

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

DẠNG 1. CẤP SỐ CỘNG

Câu 1. Trong các dãy số sau, dãy nào là cấp số cộng. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng đó:

- a). Dãy số (u_n) với $u_n = 19n - 5$ b). Dãy số (u_n) với $u_n = -3n + 1$
c). Dãy số (u_n) với $u_n = n^2 + n + 1$ d). Dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^n + 10n$

Lời giải

- a). Dãy số (u_n) với $u_n = 19n - 5$

Ta có $u_{n+1} - u_n = 19(n+1) - 5 - (19n - 5) = 19$. Vậy (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d = 19$ và số hạng đầu $u_1 = 19 \cdot 1 - 5 = 14$.

- b). Dãy số (u_n) với $u_n = -3n + 1$

Ta có $u_{n+1} - u_n = -3(n+1) + 1 - (-3n + 1) = -3$. Vậy (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d = -3$ và số hạng đầu $u_1 = -3 \cdot 1 + 1 = -2$.

- c). Dãy số (u_n) với $u_n = n^2 + n + 1$

Ta có $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 + (n+1) + 1 - (n^2 + n + 1) = 2n + 2$, phụ thuộc vào n

Vậy (u_n) không là cấp số cộng.

- d). Dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^n + 10n$

Ta có $u_{n+1} - u_n = (-1)^{n+1} + 10(n+1) - [(-1)^n + 10n] = -(-1)^n + 10 - (-1)^n = 10 - 2(-1)^n$, phụ thuộc vào n . Vậy (u_n) không là cấp số cộng.

Câu 2. Định x để 3 số $10 - 3x, 2x^2 + 3, 7 - 4x$ theo thứ tự đó lập thành 1 cấp số cộng.

Lời giải

Theo tính chất cấp số cộng ta có: $(10 - 3x) + (7 - 4x) = 2(2x^2 + 3)$

$$\Leftrightarrow 17 - 7x = 4x^2 + 6 \Leftrightarrow 4x^2 + 7x - 11 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -\frac{11}{4}$$

Câu 3. Một tam giác vuông có chu vi bằng $3a$, và 3 cạnh lập thành một CSC. Tính độ dài ba cạnh của tam giác theo a .

Lời giải

Gọi x, y, z theo thứ tự tăng dần của độ dài ba cạnh của tam giác.

Chu vi của tam giác: $x + y + z = 3a$ (1)

Tính chất của CSC có $x + z = 2y$ (2)

Vì tam giác vuông nên có: $x^2 + y^2 = z^2$ (3)

Thay (2) vào (1) được $3y = 3a \Leftrightarrow y = a$, thay $y = a$ vào (2) được: $x + z = 2a \Rightarrow x = 2a - z$

Thay x và y vào (3) được: $(2a - z)^2 + a^2 = z^2 \Leftrightarrow 5a^2 - 4az = 0 \Leftrightarrow z = \frac{5a}{4} \Rightarrow x = \frac{3a}{4}$

Kết luận độ dài ba cạnh của tam giác thỏa yêu cầu: $\frac{3a}{4}, a, \frac{5a}{4}$.

Câu 4. Ba góc của một tam giác vuông lập thành một CSC. Tìm số đo các góc đó.

Lời giải

Gọi 3 góc A, B, C theo thứ tự đó là ba góc của tam giác ABC lập thành CSC.

$$\text{Ta có } \begin{cases} A + B + C = 180 \\ A + C = 2B \\ C = 90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 90 \\ A - 2B = -90 \\ C = 90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 30 \\ B = 60 \\ C = 90 \end{cases}$$

Câu 5. Tìm số hạng đầu tiên, công sai, số hạng thứ 20 và tổng của 20 số hạng đầu tiên của các cấp số cộng sau, biết rằng:

$$\text{a) } \begin{cases} u_5 = 19 \\ u_9 = 35 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} u_3 + u_5 = 14 \\ s_{12} = 129 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} u_6 = 8 \\ u_2^2 + u_4^2 = 16 \end{cases}$$

Lời giải

$$\text{a) } \begin{cases} u_5 = 19 \\ u_9 = 35 \end{cases} \quad (1) \quad \text{Áp dụng công thức } u_n = u_1 + (n - 1)d, \text{ ta có: } (1) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 4d = 19 \\ u_1 + 8d = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 4 \end{cases}$$

Vậy số hạng đầu tiên $u_1 = 3$, công sai $d = 4$.

Số hạng thứ 20: $u_{20} = u_1 + 19d = 3 + 19 \cdot 4 = 79$.

Tổng của 20 số hạng đầu tiên: $S_{20} = \frac{20(2u_1 + 19d)}{2} = 10(2 \cdot 3 + 19 \cdot 4) = 820$

$$\text{b) } \begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases} \quad (1) \quad \text{Ta cũng áp dụng công thức } u_n = u_1 + (n - 1)d:$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + d - (u_1 + 2d) + u_1 + 4d = 10 \\ u_1 + 3d + u_1 + 5d = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = 10 \\ 2u_1 + 8d = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 3 \end{cases}$$

Vậy số hạng đầu tiên $u_1 = 1$, công sai $d = 3$.

Số hạng thứ 20: $u_{20} = u_1 + 19d = 1 + 19 \cdot 3 = 58$.

Tổng của 20 số hạng đầu tiên: $S_{20} = \frac{20(2u_1 + 19d)}{2} = 10(2.1 + 19.3) = 590$

c) $\begin{cases} u_3 + u_5 = 14 \\ S_{12} = 129 \end{cases} \quad (1)$. Áp dụng công thức $u_n = u_1 + (n-1)d$, $S_n = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}$ Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d + u_1 + 4d = 14 \\ 6(u_1 + u_{12}) = 129 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 6d = 14 \\ 12u_1 + 66d = 129 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{5}{2} \\ d = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Vậy số hạng đầu tiên $u_1 = \frac{5}{2}$, công sai $d = \frac{3}{2}$.

