**ĐỀ SỐ 24**

**ĐỀ HSG TOÁN 9 THANH HÓA 2023-2024**

**Câu 1. (4, 0 điểm)**

1. Cho biểu thức với .

Rút gọn biểu thức P và tìm các giá trị của x để biểu thức P có giá trị là số tự nhiên.

2. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn đồng thời .

Tính giá trị biểu thức

**Câu 2. (4,0 điểm)**

1. Giải phương trình .

2. Giải hệ phương trình

**Câu 3. (4,0 điểm)**

1. Tìm tất cả các bộ số nguyên (m, p, q) thỏa mãn: trong đó

là hai số nguyên tố.

2. Cho a, b là hai số nguyên thỏa mãn a khác b và ab(a +b) chia hết cho .

Chứng minh rằng .

**Câu 4 (6,0 điểm).** Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn O bán kính R. Đường tròn tâm I đường kính BC cắt cạnh AB và AC lần lượt ở M và N. Các tia BN và CM cắt nhau tại H. Gọi K là giao điểm của IH và MN. Qua I kẻ đường thẳng song song với MN cắt các đường thẳng CM và BN lần lượt ở E và Q.

1, Chứng minh tam giác ANM đồng dạng với tam giác ABC và .

2. Chứng minh IQ.IE = và .

3. Gọi D là giao điểm của AH và BC. Chứng minh rằng

.

**Câu 5. (2,0 điểm)**

Cho ba số a, b, c thỏa mãn .

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

**ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI**

**Câu 1. (4,0 điểm)**

**1.** Cho biểu thức với

Rút gọn biểu thức P và tìm các giá tgrij x để biểu thức P có giá trị là số tự nhiên.

Điều kiện . Ta có:

Vậy

Ta có nên

Do P

.

Kết hợp với điều kiện ta thấy là giá trị cần tìm.

Vậy để P có giá trị là số tự nhiên thì .

**2.** Cho các số thực a, b, c thỏa mãn đồng thời .

Tính giá trị biểu thức .

Từ giả thiết ta suy ra:

Nhân vế với vế 3 đẳng thức trên với nhau ta được:

Do

Khai triển ta được

.

Vậy B = 2 + 2022 = 2024

**Câu 2. ( 4,0 điểm)**

1.Giải phương trình:

ĐKXĐ: .

Pt đã cho = 0

-Pt (1)

Xét pt (2):

Vì

Suy ra nên pt (2) vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm .

2. Giải hệ phương trình

Nhân hai vế của phương trình (2) với 3, rồi cộng với phương trình (1) vế theo vế ta được pt:

TH1:

TH2:

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm (x,y)

**Câu 3. (4,0 điểm)**

1. Tìm tất cả các số nguyên (m,p,q) thỏa mãn: trong đó

là hai số nguyên tố.

Vì và p nguyên tố nên lẻ

Nếu p = 2 thì

Vì q lẻ lẻ lớn hơn 1 có ước lẻ lớn hơn 1, vô lý.

Do đó p lẻ

Ta viết phương trình đã cho dưới dạng

Do lẻ và lớn hơn 1 nên

hoặc

+ Xét trường hợp . Do (vô lý)

+ Xét trường hợp

. Từ đó suy ra

. Ta được phương trình 4(, mà q nguyên tố, suy ra q = 3, từ đó tìm được p = 11; m = 1. Vậy ta có bộ ba số nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán là: (m,p,q) = (1;11;3).

2. Cho a, b là hai số nguyên thỏa mãn a khác b và ab(a +b) chia hết cho .

Chứng minh rằng .

Đặt d = UCLN(a,b) suy ra a = xd, b = yd với UCLN(x,y) = 1 khi đó:

Ta có UCLN

Tương tự UCLN

Đặt d’ = UCLN(

Do đó

Mặt khác .

Vậy

**Câu 4. (6,0 điểm)**

****

**1.** Chứng minh đồng dạng với và .

Ta có:

Xét và có:

; là góc chung

Vì

Mà (Do BN (2 góc so le trong)

(đpcm)

**2.** Chứng minh IQ.IE = và .

Theo câu a, lại có ( 2 góc đối đỉnh) (g.g)

(1)

Áp dụng ệ quả Ta – Lét ta có: (2)

Từ (1) và (2)

Trên cạnh EM lấy P sao cho IP = IE( P E)

Mà (2 góc so le trong, MN//EQ)

Lại có: (cách lấy điểm P) (4)

Từ (3) và (4) (đpcm)

**3**. Gọi D là giao điểm của AH với BC. Chứng minh rằng

Vì BN ; là trực tâm

AH

Do đó ta có:

Do H là trực tân nhọn nên H nằm trong

(**BĐT ba điểm**)

(5)

Với mọi x, y ta có:

Chứng minh tương tự:

Cộng theo từng vế ba BĐT trên ta được:

Áp dụng BĐT trên với ta suy ra được:

(npcm)

Dấu “=” xảy ra dấu “=” của các bất đẳng thức trên đồng thời xảy ra tam giác ABC đều.

**Câu 5. (2,0 điểm)**

Ta có:

. Với

sử dụng bất đẳng thức: Với x,y,z , ta luôn có

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi x = y = z.

Từ bất đẳng thức đã cho ta có:

Suy ra

Từ giả thiết 16abc +4(ab+bc+ca) = 81 +24(a+b+c)

(\*)

Ta có và

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi a = b = c.

Đặt (Vì a, b, c . Từ (\*) ta có

(Vì 0 < t

Suy ra

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi

Vậy giá trị nhỏ nhất của Q là khi a = b = c =