến (Δ)

A. $\sqrt{3}$.

B. $\frac{16}{3}$.

C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $M = (\Delta) \cap (d) \Rightarrow M(t+3; 3t+3; 2t) (t \in \mathbb{R}) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (t+2; 3t+1; 2t+1)$

Gọi $\vec{n}(1; 1; -1)$ là vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

Ta có $(\Delta) // (P) \Rightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow t+2+3t+1-2t-1=0 \Leftrightarrow t=-1$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM}(1; -2; -1) \Rightarrow d(O; \Delta) = \frac{|\overrightarrow{[AM, OA]}|}{|\overrightarrow{AM}|} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$d: \begin{cases} x=t \\ y=-1+2t, t \in \mathbb{R}, \\ z=2-t \end{cases}$$

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng d cắt mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$ tại điểm I . Gọi Δ là đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) sao cho $\Delta \perp d$ và khoảng cách từ điểm I đến đường thẳng Δ bằng $\sqrt{42}$. Tìm tọa độ hình chiếu $M(a; b; c)$ (với $a+b > c$) của điểm I trên đường thẳng Δ .

A. $M(2; 5; -4)$

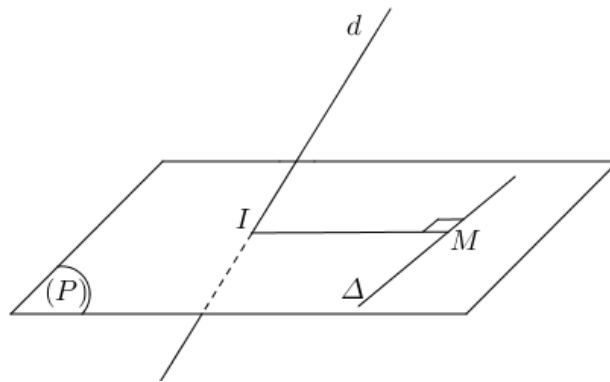
B. $M(6; -3; 0)$

C. $M(5; 2; -4)$

D. $M(-3; 6; 0)$

Lời giải

Chọn A



(P) có vector pháp tuyến $\vec{n} = (1; 1; 1)$ và d có vector chỉ phương $\vec{u} = (1; 2; -1)$. $I = d \cap (P) \Rightarrow I(1; 1; 1)$.

Vì $\Delta \subset (P); \Delta \perp d \Rightarrow \Delta$ có vector chỉ phương $\vec{u}_{\Delta} = [\vec{n}, \vec{u}] = (-3; 2; 1)$.

M là hình chiếu của I trên Δ nên M thuộc mặt phẳng (Q) đi qua I và vuông góc với Δ .

Mặt phẳng (Q) nhận $\vec{u}_{\Delta} = (-3; 2; 1)$ làm vector pháp tuyến nên ta có phương trình của

$$(Q): -3(x-1) + 2(y-1) + 1(z-1) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2y - z = 0$$

Gọi $d_1 = (P) \cap (Q) \Rightarrow d_1$ có vectơ chỉ phương $v = \begin{bmatrix} \vec{u}_\Delta, n \end{bmatrix} = (1; 4; -5)$ và d_1 đi qua I , phương trình của

$$d_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 4t \\ z = 1 - 5t \end{cases}$$

Mặt khác $M \in \Delta \Rightarrow M \in (P) \Rightarrow M \in d_1$

Giả sử $M(1+t; 1+4t; 1-5t) \Rightarrow \vec{IM} = (t; 4t; -5t)$

Ta có: $IM = \sqrt{42} \Leftrightarrow \sqrt{t^2 + 16t^2 + 25t^2} = \sqrt{42} \Leftrightarrow t = \pm 1$

+) Với $t = 1 \Rightarrow M(2; 5; -4)$

+) Với $t = -1 \Rightarrow M(0; -3; 6)$

Vì $M(a; b; c)$ (với $a+b > c$) nên $M(2; 5; -4)$

Cách 2: Vì $M(a; b; c)$ là hình chiếu vuông góc của I lên Δ .

Khi đó ta có

$$\begin{cases} M \in (P) \\ IM \perp u_\Delta \\ IM = \sqrt{42} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c-3=0 \\ -3(a-1)+2(b-1)+(c-1)=0 \\ (a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=42 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c-3=0 \\ -3a+2b+c=0 \\ (a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=42 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a-b=3 \\ a+b+c-3=0 \\ (a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=42 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=4a-3 \\ c=-5a+6 \\ (a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=42 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-3 \\ c=6 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=5 \\ c=-4 \end{cases}$$

Vì $M(a; b; c)$ (với $a+b > c$) nên $M(2; 5; -4)$

Câu 36. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; 3; 1), B(0; 2; 1)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z-7=0$. Đường thẳng d nằm trong (P) sao cho mọi điểm của d cách đều hai điểm A, B có phương trình là:

A. $\begin{cases} x=2t \\ y=7-3t \\ z=t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x=t \\ y=7+3t \\ z=2t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x=t \\ y=7-3t \\ z=2t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x=-t \\ y=7-3t \\ z=4t \end{cases}$

Lời giải

Chọn C

+ Các điểm cách đều hai điểm A, B thì nằm trên mặt phẳng (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn AB .

+ Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow I\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}; 1\right)$

+ Phương trình mặt phẳng (α) là $3x + y - 7 = 0$.

Do đó đường thẳng d là giao tuyến của 2 mặt phẳng (P) và (α)

Phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M(0; 7; 0) \in (P) \cap (\alpha)$ và nhận $u = \begin{bmatrix} \vec{n}_{(\alpha)} \\ \vec{n}_{(P)} \end{bmatrix} = (1; -3; 2)$ làm

một vector chỉ phương là $\begin{cases} x = t \\ y = 7 - 3t \\ z = 2t \end{cases}$.

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho 2 đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{2}$ và $d_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{1}$. Mặt phẳng $(P): x + ay + bz + c = 0 (c > 0)$ song song với d_1, d_2 và khoảng cách từ d_1 đến (P) bằng 2 lần khoảng cách từ d_2 đến (P) . Giá trị của $a + b + c$ bằng

A. 14.

B. 6.

C. -4.

D. -6.

Lời giải

Chọn A

Gọi $u_1 = (1; 1; 2)$, $u_2 = (2; 1; 1)$ lần lượt là một vector chỉ phương của d_1, d_2 .

Gọi $n_1 = [u_1, u_2] = (-1; 3; -1)$, có n_1 cùng phương $n_2 = (1; -3; 1)$.

$n = (1; a; b)$ là một vector chỉ phương của (P) .

Do (P) song song với d_1, d_2 nên chọn $n = (1; -3; 1)$.

Suy ra phương trình mặt phẳng (P) có dạng: $x - 3y + z + c = 0$.

Lấy $M_1(1; -2; 1) \in d_1$, $M_2(1; 1; -2) \in d_2$

Có $d(d_1; (P)) = 2d(d_2; (P)) \Leftrightarrow d(M_1; (P)) = 2d(M_2; (P))$

$$\Leftrightarrow \frac{|1 - 3(-2) + 1 + c|}{\sqrt{11}} = 2 \frac{|1 - 3 - 2 + c|}{\sqrt{11}} \Leftrightarrow |8 + c| = 2|-4 + c| \Leftrightarrow \begin{cases} 8 + c = 2(-4 + c) \\ 8 + c = 2(4 - c) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 16 \text{ (nhã)} \\ c = 0 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Nên $(P): x - 3y + z + 16 = 0$, suy ra $a = -3$, $b = 1$, $c = 16$.

Vậy $a + b + c = 14$.