Số hạng thứ 20: $u_{20} = u_1 + 19d = \frac{5}{2} + 19 \cdot \frac{3}{2} = 31$

Tổng của 20 số hạng đầu tiên: $S_{20} = \frac{20(2u_1 + 19d)}{2} = 10 \left(2 \cdot \frac{5}{2} + 19 \cdot \frac{3}{2} \right) = 335$

d) $\begin{cases} u_6 = 8 \\ u_2^2 + u_4^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 5d = 8 \\ (u_1 + d)^2 + (u_1 + 3d)^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 8 - 5d \\ (8 - 5d + d)^2 + (8 - 5d + 3d)^2 = 16 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 8 - 5d \\ (8 - 4d)^2 + (8 - 2d)^2 = 16 \end{cases} (*)$$

Giải (*): $20d^2 - 96d + 112 = 0 \Leftrightarrow d = \frac{14}{5} \vee d = 2$

Với $d = \frac{14}{5} \Rightarrow u_1 = -6$

Số hạng thứ 20: $u_{20} = u_1 + 19d = -6 + 19 \cdot \frac{14}{5} = \frac{236}{5}$

Tổng của 20 số hạng đầu tiên: $S_{20} = \frac{20(2u_1 + 19d)}{2} = 10 \left(2 \cdot (-6) + 19 \cdot \frac{14}{5} \right) = 412$

Với $d = 2 \Rightarrow u_1 = -2$

Số hạng thứ 20: $u_{20} = u_1 + 19d = -2 + 19 \cdot 2 = 36$

Tổng của 20 số hạng đầu tiên: $S_{20} = \frac{20(2u_1 + 19d)}{2} = 10(2 \cdot (-2) + 19 \cdot 2) = 340$

Câu 6. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng, biết:

a). $\begin{cases} u_7 = 27 \\ u_{15} = 59 \end{cases}$ b). $\begin{cases} u_9 = 5u_2 \\ u_{13} = 2u_6 + 5 \end{cases}$ c). $\begin{cases} u_2 + u_4 - u_6 = -7 \\ u_8 - u_7 = 2u_4 \end{cases}$

$$d). \begin{cases} u_3 - u_7 = -8 \\ u_2 \cdot u_7 = 75 \end{cases} \quad e). \begin{cases} u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 155 \\ s_3 = 21 \end{cases}$$

Lời giải

Gọi số hạng đầu là u_1 và công sai là d .

$$a). \begin{cases} u_7 = 27 \\ u_{15} = 59 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 6d = 27 \\ u_1 + 14d = 59 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 4 \end{cases}$$

$$b). \begin{cases} u_9 = 5u_2 \\ u_{13} = 2u_6 + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 8d = 5(u_1 + d) \\ u_1 + 12d = 2(u_1 + 5d) + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4u_1 - 3d = 0 \\ u_1 - 2d = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 4 \end{cases}$$

$$c). \begin{cases} u_2 + u_4 - u_6 = -7 \\ u_8 - u_7 = 2u_4 \end{cases} \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + d + u_1 + 3d - (u_1 + 5d) = -7 \\ u_1 + 7d - (u_1 + 6d) = 2(u_1 + 3d) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - d = -7 \\ 2u_1 + 5d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -5 \\ d = 2 \end{cases}$$

$$d). \begin{cases} u_3 - u_7 = -8 \\ u_2 \cdot u_7 = 75 \end{cases} \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d - (u_1 + 6d) = -8 \\ (u_1 + d)(u_1 + 6d) = 75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4d = -8 \\ (u_1 + d)(u_1 + 6d) = 75 \end{cases} \begin{cases} d = 2 \\ (u_1 + 2)(u_1 + 12) = 75 \end{cases} (*)$$

$$(*) \Leftrightarrow u_1^2 + 14u_1 - 51 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ u_1 = -17 \end{cases}$$

Giải

$$\text{Vậy } \begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u_1 = -17 \\ d = 2 \end{cases}$$

$$e). \begin{cases} u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 155 \\ s_3 = 21 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } s_3 = 21 \Leftrightarrow u_1 + u_2 + u_3 = 21 \Leftrightarrow u_1 + u_1 + d + u_1 + 2d = 21 \Leftrightarrow d = 7 - u_1.$$

$$\text{Ta có: } u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 155 \Leftrightarrow u_1^2 + (u_1 + d)^2 + (u_1 + 2d)^2 = 155$$

$$\Leftrightarrow u_1^2 + (u_1 + 7 - u_1)^2 + (u_1 + 14 - 2u_1)^2 = 155 \Leftrightarrow u_1^2 + 49 + (14 - u_1)^2 = 155$$

$$\Leftrightarrow 2u_1^2 - 28u_1 + 90 = 0 \Leftrightarrow u_1 = 9 \vee u_1 = 5$$

$$\text{Với } u_1 = 9 \Rightarrow d = -2. \text{ Với } u_1 = 5 \Rightarrow d = 2$$

Câu 7. Tìm 4 số hạng liên tiếp của một CSC biết tổng của chúng bằng 10 và tổng bình phương của chúng bằng 30.

Lời giải

Gọi bốn số hạng liên tiếp của CSC là $u_1 = u - 3d, u_2 = u - d, u_3 = u + d, u_4 = u + 3d$ với công sai là $2d$:

$$\text{Theo đề bài ta có: } \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 10 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 30 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4u = 10 \\ (u - 3d)^2 + (u - d)^2 + (u + d)^2 + (u + 3d)^2 = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{5}{2} \\ d^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 8 \\ d = \pm 4 \end{cases}$$

Câu 8. Một CSC có 7 số hạng với công sai d dương và số hạng thứ tư bằng 11. Hãy tìm các số hạng còn lại của CSC đó, biết hiệu của số hạng thứ ba và số hạng thứ năm bằng 6.

Lời giải

Gọi $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7$ là bảy số hạng liên tiếp của CSC với công sai d .

Theo đề bài ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} u_4 = 11 \\ u_3 - u_5 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = 11 \\ (u_1 + 2d) - (u_1 + 5d) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = 11 \\ d = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 17 \\ d = -2 \end{cases}$$

Kết luận: $u_1 = 17, u_2 = 15, u_3 = 13, u_4 = 11, u_5 = 9, u_6 = 7, u_7 = 5$.

