ĐỀ 57

ĐỀ HỌC SINH GIỎI TOÁN 9 GIA LAI 2023-2024

Câu 1. (5,0 điểm)

a) Rút gọn biểu thức $A=\left(\sqrt{(x+1)^2+x^2}-\sqrt{(x-1)^2+x^2}\right)\sqrt{4x^2+2+2\sqrt{4x^4+1}}$.

b) Cho số $p=n^4-11n^2+49$ với $n\in N$. Hãy tìm các giá trị của n để p là số nguyên tố.

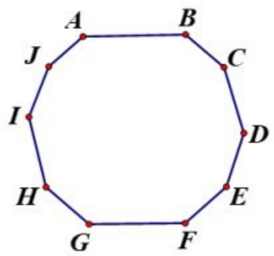
Câu 2. (4,0 điểm)

a) Giải phương trình sau $x^2+5=\dfrac{27x^3+3x}{\sqrt{x^2+4}}$.

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình sau $(2x+5y+1)\left(2^{|x|}+x^2+x+y\right)=105$.

Câu 3. (2,0 điểm)

Cho một đa giác có 10 đỉnh như hình vẽ ở bên (bốn đỉnh: A, B, C, D hoặc B, C, D, E hoặc C, D, E, F hoặc … hoặc J, A, B, C được gọi là bốn đỉnh liên tiếp của đa giác). Các đỉnh của đa giác được đánh số một cách tùy ý bởi các số nguyên thuộc tập hợp $M=\{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$ (biết mỗi đỉnh chỉ được đánh bởi một số, các số được đánh ở các đỉnh là khác nhau). Chứng minh rằng ta luôn tìm được 4 đỉnh liên tiếp của đa giác được đánh số thuộc tập hợp M mà tổng các số đó lớn hơn 21.



Câu 4. (5,0 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Trên cung nhỏ AD lấy điểm E (E không trùng với A và D). Tia EB cắt các đường thẳng AD, AC lần lượt tại I và K . Tia EC cắt các đường thẳng DA, DB lần lượt tại M, N .

a) Chứng minh rằng $\widehat{IAN}=\widehat{NBI}$.

b) Khi điểm M ở vị trí trung điểm của AD. Hãy tính độ dài đoạn AE theo R .

Câu 5. (2,0 điểm)

Gọi M là điểm bất kỳ trong tam giác ABC . Qua M kẻ các đường thẳng DE, GH, IK lần lượt song song với BC, CA, AB $(D, G\in AB; E, I\in CA; K, H\in BC)$.

Chứng minh rằng: $S_{AGMI}+S_{BDMK}+S_{CEMH}\le\dfrac{2}{3}S_{ABC}$ (S là diện tích).

Câu 6. (2,0 điểm)

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn đẳng thức $xy+yz+zx=5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau $P=\dfrac{3x+3y+2z}{\sqrt{6(x^2+5)}+\sqrt{6(y^2+5)}+\sqrt{z^2+5}}$.

---Hết---

Đáp án đề 57

Câu 1. (5,0 điểm)

c) Rút gọn biểu thức $A=\left(\sqrt{(x+1)^2+x^2}-\sqrt{(x-1)^2+x^2}\right)\sqrt{4x^2+2+2\sqrt{4x^4+1}}$.

d) Cho số $p=n^4-11n^2+49$ với $n\in N$. Hãy tìm các giá trị của n để p là số nguyên tố.

Lời giải

a) $A_1=\sqrt{(x+1)^2+x^2}-\sqrt{(x-1)^2+x^2}=\sqrt{2x^2+2x+1}-\sqrt{2x^2-2x+1}$

$$A_2=\sqrt{4x^2+2+2\sqrt{4x^2+1}}=\sqrt{4x^2+2+2\sqrt{4x^4+4x^2+1-4x^2}}$$

¿ $\sqrt{4x^2+2+2\sqrt{(2x^2+1)^2-(2x)^2}}$

$=\sqrt{2x^2+2x+1+2\sqrt{(2x^2+2x+1)(2x^2-2x+1)}+2x^2-2x+1}$

¿ $\sqrt{\left(\sqrt{2x^2+2x+1}+\sqrt{2x^2-2x+1}\right)^2}=\sqrt{2x^2+2x+1}+\sqrt{2x^2-2x+1}$

$$A=A_1.A_2=\left(\sqrt{2x^2+2x+1}-\sqrt{2x^2-2x+1}\right)\left(\sqrt{2x^2+2x+1}+\sqrt{2x^2-2x+1}\right)$$

