**ĐỀ SỐ 24**

**ĐỀ HSG TOÁN 9 THANH HÓA 2023-2024**

**Câu 1. (4, 0 điểm)**

1. Cho biểu thức $P=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}.\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}+2}\right)+\frac{9\sqrt{x}+14}{x+3\sqrt{x}+2}$ với $x\geq 0$.

Rút gọn biểu thức P và tìm các giá trị của x để biểu thức P có giá trị là số tự nhiên.

2. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn đồng thời $a^{2}+2=b^{4};b^{2}+2=c^{4}; c^{2}+2=a^{4}$.

Tính giá trị biểu thức $B=a^{2}+b^{2}+c^{2}+a^{2}b^{2}c^{2}-\left(a^{2}b^{2}+b^{2}c^{2}+c^{2}a^{2}\right)+2022$

**Câu 2. (4,0 điểm)**

1. Giải phương trình $4x^{3}+13x^{2}-14x=3-\sqrt{15x+9}$ .

2. Giải hệ phương trình $\left\{\begin{array}{c}x^{3}+3xy^{2}+49=0\\x^{2}-8xy+y^{2}=8y-17x\end{array}\right.$

**Câu 3. (4,0 điểm)**

1. Tìm tất cả các bộ số nguyên (m, p, q) thỏa mãn: $2^{m}.p^{2}+1=q^{5}$ trong đó

$m>0;p,q $là hai số nguyên tố.

2. Cho a, b là hai số nguyên thỏa mãn a khác b và ab(a +b) chia hết cho $a^{2}+ab+b^{2}$.

Chứng minh rằng $\left|a-b\right|>\sqrt[2]{ab}$ .

**Câu 4 (6,0 điểm).** Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn O bán kính R. Đường tròn tâm I đường kính BC cắt cạnh AB và AC lần lượt ở M và N. Các tia BN và CM cắt nhau tại H. Gọi K là giao điểm của IH và MN. Qua I kẻ đường thẳng song song với MN cắt các đường thẳng CM và BN lần lượt ở E và Q.

1, Chứng minh tam giác ANM đồng dạng với tam giác ABC và $\hat{BQI }=\hat{ECI }$.

2. Chứng minh IQ.IE = $IC^{2}$ và $\frac{KN}{KM}=\left(\frac{HN}{HM}\right)^{2}$.

3. Gọi D là giao điểm của AH và BC. Chứng minh rằng

$\frac{1}{AD.BN}+\frac{1}{BN.CM}+\frac{1}{CM.AD}\leq \frac{4}{3(R-OH)^{2}}$ .

**Câu 5. (2,0 điểm)**

Cho ba số a, b, c $\geq 1$ thỏa mãn $16abc+4\left(ab+bc+ca\right)=81+24(a+b+c)$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức$Q=\frac{1}{a(\sqrt{a^{2}-1}+a)}+\frac{1}{b(\sqrt{b^{2}-1}+b)}+\frac{1}{c(\sqrt{c^{2}-1}+c)}$

**ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI**

**Câu 1. (4,0 điểm)**

**1.** Cho biểu thức $P=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}.\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}+2}\right)+\frac{9\sqrt{x}+14}{x+3\sqrt{x}+2}$ với $x\geq 0$

Rút gọn biểu thức P và tìm các giá tgrij x để biểu thức P có giá trị là số tự nhiên.