Câu 9. Một CSC có 7 số hạng mà tổng của số hạng thứ ba và số hạng thứ năm bằng 28, tổng số hạng thứ năm và số hạng cuối bằng 140. Tìm CSC đó.

Lời giải

Gọi $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7$ là bảy số hạng liên tiếp của CSC với công sai d .

Theo đề bài ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} u_3 + u_5 = 28 \\ u_5 + u_7 = 140 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d + u_1 + 4d = 28 \\ u_1 + 4d + u_1 + 6d = 140 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 6d = 28 \\ 2u_1 + 10d = 140 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -70 \\ d = 28 \end{cases}$$

DẠNG 2. CẤP SỐ NHÂN

Câu 10. Xét trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số nhân, (nếu có) tìm công bội của cấp số nhân đó:

$$\text{a). } u_n = (-3)^{2n+1} \quad \text{b). } u_n = (-1)^n \cdot 5^{3n+2} \quad \text{c). } \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n^2 \end{cases} \quad \text{d). } \begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{9}{u_n} \end{cases}$$

Lời giải

a). Ta có $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(-3)^{2n+3}}{(-3)^{2n+1}} = (-3)^2 = 9$ (không đổi). Kết luận (u_n) là cấp số nhân với công bội $q = 9$.

b). Ta có $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(-1)^{n+1} \cdot 5^{3(n+1)+2}}{(-1)^n \cdot 5^{3n+2}} = -1 \cdot 5^3 = -125$ (không đổi). Kết luận (u_n) là cấp số nhân với công bội $q = -125$.

c). Ta có $u_2 = u_1^2 = 4$, $u_3 = u_2^2 = 16$, $u_4 = u_3^2 = 256$, suy ra $\frac{u_2}{u_1} = \frac{4}{2} = 2$ và $\frac{u_4}{u_3} = \frac{256}{16} = 16$
 $\Rightarrow \frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_4}{u_3}$. Do đó (u_n) không là cấp số nhân.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{9}{u_{n-1}}}{\frac{9}{u_n}} = \frac{u_{n-1}}{u_n} \Rightarrow u_{n+1} = u_{n-1}, \forall n \geq 2$$

d). $\frac{9}{u_{n-1}}$. Do đó có:

$$u_1 = u_3 = u_5 = \dots = u_{2n+1} \dots (1)$$

$$\text{Và } u_2 = u_4 = u_6 = \dots = u_{2n} = \dots (2)$$

$$u_1 = 3 \Rightarrow u_2 = \frac{9}{u_1} = 3$$

Theo đề bài có (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = u_5 = \dots = u_{2n} = u_{2n+1} \dots$ Kết luận (u_n) là cấp số nhân với công bội $q = 1$.

Câu 11. Chứng minh rằng dãy số $(v_n): v_n = (-1)^n \cdot 3^{2n}$ là một cấp số nhân.

Lời giải

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(-1)^{n+1} 3^{2(n+1)}}{(-1)^n 3^{2n}} = -9, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

. Vậy $(v_n): v_n = (-1)^n \cdot 3^{2n}$ là một cấp số nhân.

Câu 12. Giá trị của a để $\frac{-1}{5}; a; \frac{-1}{125}$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân?

Lời giải

$$\text{Ta có: } a^2 = \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{125}\right) = \frac{1}{625} \Leftrightarrow a = \pm \frac{1}{25}$$

Câu 13. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 4u_n + 9, \forall n \geq 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng dãy số (v_n) xác định bởi $v_n = u_n + 3, \forall n \geq 1$ là một cấp số nhân. Hãy xác định số hạng đầu và công bội của cấp số nhân đó.

Lời giải

$$\text{Vì có } v_n = u_n + 3 \quad (1) \Rightarrow v_{n+1} = u_{n+1} + 3 \quad (2)$$

$$\text{Theo đề } u_{n+1} = 4u_n + 9 \Rightarrow u_{n+1} + 3 = 4(u_n + 3) \quad (3).$$

Thay (1) và (2) vào (3) được: $v_{n+1} = 4v_n, \forall n \geq 1 \Rightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = 4$ (không đổi). Kết luận (v_n) là cấp số nhân với công bội $q = 4$ và số hạng đầu $v_1 = u_1 + 3 = 5$.

Câu 14. Cho $x, 3, y$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân và $x^4 = y\sqrt{3}$. Tìm x, y .

Lời giải

$$\text{Ta có: } x \cdot y = 9 \Rightarrow y = \frac{9}{x}$$

Thay vào $x^4 = y\sqrt{3} \Leftrightarrow x^4 = \frac{9}{x}\sqrt{3} \Leftrightarrow x^5 = (\sqrt{3})^4 \cdot \sqrt{3} \Leftrightarrow x^5 = (\sqrt{3})^5 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$

$\Rightarrow y = \frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}.$ Kết luận $\begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = 3\sqrt{3} \end{cases}$

Câu 15. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân, biết:

a) $\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 135 \\ u_4 + u_5 + u_6 = 40 \end{cases}$ c) $\begin{cases} u_2 = 6 \\ S_3 = 43. \end{cases}$

Lời giải

a). $\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 q^4 = 51 \\ u_1 q + u_1 q^5 = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 (1 + q^4) = 51 \quad (*) \\ u_1 q (1 + q^4) = 102 \quad (**) \end{cases}$

Lấy $\frac{(**)}{(*)} \Leftrightarrow \frac{u_1 q (1 + q^4)}{u_1 (1 + q^4)} = \frac{102}{51} \Leftrightarrow q = 2 \Rightarrow u_1 = \frac{51}{1 + q^4} = \frac{51}{17} = 3.$

Kết luận có công bội $q = 2$ và số hạng đầu tiên $u_1 = 3$.