¿ $2x^2+2x+1-2x^2+2x-1=4x$

b) Ta có: $p=n^4-11n^2+49=\left(n^4+14n^2+49\right)-25n^2=\left(n^2+7\right)^2-(5n)^2$

¿ $\left(n^2-5n+7\right)\left(n^2+5n+7\right)$

Với $n0$ thì $p7^2$ không phải là số nguyên tố. Do đó $n0$ (loại).

Với $n0$; $n\in N$ thì $n^2-5n+7<n^2+5n+7$ và $n^2+5n+7>1$

Để p là số nguyên tố thì

$$n^2-5n+7=1n^2-5n+6=0(n-2)(n-3)=0\left[\begin{array}{l}n=2\\n=3\end{array}\right.$$

Với $n=2\,p=21$ không phải là số nguyên tố. Do đó $n2$ (loại).

Với $n=3\,p=31$ là số nguyên tố.

Vậy $n3$ thì p là số nguyên tố.

Câu 2. (4,0 điểm)

a) Giải phương trình sau $x^2+5=\dfrac{27x^3+3x}{\sqrt{x^2+4}}$.

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình sau $(2x+5y+1)\left(2^{|x|}+x^2+x+y\right)=105$.

Lời giải

a) $x^2+5=\dfrac{27x^3+3x}{\sqrt{x^2+4}}\left(x^2+4+1\right)\sqrt{x^2+4}=27x^3+3x$

$\left(x^2+4\right)\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2+4}=27x^3+3x\,(*)$

Đặt $a=\sqrt{x^2+4}$; $b=3x$ thì phương trình (*) trở thành:

$$a^3+a=b^3+b\,(a-b)\left(a^2+ab+b^2+1\right)=0\,a=b$$

Vì $a^2+ab+b^2+1=\left(a^2+ab+\frac{1}{4}b^2\right)+\frac{3}{4}b^2+1=\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2+1>0$

$$a=b\sqrt{x^2+4}=3x\begin{cases}x>0\\x^2+4=9x^2\end{cases}\begin{cases}x>0\\8x^2=4\end{cases}\begin{cases}x>0\\\left[\begin{array}{l}x=\frac{-\sqrt{2}}{2}\\x=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.\end{cases}x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Vậy nghiệm của phường trình là: $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\left(2x+5y+1\right)\left(2^{|x|}+x^2+x+y\right)=105$

Vì 105 là số lẻ nên $2x+5y+1$ *và* $2^{|x|}+x^2+x+y$ *phải là các số lẻ*

Từ $2x+5y+1$là số lẻ mà $2x+1$ là số lẻ nên $5y$ là số chẵn suy ra y chẵn

$2^{|x|}+x^2+x+y$là số lẻ mà $x^2+x=x(x+1)$ là tích của hai số nguyên liên tiếp nên là số chẵn, y cũng chẵn nên $2^{|x|}$là số lẻ. Điều này xảy ra khi $x\,0$

Thay $x\,0$ vào phương trình đã cho ta được:

$\left(5y+1\right)\left(y+1\right)=105 \Leftrightarrow 5y^2+6y-104=0\,5y^2-20y+26y-104=0$

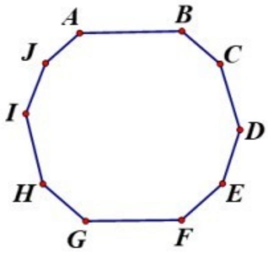
$$5y\left(y-4\right)+26\left(y-4\right)=0\left(5y+26\right)\left(y-4\right)=0$$

$y=\frac{-26}{5}$ (loại) hoặc $y=4$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình có nghiệm nguyên $\left(x;y\right)=\left(0;4\right)$.