Điều kiện $x\geq 0$. Ta có:

$$P=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}.\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}+2}\right)+\frac{9\sqrt{x}+14}{x+3\sqrt{x}+2}$$

$$=\frac{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}+\frac{9\sqrt{x}+14}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$=\frac{2x+11\sqrt{x}+14}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{(\sqrt{x}+2)(2\sqrt{x}+7)}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{(2\sqrt{x}+7)}{\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

Vậy $P=\frac{(2\sqrt{x}+7)}{\left(\sqrt{x}+1\right)} với x\geq 0$

Ta có $P=\frac{\left(2\sqrt{x}+1\right)+5}{\left(\sqrt{x}+1\right)}=2+\frac{5}{\sqrt{x}+1} vì x\geq 0$ nên $0<\frac{5}{\sqrt{x}+1}\leq 5 suy ra 2<P\leq 7$

Do P $\in N nên P\in \left\{3;4;5;6;7\right\}⇔\frac{5}{\sqrt{x}+1}\in \left\{1;2;3;4;5\right\}⇔\sqrt{x}+1\in \left\{5;\frac{5}{2};\frac{5}{3};\frac{5}{4};1\right\}$

$⇔\sqrt{x}\in \left\{4;\frac{3}{2};\frac{2}{3};\frac{1}{4};0\right\}⇔x\in \left\{16;\frac{9}{4};\frac{4}{9};\frac{1}{16};0\right\}$.

Kết hợp với điều kiện ta thấy $x\in \left\{16;\frac{9}{4};\frac{4}{9};\frac{1}{16};0\right\}$ là giá trị cần tìm.

Vậy để P có giá trị là số tự nhiên thì $x\in \left\{16;\frac{9}{4};\frac{4}{9};\frac{1}{16};0\right\}$.

**2.** Cho các số thực a, b, c thỏa mãn đồng thời $a^{2}+2=b^{4};b^{2}+2=c^{4}; c^{2}+2=a^{4}$.

Tính giá trị biểu thức $B=a^{2}+b^{2}+c^{2}+a^{2}b^{2}c^{2}-\left(a^{2}b^{2}+b^{2}c^{2}+c^{2}a^{2}\right)+2022$.

Từ giả thiết ta suy ra: $\left\{\begin{array}{c}a^{2}+1=b^{4}-1=(b^{2}-1)(b^{2}+1)\\b^{2}+1=c^{4}-1=(c^{2}-1)(c^{2}+1)\\c^{2}+1=a^{4}-1=(a^{2}-1)(a^{2}+1)\end{array}\right.$

Nhân vế với vế 3 đẳng thức trên với nhau ta được:

$$\left(a^{2}+1\right)\left(b^{2}+1\right)\left(c^{2}+1\right)=(b^{2}-1)(c^{2}-1)(a^{2}-1)(b^{2}+1)(c^{2}+1)(a^{2}+1)$$

Do $\left(a^{2}+1\right)\left(b^{2}+1\right)\left(c^{2}+1\right)>0 nên \left(b^{2}-1\right)\left(c^{2}-1\right)\left(a^{2}-1\right)=1 $

Khai triển ta được

$a^{2}b^{2}c^{2}-a^{2}b^{2}-b^{2}c^{2}-c^{2}a^{2}+a^{2}+b^{2}+c^{2}-1=1 ⇔a^{2}b^{2}c^{2}+a^{2}+b^{2}+c^{2}-\left(a^{2}b^{2}+b^{2}c^{2}+c^{2}a^{2}\right)=2$.

Vậy B = 2 + 2022 = 2024

**Câu 2. ( 4,0 điểm)**

1.Giải phương trình: $4x^{3}+13x^{2}-14x=3-\sqrt{15x+9}$

ĐKXĐ: $x\geq -\frac{3}{5}$ .

Pt đã cho $4x^{3}+13x^{2}-14x-3+\sqrt{15x+9}$ = 0

$$⇔4x^{3}+13x^{2}-12x-\left(2x+3\right)+\sqrt{15x+9}=0$$

$$⇔(4x^{2}-3x)(x+4)-\left[\left(2x+3\right)-\sqrt{15x+9}\right]=0$$

$$⇔(4x^{2}-3x)(x+4)-\frac{\left(2x+3\right)^{2}-\left(15x+9\right)}{\left(2x+3\right)+\sqrt{15x+9}}=0$$

$$⇔(4x^{2}-3x)(x+4-\frac{1}{2x+3+\sqrt{15x+9}}=0$$

$$⇔\left\{\begin{array}{c}(4x^{2}-3x)=0 (1)\\x+4-\frac{1}{2x+3+\sqrt{15x+9}}=0 (2)\end{array}\right.$$