Kết luận: $u_1 = 3$ và $q = 2$

b) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 135 \\ u_4 + u_5 + u_6 = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 q + u_1 q^2 = 135 \\ u_1 q^3 + u_1 q^4 + u_1 q^5 = 40 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 (1 + q + q^2) = 135 \quad (*) \\ u_1 q^3 (1 + q + q^2) = 40 \quad (**) \end{cases}$

Lấy $\frac{(**)}{(*)} \Leftrightarrow \frac{u_1 q^3 (1 + q + q^2)}{u_1 (1 + q + q^2)} = \frac{40}{135} \Leftrightarrow q^3 = \frac{8}{27} \Leftrightarrow q = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow u_1 = \frac{135}{1 + q + q^2} = \frac{1215}{19}.$

Kết luận có công bội $q = \frac{2}{3}$ và số hạng đầu tiên $u_1 = \frac{1215}{19}$.

c) $\begin{cases} u_2 = 6 \\ S_3 = 43 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q = 6 \\ u_1 + u_2 + u_3 = 43 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q = 6 \\ u_1 + u_1 q + u_1 q^2 = 43 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q = 6 \quad (*) \\ u_1 (1 + q + q^2) = 43 \quad (**) \end{cases}.$ Lấy $\frac{(*)}{(**)} \Leftrightarrow \frac{u_1 q}{u_1 (1 + q + q^2)} = \frac{6}{43}$

$\Leftrightarrow 43q = 6(1 + q + q^2) \Leftrightarrow 6q^2 - 37q + 6 = 0 \Leftrightarrow q = 6 \vee q = \frac{1}{6}$

Với $q=6 \Rightarrow u_1=1$. Với $q=\frac{1}{6} \Rightarrow u_1=36$.

Kết luận $\begin{cases} q=6 \\ u_1=1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} q=\frac{1}{6} \\ u_1=36 \end{cases}$

- Câu 16.** Cho CSN (u_n) có các số hạng thỏa: $\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases}$
- a). Tìm số hạng đầu và công bội của CSN.
- b). Hỏi tổng bao nhiêu số hạng đầu tiên bằng 3069?
- c). Số 12288 là số hạng thứ mấy?

Lời giải

a). Ta có $\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 q^4 = 51 \\ u_1 q + u_1 q^5 = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1 + q^4) = 51 \quad (*) \\ u_1 q(1 + q^4) = 102 \quad (**) \end{cases}$

Lấy $\frac{(**)}{(*)} \Leftrightarrow \frac{u_1 q(1 + q^4)}{u_1(1 + q^4)} = \frac{102}{51} \Leftrightarrow q = 2 \Rightarrow u_1 = 3$

b). Có $S_n = 3069 \Leftrightarrow u_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = 3069 \Leftrightarrow 3 \cdot \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = 3069 \Leftrightarrow 2^n = 1024 \Rightarrow n = 10$. Kết luận tổng của 10 số hạng đầu tiên bằng 3069.

c). Có $u_k = 12288 \Leftrightarrow u_1 q^{k-1} = 12288 \Leftrightarrow 3 \cdot 2^{k-1} = 12288 \Leftrightarrow 2^{k-1} = 4096 = 2^{12} \Rightarrow k - 1 = 12 \Rightarrow k = 13$. Kết luận số 12288 là số hạng thứ 13.

- Câu 17.** Cho cấp số nhân (u_n) . Tìm u_1 và q, biết rằng:

1) $\begin{cases} u_2 + u_3 + u_4 = \frac{35}{2} \\ u_1 u_5 = 25 \\ u_i > 0 (i=1, \dots, 5) \end{cases}$ 2) $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} u_2 + u_4 + u_6 = -42 \\ u_3 + u_5 = 20 \end{cases}$

4) $u_1 + u_6 = 165; u_3 + u_4 = 60$. 5) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 15 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 85. \end{cases}$

6) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 13 \\ u_4 + u_5 + u_6 = 351 \end{cases}$ 7) $\begin{cases} 8u_2 + 5\sqrt{5}u_5 = 0 \\ u_1^3 + u_3^3 = 189 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} u_1 u_2 u_3 = 1728 \\ u_1 + u_2 + u_3 = 63 \end{cases}$

9). $\begin{cases} u_1 + u_3 = 3 \\ u_1^2 + u_3^2 = 5 \end{cases}$ 10). $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 7 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 21 \end{cases}$

Lời giải

$$1). \begin{cases} u_2 + u_3 + u_4 = \frac{35}{2} \\ u_1 u_5 = 25 \\ u_i > 0 (i = 1, \dots, 5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \cdot q + u_1 \cdot q^2 + u_1 \cdot q^3 = \frac{35}{2} \quad (1) \\ u_1 u_1 \cdot q^4 = 25 \quad (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow (u_1 \cdot q^2) = 5^2 \Leftrightarrow u_1 \cdot q^2 = 5 \Rightarrow u_1 = \frac{5}{q^2} \text{ thay vào (1) được:}$$

$$\frac{5}{q^2} (q + q^2 + q^3) = \frac{35}{2} \Leftrightarrow 2(1 + q + q^2) = 79 \Leftrightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0 \Leftrightarrow q = 2 \vee q = \frac{1}{2}$$

$$\text{Với } q = 2 \Rightarrow u_1 = \frac{5}{4} \text{ . Với } q = \frac{1}{2} \Rightarrow u_1 = 20.$$

$$2). \begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - u_1 q^2 + u_1 q^4 = 65 \\ u_1 + u_1 q^6 = 325. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 (1 - q^2 + q^4) = 65 \quad (1) \\ u_1 (1 + q^6) = 325 \quad (2) \end{cases}$$

$$\text{Lấy: } \frac{(2)}{(1)} \Leftrightarrow \frac{1 + q^6}{1 - q^2 + q^4} = \frac{325}{65} \Leftrightarrow \frac{(1 + q^2)(1 - q^2 + q^4)}{1 - q^2 + q^4} = 5 \text{ (vì } 1 + q^6 = 1 + (q^2)^3 \text{)}$$

$$\Leftrightarrow 1 + q^2 = 5 \Leftrightarrow q^2 = 4 \Leftrightarrow q = \pm 2.$$