Câu 3. (2,0 điểm)

Cho một đa giác có 10 đỉnh như hình vẽ ở bên (bốn đỉnh: A,B,C,D hoặc B,C,D,E hoặc C,D,E,F hoặc … hoặc J,A,B,C được gọi là bốn đỉnh liên tiếp của đa giác). Các đỉnh của đa giác được đánh số một cách tùy ý bởi các số nguyên thuộc tập hợp $M=\left\{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\right\}$ (biết mỗi đỉnh chỉ được đánh bởi một số, các số được đánh ở các đỉnh là khác nhau). Chứng minh rằng ta luôn tìm được 4 đỉnh liên tiếp của đa giác được đánh số thuộc tập hợp M mà tổng các số đó lớn hơn 21.



Lời giải

Gọi $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_{10}$ là các số khác nhau được đánh tùy ý vào 10 đỉnh của đa giác trên, với $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{10} \in M$.
Giả sử ngược lại là không tìm được 4 đỉnh nào thỏa mãn khẳng định của bài toán.
Khi đó ta có:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4 \le 21 \\ x_2+x_3+x_4+x_5 \le 21 \\ x_3+x_4+x_5+x_6 \le 21 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{10}+x_1+x_2+x_3 \le 21 \end{cases}$$

Từ đó suy ra $4\left(x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{10}\right) \le 10.21 = 210$

Mặt khác ta lại có: $x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{10} = 1+2+3+\ldots+10 = \dfrac{10.11}{2} = 55$

Suy ra $4.55<210\,220<210\left(\textit{vô lý}\right)\textit{nên điều giả sử sai}$
Vậy ta luôn tìm được 4 đỉnh liên tiếp được đánh số thuộc tập hợp M mà tổng các số đó lớn hơn 21.

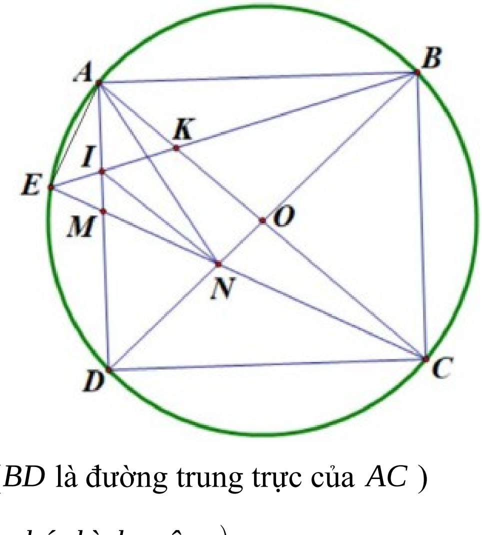
Câu 4. (5,0 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn $\left(O;R\right)$. Trên cung nhỏ AD lấy điểm E (E *không trùng với A và D*). Tia EB cắt các đường thẳng AD, AC lần lượt tại I và K. Tia EC cắt các đường thẳng DA, DB lần lượt tại M, N.

a) Chứng minh rằng $\widehat{IAN} = \widehat{NBI}$.

b) Khi điểm M ở vị trí trung điểm của AD. Hãy tính độ dài đoạn AE theo R.

Lời giải



a) Ta có $\widehat{NAC} = \widehat{NCA}$ (BD là đường trung trực của AC)

$\widehat{DAC} = \widehat{DCA}$ (*tính chất đường chéo hình vuông*)

Suy ra $\widehat{IAN} = \widehat{DAC} - \widehat{NAC} = \widehat{DCA} - \widehat{NCA} = \widehat{DCN}$

mà $\widehat{DCN} = \widehat{NBI}$ (cùng chắn cung DE) suy ra $\widehat{IAN} = \widehat{NBI}$.

b) MDC vuông tại D nên

$MC^2 = CD^2 + MD^2 = CD^2 + \frac{CD^2}{4} = \frac{5CD^2}{4} MC = \frac{\sqrt{5}}{2}CD$