-Pt (1) $⇔\left\{\begin{array}{c}x=0 \\x=\frac{3}{4}\end{array}\right.(đều thỏa mãn ĐKXĐ)$

Xét pt (2): $+4-\frac{1}{2x+3+\sqrt{15x+9}}=0$

Vì $x\geq -\frac{3}{5}⇒x+4\geq \frac{17}{5} và 2x+3+\sqrt{15x+9} \geq \frac{9}{5}⇒\frac{1}{2x+3+\sqrt{15x+9}}\leq \frac{5}{9} $

Suy ra $x+4-\frac{1}{2x+3+\sqrt{15x+9}}\geq \frac{128}{45}>0$ nên pt (2) vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\left\{o;\frac{3}{4}\right\}$.

2. Giải hệ phương trình $\left\{\begin{array}{c}x^{3}+3xy^{2}+49=0\\x^{2}-8xy+y^{2}=8y-17x\end{array}\right.$

Nhân hai vế của phương trình (2) với 3, rồi cộng với phương trình (1) vế theo vế ta được pt: $x^{3}+3xy^{2}+3x^{2}-24xy+3y^{2}+49=24y-51x$

$$⇔x^{3}+3x^{2}+3x+1+3y^{2}\left(x+1\right)-24y\left(x+1\right)+48\left(x+1\right)=0$$

$$⇔\left(x+1\right)\left[\left(x+1\right)^{2}+3y^{2}-24y+48\right]=0$$

$$⇔\left(x+1\right)\left[\left(x+1\right)^{2}+3\left(y-4\right)^{4}+48\right]=0$$

$$⇔\left\{\begin{array}{c}x+1=0\\\left(x+1\right)^{2}+3\left(y-4\right)^{2}=0\end{array}\right.$$

TH1: $\left\{\begin{array}{c}x=-1\\x^{3}+3xy^{2}=-49\end{array}\right.⇔\begin{array}{c}x=-1\\y=4;y=-4\end{array}$

TH2: $\left\{\begin{array}{c}\left(x+1\right)^{2}+3\left(y-4\right)^{2}=0\\x^{3}+3xy^{2}=-49\end{array}\right.⇔\begin{array}{c}x=-1\\y=4\end{array}$

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm (x,y) $\in \left\{\left(-1;4\right),(-1;-4)\right\}$

**Câu 3. (4,0 điểm)**

1. Tìm tất cả các số nguyên (m,p,q) thỏa mãn: $2^{m}.p^{2}+1=q^{5}$ trong đó

$m>0;p,q $là hai số nguyên tố.

Vì $m>0$ và p nguyên tố nên $2^{m}.p^{2}+1$ lẻ $⇒q lẻ$

Nếu p = 2 thì $2^{m+2}+1=q^{5}⇔\left(q-1\right)\left(q^{4}+q^{3}+q^{2}+q+1\right)=2^{m+2}$

Vì q lẻ $⇒q^{4}+q^{3}+q^{2}+q+1 $lẻ lớn hơn 1 $⇒2^{m+2}$ có ước lẻ lớn hơn 1, vô lý.

Do đó p lẻ

Ta viết phương trình đã cho dưới dạng $\left(q-1\right)\left(q^{4}+q^{3}+q^{2}+q+1\right)=2^{m}.p^{2}$

Do $q^{4}+q^{3}+q^{2}+q+1 $lẻ và lớn hơn 1 nên $q^{4}+q^{3}+q^{2}+q+1=p$

hoặc $q^{4}+q^{3}+q^{2}+q+1=p^{2}$

+ Xét trường hợp $q^{4}+q^{3}+q^{2}+q+1=p⇒q-1=2^{m}.p$. Do $2^{m}.p>p nên q-1>q^{4}+q^{3}+q^{2}+q+1 $(vô lý)