$$\text{Với } q = 2 \Rightarrow u_1 = \frac{65}{1 - 2^2 + 2^4} = 5 \text{ . Với } q = -2 \Rightarrow u_1 = \frac{65}{1 - (-2)^2 + (-2)^4} = 5.$$

$$3). \begin{cases} u_2 + u_4 + u_6 = -42 \\ u_3 + u_5 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \cdot q + u_1 \cdot q^3 + u_1 \cdot q^5 = -42. \\ u_1 \cdot q^2 + u_1 \cdot q^4 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \cdot q (1 + q^2 + q^4) = -42 \quad (1) \\ u_1 \cdot q (1 + q^2) = 20 \quad (2) \end{cases}$$

$$\text{Lấy: } \frac{(1)}{(2)} \Leftrightarrow \frac{1 + q^2 + q^4}{q(1 + q^2)} = -\frac{21}{10} \Leftrightarrow 10 + 10q^2 + 10q^4 = -21q - 21q^3$$

$$\Leftrightarrow 10q^4 + 21q^3 + 10q^2 + 21q + 10 = 0 \Leftrightarrow 10q^2 + 21q + 10 + \frac{21}{q} + \frac{10}{q^2} = 10$$

$$\Leftrightarrow 10 \left(q^2 + \frac{1}{q^2} \right) + 21 \left(1 + \frac{1}{q} \right) + 10 = 0 \quad (*)$$

$$\text{Đặt: } t = q + \frac{1}{q} \Rightarrow t^2 = \left(q + \frac{1}{q} \right)^2 \Leftrightarrow q^2 + \frac{1}{q^2} = t^2 - 2. \quad \text{Điều kiện } |t| \geq 2$$

$$(*) \Leftrightarrow 10(t^2 - 2) + 21t + 10 = 0 \Leftrightarrow 10t^2 + 21t - 10 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{5}{2} \vee t = \frac{2}{5} \text{ (loại).}$$

$$\text{Với } t = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow q + \frac{1}{q} = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow 2q^2 + 5q + 2 = 0 \Leftrightarrow q = -\frac{1}{2} \vee q = -2$$

$$q = -\frac{1}{2} \Rightarrow u_1 = \frac{20}{q^2 + q^4} = \frac{20}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^4} = 64$$

• Nếu

$$q = -2 \Rightarrow u_1 = \frac{20}{q^2 + q^4} = \frac{20}{2^2 + 2^4} = 1.$$

• Nếu

$$4). u_1 + u_6 = 165; u_3 + u_4 = 60.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 q^5 = 165 \\ u_1 q^2 + u_1 q^3 = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 (1 + q^5) = 165 \quad (1) \\ u_1 q^2 (1 + q) = 60 \quad (2) \end{cases}$$

$$\text{Lấy } \frac{(1)}{(2)} \Leftrightarrow \frac{1 + q^5}{q^2 (1 + q)} = \frac{11}{4} \Leftrightarrow \frac{(1 + q)(1 - q + q^2 - q^3 + q^4)}{q^2 (1 + q)} = \frac{11}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4(1 - q + q^2 - q^3 + q^4) = 11q^2 \Leftrightarrow 4q^4 - 4q^3 - 7q^2 - 4q + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4q^4}{q^2} - \frac{4q^3}{q^2} - \frac{7q^2}{q^2} - \frac{4q}{q^2} + \frac{4}{q^2} = 0 \Leftrightarrow 4\left(q^2 + \frac{1}{q^2}\right) - 4\left(q + \frac{1}{q}\right) - 7 = 0 \quad (*)$$

$$\text{Đặt: } t = q + \frac{1}{q} \Rightarrow t^2 = \left(q + \frac{1}{q}\right)^2 \Rightarrow q^2 + \frac{1}{q^2} = t^2 - 2. \quad \text{Điều kiện: } |t| \geq 2.$$

$$(*) \Leftrightarrow 4(t^2 - 2) - 4t - 7 = 0 \Leftrightarrow 4t^2 - 4t - 15 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{2} \vee t = -\frac{3}{2} \quad (\text{loại}).$$

$$\text{Với } t = \frac{5}{2} \Leftrightarrow q + \frac{1}{q} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0 \Leftrightarrow q = 2 \vee q = \frac{1}{2}$$

$$\bullet \text{ với } q = 2 \Rightarrow u_1 = \frac{165}{1 + q^5} = \frac{165}{1 + 2^5} = 5 \quad \bullet \text{ với } q = \frac{1}{2} \Rightarrow u_1 = \frac{165}{1 + q^2} = \frac{165}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^5} = 160.$$

$$5). \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 15 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 85. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 q + u_1 q^2 + u_1 q^3 = 15 \\ u_1^2 + u_1^2 q^2 + u_1^2 q^4 + u_1^2 q^6 = 85. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 (1 + q + q^2 + q^3) = 15 \\ u_1^2 (1 + q^2 + q^4 + q^6) = 85. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1^2 (1 + q + q^2 + q^3)^2 = 15^2 \quad (1) \\ u_1^2 (1 + q^2 + q^4 + q^6) = 85 \quad (2). \end{cases}$$

$$\text{Lấy } \frac{(1)}{(2)} \Leftrightarrow \frac{(1 + q + q^2 + q^3)^2}{1 + q^2 + q^4 + q^6} = \frac{45}{17} \Leftrightarrow \frac{[(1 + q) + q^2(1 + q)]^2}{(1 + q^2) + q^4(1 + q^2)} = \frac{45}{17}$$

$$\Leftrightarrow \frac{[(1 + q)(1 + q^2)]^2}{(1 + q^2) + (1 + q^4)} = \frac{45}{17} \Leftrightarrow \frac{(1 + q)^2 (1 + q^2)}{1 + q^4} = \frac{45}{17} \Leftrightarrow \frac{(1 + 2q + q^2)(1 + q^2)}{1 + q^4} = \frac{45}{17}$$

$$\Leftrightarrow 17(1+q^2+2q+2q^3+q^2+q^4)=45(1+q^4)$$

$$\Leftrightarrow 28q^4 - 34q^3 - 34q^2 - 34q + 28 = 0 \Leftrightarrow \frac{28q^4}{q^2} - \frac{34q^3}{q^2} - \frac{34q^2}{q^2} - \frac{34q}{q^2} + \frac{28}{q^2} = 0 \quad (\text{vì dễ dàng thấy } q \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow 28q^2 - 34q - 34 - \frac{34}{q} + 28 = 0 \Leftrightarrow 14\left(q^2 + \frac{1}{q^2}\right) - 17\left(q + \frac{1}{q}\right) - 17 = 0 \quad (*)$$