Chứng minh MDC đồng dạng MEA (g-g)

$$=> \frac{CD}{AE} = \frac{CM}{AM} = ¿ AE = \frac{AM.CD}{MC} = \frac{\frac{CD^2}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}CD} = \frac{\sqrt{5}}{5}CD$$

+ OCD vuông cân tại O có $OC = OD = R$ ta tính được $CD = R\sqrt{2}$

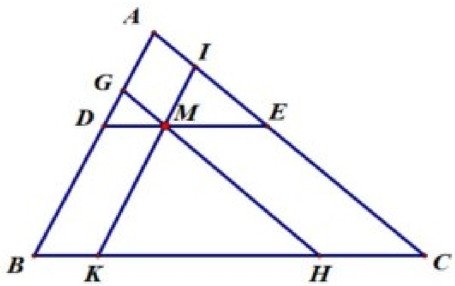
Do đó, $AE = \frac{\sqrt{5}}{5}.R\sqrt{2} = \frac{R\sqrt{10}}{5}$ (đvđd)

Câu 5. (2,0 điểm)

Gọi M là điểm bất kỳ trong tam giác ABC . Qua M kẻ các đường thẳng DE, GH, IK lần lượt song song với $BC, CA, AB\left(D, G \in AB; E, I \in CA; K, H \in BC\right)$.

Chứng minh rằng: $S_{AGMI} + S_{BDMK} + S_{CEMH} \le \frac{2}{3}S_{ABC}$ (S là diện tích).

Lời giải



Ta có các tam giác ABC, GDM, MKH, IME đồng dạng. Gọi S, S_1, S_2, S_3 lần lượt là diện tích của các tam giác ABC, GDM, MKH, IME

Ta có $\frac{\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} = \sqrt{\frac{S_1}{S}} + \sqrt{\frac{S_2}{S}} + \sqrt{\frac{S_3}{S}} = \frac{DM}{BC} + \frac{KH}{BC} + \frac{ME}{BC} = \frac{DM+KH+ME}{BC} = 1$

$\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3} = \sqrt{S}$

Ta có: $\left(\sqrt{S_1}-\sqrt{S_2}\right)^2 + \left(\sqrt{S_2}-\sqrt{S_3}\right)^2 + \left(\sqrt{S_3}-\sqrt{S_1}\right)^2 \ge 0$ khai triển ta được

$3\left(S_1+S_2+S_3\right) \ge \left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}\right)^2 S_1+S_2+S_3 \ge \frac{1}{3}S$

Vậy $S_{AGMI} + S_{BDMK} + S_{CEMH} \le \frac{2}{3}S_{ABC}$

Câu 6. (2,0 điểm)

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn đẳng thức $xy+yz+zx=5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau $P=\frac{3x+3y+2z}{\sqrt{6(x^2+5)}+\sqrt{6(y^2+5)}+\sqrt{z^2+5}}$

Lời giải

Từ giả thiết $xy+yz+zx=5$. Ta có $x^2+5=x^2+xy+yz+xz=(x+y)(z+x)$

$$y^2+5=y^2+xy+yz+xz=(x+y)(y+z)$$

$$z^2+5=z^2+xy+yz+xz=(x+z)(y+z)$$

Áp dụng Bất đẳng thức Côsi ta có:

$$\sqrt{6(x^2+5)}=\sqrt{6(x+y)(z+x)}\le\frac{3(x+y)+2(z+x)}{2}=\frac{5x+3y+2z}{2}$$

Chứng minh tương tự, ta được: $\sqrt{6(y^2+5)}\le\frac{3x+5y+2z}{2}$; $\sqrt{z^2+5}\le\frac{x+y+2z}{2}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức, ta được:

$$\sqrt{6(x^2+5)}+\sqrt{6(y^2+5)}+\sqrt{z^2+5}\le\frac{9x+9y+6z}{2}$$

$$P=\frac{3x+3y+2z}{\sqrt{6(x^2+5)}+\sqrt{6(y^2+5)}+\sqrt{z^2+5}}\ge\frac{2(3x+3y+2z)}{9x+9y+6z}=\frac{2}{3}$$

Vậy $MinP=\frac{2}{3}\, x=y=1, z=2$.

---Hết---