+ Xét trường hợp

$$q^{4}+q^{3}+q^{2}+q+1=p^{2}⇒4q^{4}+4q^{3}+q^{2}<4p^{2}=4q^{4}+4q^{3}+4q^{2}+4q+4$$

$<4q^{4}+4q^{3}+9q^{2}+4q+4⇒(2q^{2}+q)^{2}<4p^{2}<(2q^{2}+q+2)^{2}$. Từ đó suy ra

$4p^{2}=(2q^{2}+q+1)^{2}$ . Ta được phương trình 4($q^{4}+q^{3}+q^{2}+q+1)=(2q^{2}+q+1)^{2}⇔q^{2}-2q-3=0$, mà q nguyên tố, suy ra q = 3, từ đó tìm được p = 11; m = 1. Vậy ta có bộ ba số nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán là: (m,p,q) = (1;11;3).

2. Cho a, b là hai số nguyên thỏa mãn a khác b và ab(a +b) chia hết cho $a^{2}+ab+b^{2}$.

Chứng minh rằng $\left|a-b\right|>\sqrt[2]{ab}$ .

Đặt d = UCLN(a,b) suy ra a = xd, b = yd với UCLN(x,y) = 1 khi đó:

$$\frac{ab(a+b)}{ a^{2}+ab+b^{2}}=\frac{dxy(x+y)}{ x^{2}+xy+y^{2}}\in Z$$

Ta có UCLN$(x^{2}+xy+y^{2};x)=UCLN\left(y^{2};x\right)=1$

Tương tự UCLN$(x^{2}+xy+y^{2};y)=1$

Đặt d’ = UCLN($x+y,x^{2}+xy+y^{2})$

 $⇒\left\{\begin{array}{c}x+y\vdots d'\\x^{2}+xy+y^{2}\vdots d'\end{array}\right.⇒\left\{\begin{array}{c}(x^{2}+xy+y^{2})-x(x+y)\vdots d'\\(x^{2}+xy+y^{2})-y(x+y)\vdots d'\end{array}\right.⇒\left\{\begin{array}{c}x^{2}\vdots d'\\y^{2}\vdots d'\end{array}\right.⇒d^{'}=1$

Do đó $d:x^{2}+xy+y^{2}⇒d\geq x^{2}+xy+y^{2}$

Mặt khác $\left|a-b\right|^{3}=d^{3}\left|x-y\right|^{3}=d^{2}\left|x-y\right|^{3}.d\geq d^{2}.1(x^{2}+xy+y^{2})>d^{2}.xy=ab$.

Vậy $\left|a-b\right|>\sqrt[3]{ab}$

**Câu 4. (6,0 điểm)**

****

**1.** Chứng minh $∆ANM$ đồng dạng với $∆ABC$ và $\hat{BQI }=\hat{ECI }$.

Ta có: $∆ANM∼∆AMC\left(g.g\right)⇒\frac{AN}{AM}=\frac{AB}{AC}$

Xét $∆ANM$ và $∆ABC$ có:

$\frac{AN}{AM}=\frac{AB}{AC}$; $\hat{A }$là góc chung

$$⇒∆ANM∼∆ABC\left(c.g.c\right)(đpcm)$$

Vì $∆ANM∼∆ABC⇒\hat{ANM }=\hat{ABC }$

Mà $\hat{ANM }+\hat{MNB }=\hat{ABC }+\hat{MCB }=90°$ (Do BN $⊥AC;CM⊥AB)⇒\hat{MNB }=\hat{MCB }mà \hat{MNB }=\hat{BQI } $(2 góc so le trong)

$⇒\hat{BQI }=\hat{MCB }hay \hat{BQI }=\hat{ECI } $(đpcm)