Đặt $t = q + \frac{1}{q} \Rightarrow t^2 = \left(q + \frac{1}{q}\right)^2 \Rightarrow q^2 + \frac{1}{q^2} = t^2 - 2$. Điều kiện: $|t| \geq 2$.

$$(*) \Leftrightarrow 14(t^2 - 2) - 17t - 17 = 0 \Leftrightarrow 14t^2 - 17t - 45 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{2} \vee t = -\frac{9}{7} \quad (\text{loại})$$

Với $t = \frac{5}{2} \Rightarrow q + \frac{1}{q} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0 \Leftrightarrow q = 2 \vee q = \frac{1}{2}$

• với $q = 2 \Rightarrow u_1 = 1$. • với $q = \frac{1}{2} \Rightarrow u_1 = \frac{15}{1+q+q^2+q^3} = 8$.

6).
$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 13 \\ u_4 + u_5 + u_6 = 351 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q+q^2) = 13 \quad (*) \\ u_1q^3(1+q+q^2) = 351 \quad (**) \end{cases}$$

Lấy
$$\frac{(**)}{(*)} \Leftrightarrow q^3 = 27 \Rightarrow q = 3 \Rightarrow u_1 = \frac{13}{1+q+q^2} = \frac{13}{1+3+9} = 1.$$

7).
$$\begin{cases} 8u_2 + 5\sqrt{5}u_5 = 0 \\ u_1^3 + u_3^3 = 189. \end{cases} \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 8u_1q - 5\sqrt{5}u_1q^4 = 0 \\ u_1^3 + (u_1q^2)^3 = 189. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8 = 5\sqrt{5}q^3 \Rightarrow q^3 = \frac{8}{5\sqrt{5}} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^3 \Rightarrow q = \frac{2}{\sqrt{5}} \\ u_1^3(1+q^6) = 189 \Rightarrow u_1^3 = \frac{189}{1+q^6} = 125 \Rightarrow u_1 = 5. \end{cases}$$

8).
$$\begin{cases} u_1u_2u_3 = 1728 \\ u_1 + u_2 + u_3 = 63 \end{cases} \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1u_1.q.u_1.q^2 = 1728 \\ u_1 + u_1q + u_1q^2 = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u_1q)^3 = 12^3 \\ u_1(1+q+q^2) = 63 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q = 12 \\ u_1(1+q+q^2) = 63 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{12}{q} \\ \frac{12}{q}(1+q+q^2) = 63 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{12}{q} \\ 12q^2 - 51q + 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 4 \Rightarrow u_1 = 3 \\ q = \frac{1}{4} \Rightarrow u_1 = 48. \end{cases}$$

$$9). \begin{cases} u_1 + u_3 = 3 \\ u_1^2 + u_3^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q^2) = 3 \\ u_2(1+q^4) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1^2(1+q^2)^2 = 9 \quad (*) \\ u_1^2(1+q^4) = 5 \quad (**) \end{cases}$$

Lấy $\frac{(*)}{(**)} \Leftrightarrow \frac{(1+q^2)^2}{1+q^4} = \frac{9}{5}$. Đặt: $t = q^2, t \geq 0$.

$$\Leftrightarrow 5(1+t)^2 = 9(1+t^2) \Leftrightarrow 4t^2 - 10t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \vee t = \frac{1}{2}$$

Với $t = 2 \Rightarrow q = \pm\sqrt{2}$

$$\bullet q = \sqrt{2} \Rightarrow u_1 = \frac{3}{1+q^2} = 1 \quad \bullet q = -\sqrt{2} \Rightarrow u_1 = \frac{3}{1+q^2} = 1$$

Với $t = \frac{1}{2} \Rightarrow q = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\bullet q = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow u_1 = \frac{3}{1+q^2} = 2 \quad \bullet q = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow u_1 = \frac{3}{1+q^2} = 2.$$

$$10). \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 7 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1q + u_1q^2 = 7 \\ u_1^2 + (u_1q)^2 + (u_1q^2)^2 = 21 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q+q^2) = 7 \\ u_1^2(1+q^2+q^4) = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1^2(1+q+q^2)^2 = 49 \quad (*) \\ u_1^2(1+q^2+q^4) = 21 \quad (**) \end{cases} \text{ . Lấy } \frac{(*)}{(**)} \text{ được:}$$

$$\frac{(1+q+q^2)^2}{1+q^2+q^4} = \frac{49}{21} \Leftrightarrow 21(1+q^2+q^4+2q+2q^2+2q^3) = 49(1+q^2+q^4)$$

$$\Leftrightarrow 21(1+2q+3q^2+2q^3+q^4) = 49(1+q^2+q^4) \Leftrightarrow 28q^4 - 42q^3 - 14q^2 - 42q + 28 = 0.$$

$$\Leftrightarrow \frac{28q^4}{q^2} - \frac{42q^3}{q^2} - \frac{14q^2}{q^2} - \frac{42q}{q^2} + \frac{28}{q^2} = 0 \Leftrightarrow 28q^2 - 42q - 14 - \frac{42}{q} + \frac{28}{q^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 28\left(q^2 + \frac{1}{q^2}\right) - 42\left(q + \frac{1}{q}\right) - 14 = 0 \quad (2)$$

Đặt: $t = q + \frac{1}{q} \Rightarrow t^2 = \left(q + \frac{1}{q}\right)^2 \Rightarrow q^2 + \frac{1}{q^2} = t^2 - 2$. Điều kiện: $|t| \geq 2$

$$(2) \Leftrightarrow 28(t^2 - 2) - 42t - 14 = 0 \Leftrightarrow 28t^2 - 42t - 70 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{2} \vee t = -1 \text{ (loại)}$$