**2.** Chứng minh IQ.IE = $IC^{2}$ và $\frac{KN}{KM}=\left(\frac{HN}{HM}\right)^{2}$.

Theo câu a, $\hat{BQI }=\hat{ECI }$ lại có $\hat{BIQ }=\hat{EIC }$ ( 2 góc đối đỉnh) $⇒∆BIQ∼∆EIC$ (g.g)

$$⇒\frac{IQ}{IC}=\frac{IB}{IE}⇒IQ.IE=IC.IB mà IB=IC \left(gt\right)⇒IQ.IE=IC^{2}$$

 $⇒\frac{IQ}{IE}=\left(\frac{IC}{IE}\right)^{2}$(1)

Áp dụng ệ quả Ta – Lét ta có: $\frac{KN}{IQ}=\frac{HK}{HI}=\frac{KM}{IE}⇒\frac{KN}{KM}=\frac{IQ}{IE}$ (2)

Từ (1) và (2) $⇒\frac{KN}{KM}=\left(\frac{IC}{IE}\right)^{2}$

Trên cạnh EM lấy P sao cho IP = IE( P$\ne $ E) $⇒∆IPE cân tại I⇒\hat{IPC }=\hat{IEP }$

Mà $\hat{IEP }=\hat{HNM }$(2 góc so le trong, MN//EQ) $⇒\hat{HMN }=\hat{IPE }hay ⇒\hat{HMN }=\hat{IPC }$

Lại có: $\hat{HNM }=\hat{ICP }⇒IP=IE$ (cách lấy điểm P) $⇒\frac{IC}{IE}=\frac{HN}{HM}$ (4)

Từ (3) và (4) $⇒\frac{KN}{KM}=\left(\frac{HN}{HM}\right)^{2}$ (đpcm)

**3**. Gọi D là giao điểm của AH với BC. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{AD.BN}+\frac{1}{BN.CM}+\frac{1}{CM.AD}\leq \frac{4}{3(R-OH)^{2}}$$

Vì BN $⊥AC;CM⊥AB$; $\left\{H\right\}=BN∩CM⇒H$ là trực tâm $∆ABC$

$⇒$AH $⊥BC hay AD⊥BC$

Do đó ta có: $\frac{HD}{AD}+\frac{HN}{BN}+\frac{HM}{CM}=\frac{S\_{HBC}}{S\_{ABC}}+\frac{S\_{HAC}}{S\_{ABC}}+\frac{S\_{HAB}}{H\_{ABC}}=1$

$$⇒\frac{AD-HD}{AD}+\frac{BN-BH}{BN}+\frac{CM-CH}{CM}=1⇔\frac{AH}{AD}+\frac{BH}{BN}+\frac{CH}{CM}=2$$

Do H là trực tân $∆ABC$ nhọn nên H nằm trong $∆ABC$

$⇒\left\{\begin{array}{c}AH\geq AO-OH=R-OH>0\\BH\geq BO-OH=R-OH>0\\CH\geq CO-OH=R-OH>0\end{array}\right.$ (**BĐT ba điểm**)

$⇒2=\frac{AH}{AD}+\frac{BH}{BN}+\frac{CH}{CM}\geq (R-OH)\left(\frac{1}{AD}+\frac{1}{BN}+\frac{1}{CM}\right)⇒\frac{1}{AD}+\frac{1}{BN}+\frac{1}{CM}\leq \frac{2}{R-OH}$ (5)

Với mọi x, y ta có: $\left(x+1\right)^{2}\geq 0⇔x^{2}+y^{2}\geq 2xy$

Chứng minh tương tự: $y^{2}+z^{2}\geq 2yz;z^{2}+x^{2}\geq 2zy$

Cộng theo từng vế ba BĐT trên ta được:

$$2(x^{2}+xy+y^{2})\geq 2\left(xy+z+zx\right)⇔x^{2}+y^{2}+z^{2}\geq xy+yz+zx$$

$$⇔\left(x+y+z\right)^{2}\geq 3(xy+yz+zx)$$

Áp dụng BĐT trên với $x=\frac{1}{AD};y=\frac{1}{BN};z=\frac{1}{CM}$ ta suy ra được:

$\left(\frac{1}{AD}+\frac{1}{BN}+\frac{1}{CM}\right)^{2}\geq 3\left(\frac{1}{AD.BN}+\frac{1}{BN.CM}+\frac{1}{CM.AD}\right)\leq \frac{4}{3(R-OH)^{2}}$ (npcm)

Dấu “=” xảy ra $⇔$ dấu “=” của các bất đẳng thức trên đồng thời xảy ra $⇔$ tam giác ABC đều.