Với $t = \frac{5}{2} \Leftrightarrow q + \frac{1}{q} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0 \Leftrightarrow q = 2 \vee q = \frac{1}{2}$

$$\bullet \quad q=2 \Rightarrow u_1 = \frac{7}{1+q+q^2} = 1 \quad \bullet \quad q = \frac{1}{2} \Rightarrow u_1 = \frac{7}{1+q+q^2} = 4$$

Câu 18. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân, biết:

a) $\begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325 \end{cases}$ c) $\begin{cases} u_3 + u_5 = 90 \\ u_2 - u_6 = 240 \end{cases}$

d) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 14 \\ u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 = 64 \end{cases}$ e) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 21 \\ \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} = \frac{7}{12} \end{cases}$ f) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 30 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 340 \end{cases}$

Lời giải

a) $\begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q^3 - u_1 q = 72 \\ u_1 q^4 - u_1 q^2 = 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q (q^2 - 1) = 72 \quad (1) \\ u_1 q^2 (q^2 - 1) = 144 \quad (2) \end{cases}$

Lấy (2):(1) được: $q = 2$, thay $q = 2$ vào (1) được $u_1 = 12$

c) $\begin{cases} u_3 + u_5 = 90 \\ u_2 - u_6 = 240 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q^2 + u_1 q^4 = 90 \\ u_1 q - u_1 q^5 = 240 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q^2 (1 + q^2) = 90 \quad (1) \\ u_1 q (1 - q^4) = 240 \quad (2) \end{cases}$

Lấy $\frac{(2)}{(1)} \Leftrightarrow \frac{u_1 q (1 - q^4)}{u_1 q^2 (1 + q^2)} = \frac{240}{90} \Leftrightarrow \frac{(1 - q^2)(1 + q^2)}{q(1 + q^2)} = \frac{8}{3} \Leftrightarrow \frac{1 - q^2}{q} = \frac{8}{3}$

$$\Leftrightarrow 3q^2 + 8q - 3 = 0 \Leftrightarrow q = \frac{1}{3} \vee q = -3$$

Với $q = \frac{1}{3}$ thay vào (1) được $u_1 = 729$.

Với $q = -3$ thay vào (1) được $u_1 = 1$.

d) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 14 \\ u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 q + u_1 q^2 = 14 \\ u_1 u_1 q u_1 q^2 = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 (1 + q + q^2) = 14 \quad (1) \\ (u_1 q)^3 = 64 \quad (2) \end{cases}$

(2) $\Leftrightarrow u_1 q = 4 \Rightarrow u_1 = \frac{4}{q}$, thay vào (1) được $\frac{4}{q} (1 + q + q^2) = 14$

$$\Leftrightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0 \Leftrightarrow q = 2 \vee q = \frac{1}{2}$$

Với $q = 2 \Rightarrow u_1 = 2$. Với $q = \frac{1}{2} \Rightarrow u_1 = 8$.

e) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 21 \\ \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} = \frac{7}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 q + u_1 q^2 = 21 \\ \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_1 q} + \frac{1}{u_1 q^2} = \frac{7}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 (1 + q + q^2) = 21 \quad (1) \\ \frac{q^2 + q + 1}{u_1 q^2} = \frac{7}{12} \quad (2) \end{cases}$

$$(1) \Rightarrow 1+q+q^2 = \frac{21}{u_1}, \text{ thay vào (2): } \frac{21}{u_1} \cdot \frac{1}{u_1 q^2} = \frac{7}{12} \Leftrightarrow (u_1 q)^2 = 36 \Leftrightarrow u_1 q = \pm 6$$

$$\text{Với } u_1 = \frac{6}{q} \text{ thay vào (1): } \frac{6}{q}(1+q+q^2) = 21 \Leftrightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0 \Leftrightarrow q = 2 \vee q = \frac{1}{2}$$

$$\text{Nếu } q = 2 \Rightarrow u_1 = 3. \text{ Nếu } q = \frac{1}{2} \Rightarrow u_1 = 12$$

$$\text{Với } u_1 = -\frac{6}{q} \text{ thay vào (1): } -\frac{6}{q}(1+q+q^2) = 21 \Leftrightarrow 2q^2 + 9q + 2 = 0 \Leftrightarrow q = \frac{-9 + \sqrt{65}}{4} \vee q = \frac{-9 - \sqrt{65}}{4} \quad (1):$$

$$\text{Nếu } q = \frac{-9 + \sqrt{65}}{4} \Rightarrow u_1 = \frac{27 + 3\sqrt{65}}{2}. \text{ Nếu } q = \frac{-9 - \sqrt{65}}{4} \Rightarrow u_1 = \frac{27 - 3\sqrt{65}}{2}$$

$$f) \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 30 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 340 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 q + u_1 q^2 + u_1 q^3 = 30 \\ u_1^2 + u_1^2 q^2 + u_1^2 q^4 + u_1^2 q^6 = 340 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q+q^2+q^3) = 30 \\ u_1^2(1+q^2+q^4+q^6) = 340 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q)(1+q^2) = 30 \\ u_1^2(1+q^4)(1+q^2) = 340 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1^2(1+q)^2(1+q^2)^2 = 900 & (1) \\ u_1^2(1+q^4)(1+q^2) = 340 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Lấy } \frac{(1)}{(2)} \Leftrightarrow \frac{(1+q)^2(1+q^2)}{1+q^4} = \frac{45}{17}, \text{ quy đồng rút gọn được: } 14q^4 - 17q^3 - 17q^2 - 17q + 14 = 0$$

$$\Leftrightarrow 14q^2 - 17q - 17 - \frac{17}{q} + \frac{14}{q^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 14\left(q^2 + \frac{1}{q^2}\right) - 17\left(q + \frac{1}{q}\right) - 17 = 0 \quad t = q + \frac{1}{q}, \text{ điều kiện } |t| \geq 2$$

$$\Leftrightarrow 14t^2 - 17t - 45 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{2} \vee t = -\frac{9}{7} \text{ (loại).}$$

$$\text{Với } t = \frac{5}{2} \Rightarrow q + \frac{1}{q} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0 \Leftrightarrow q = 2 \vee q = \frac{1}{2}$$

$$\text{Với } q = 2 \Rightarrow u_1 = 2. \text{ Với } q = \frac{1}{2} \Rightarrow u_1 = 16$$

Câu 19. Cho 3 số dương có tổng là 65 lập thành một cấp số nhân tăng, nếu bớt một đơn vị ở số hạng thứ nhất và 19 đơn vị ở số hạng thứ ba ta được một cấp số cộng. Tìm 3 số đó.