**Câu 5. (2,0 điểm)**

Ta có:

$$Q=\frac{\sqrt{a^{2}-1}-a}{a(a^{2}-1-a^{2})}+\frac{\sqrt{b^{2}-1}-b}{b(b^{2}-1-b^{2})}+\frac{\sqrt{c^{2}-1}-c}{c(c^{2}-1-c^{2})}$$

$$=\frac{\sqrt{a^{2}-1}-a}{-a}+\frac{\sqrt{b^{2}-1}-b}{-b}+\frac{\sqrt{c^{2}-1}-c}{-c}$$

$$=3-\left(\frac{\sqrt{a^{2}-1}}{a}+\frac{\sqrt{b^{2}-1}}{b}+\frac{\sqrt{c^{2}-1}}{c}\right)$$

$Q-3=-\left(\frac{\sqrt{a^{2}-1}}{a}+\frac{\sqrt{b^{2}-1}}{b}+\frac{\sqrt{c^{2}-1}}{c}\right)=-P$. Với $P=\left(\frac{\sqrt{a^{2}-1}}{a}+\frac{\sqrt{b^{2}-1}}{b}+\frac{\sqrt{c^{2}-1}}{c}\right)$

sử dụng bất đẳng thức: Với x,y,z $\geq 0$, ta luôn có $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \leq \sqrt{3(x+y+z)}$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi x = y = z.

Từ bất đẳng thức đã cho ta có:

Suy ra

$$P=\sqrt{1-\frac{1}{a^{2}}}+\sqrt{1-\frac{1}{b^{2}}}+\sqrt{1-\frac{1}{c^{2}}}\leq \sqrt{3\left[\frac{1}{a^{2}}+\frac{1}{b^{2}}+\frac{1}{c^{2}}\right]}=\sqrt{9-3\left[\frac{1}{a^{2}}+\frac{1}{b^{2}}+\frac{1}{c^{2}}\right]}$$

$$P\leq \sqrt{9-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^{2}}$$

Từ giả thiết 16abc +4(ab+bc+ca) = 81 +24(a+b+c)

$⇔16=\frac{18}{abc}+24\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)-4(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca})$ (\*)

Ta có $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\leq \frac{1}{3}.\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^{2}$ và $\frac{1}{abc}\leq \frac{1}{21}.\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^{3}$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi a = b = c.

Đặt $t=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c};0<t\leq 3$ (Vì a, b, c $\geq 1)$. Từ (\*) ta có

$16\leq 3t^{3}+8t^{2}-4t⇔3t^{3}+8t^{2}-4t-16\geq 0⇔(3t-4)(t+2)^{2}\geq 0⇔t\geq \frac{4}{3}$ (Vì 0 < t $\leq 3)$

Suy ra $P\leq \sqrt{9-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^{2}}$ $\leq \sqrt{9-\left(\frac{4}{3}\right)^{2}}=\frac{\sqrt{65}}{3}⇒Q-3=-P\geq -\frac{\sqrt{65}}{3}⇔Q\geq \frac{9-\sqrt{65}}{3}$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi

 $\left\{\begin{array}{c}16abc+4\left(ab+bc+ca\right)=81+24(a+b+c)\\a=b=c\\a,b,c\geq 1\end{array}\right.⇔a=b=c=\frac{9}{4}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của Q là $\frac{9-\sqrt{65}}{3}$ khi a = b = c = $\frac{9}{4}$