Lời giải

Gọi u_1, u_2, u_3 theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

Theo đề: $u_1 - 1; u_3 - 19$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng.

Ta có:
$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 65 \\ u_1 - 1 + u_3 - 19 = 2u_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 65 \\ u_1 - 2u_2 + u_3 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - u_1 \cdot q + u_1 \cdot q^2 = 65 \\ u_1 - 2u_1 \cdot q + u_1 \cdot q^2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1 + q + q^2) = 65 \quad (1) \\ u_1(1 - 2q + q^2) = 20 \quad (2) \end{cases}$$

Lấy
$$\frac{(1)}{(2)} \Leftrightarrow \frac{1 + q + q^2}{1 - 2q + q^2} = \frac{65}{20} = \frac{13}{4} \Leftrightarrow 4(1 + q + q^2) = 13(1 - 2q + q^2)$$

$$\Leftrightarrow 9q^2 - 30q + 9 = 0 \Leftrightarrow q = 3 \vee q = \frac{1}{3}$$

Vì u_1, u_2, u_3 theo thứ tự lập thành cấp số nhân tăng dần nên chọn $q = 3 \Rightarrow u_1 = 5$

Vậy $u_1 = 5; u_2 = 15; u_3 = 45$.

Câu 20. Tìm 3 số hạng liên tiếp của một cấp số nhân biết tổng của chúng là 19 và tích là 216.

Lời giải

Gọi ba số hạng liên tiếp của cấp số nhân là u_1, u_2, u_3 với công bội là q . Theo đề bài ta có hệ phương

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 19 \\ u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 = 216 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 \cdot q + u_1 \cdot q^2 = 19 \\ (u_1 q)^3 = 6^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1 + q + q^2) = 19 \quad (*) \\ u_1 q = 6 \Rightarrow u_1 = \frac{6}{q} \end{cases}$$

trình:

Thay $u_1 = \frac{6}{q}$ vào (*) được: $6q^2 - 13q + 6 = 0 \Leftrightarrow q = \frac{3}{2}$ hoặc $q = \frac{2}{3}$.

Với $q = \frac{3}{2} \Rightarrow u_1 = 4, u_2 = 6, u_3 = 9$

Với $q = \frac{2}{3} \Rightarrow u_1 = 9, u_2 = 6, u_3 = 4$

Câu 21. Tìm công bội của một cấp số nhân có số hạng đầu là 7, số hạng cuối là 448 và tổng số các số hạng là 889.

Lời giải

$$\begin{cases} S_n = 889 \\ u_n = 448 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{u_1(q^n - 1)}{q - 1} = 889 \\ u_1 q^{n-1} = 448 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q^n - u_1 = 889(q - 1) \quad (1) \\ u_1 q^n = 448q \quad (2) \end{cases}$$

Theo đề bài ta có

Thay (2) vào (1) được: $448q - 7 = 889q - 889 \Leftrightarrow q = 2$

Câu 22. Tìm bốn số hạng liên tiếp của một cấp số nhân, trong đó số hạng thứ hai nhỏ hơn số hạng thứ nhất 35, còn số hạng thứ ba lớn hơn số hạng thứ tư 560.

Lời giải

Theo đề bài ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} u_1 - u_2 = 35 \\ u_3 - u_4 = 560 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - u_1 q = 35 \\ u_1 q^2 - u_1 q^3 = 560 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1 - q) = 35 \\ u_1 q^2(1 - q) = 560 \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

Thay (1) vào (2) ta được $q^2 = 16 \Leftrightarrow q = \pm 4$

Với $q = 4$ thay vào (1) được $u_1 = -\frac{35}{3}, u_2 = u_1 q = -\frac{140}{3}, u_3 = -\frac{560}{3}, u_4 = -\frac{2240}{3}$

Tìm 3 số hạng đầu của một cấp số nhân, biết rằng khi tăng số thứ hai thêm 2 thì các số đó tạo thành một cấp số cộng, còn nếu sau đó tăng số cuối thêm 9 thì chúng lại lập thành một cấp số nhân.

Câu 23. Tìm các số dương a và b sao cho a, a + 2b, 2a + b lập thành một cấp số cộng và $(b + 1)^2, ab + 5, (a + 1)^2$ lập thành một cấp số nhân.

Lời giải

Theo tính chất của CSC ta có: $a + (2a + b) = 2(a + 2b) \quad (1)$

Theo tính chất của CSN ta có: $(b + 1)^2(a + 1)^2 = (ab + 5)^2 \quad (2)$

Từ (1) khai triển rút gọn ta được: $a = 3b$, thay vào (2):

$$(b + 1)^2(3b + 1)^2 = (3b^2 + 5)^2 \Leftrightarrow (b + 1)(3b + 1) = \pm(3b^2 + 5)$$

Với $(b + 1)(3b + 1) = 3b^2 + 5 \Leftrightarrow b = 1 \Rightarrow a = 3$

Với $(b + 1)(3b + 1) = -3b^2 - 5 \Leftrightarrow 6b^2 + 4b + 6 = 0$ (vô nghiệm).

Kết luận $a = 3, b = 1$

Câu 24. Tính các tổng sau:

a). $S_n = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n$

b). $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n}$

c). $S_n = \left(3 + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(9 + \frac{1}{9}\right)^2 + \dots + \left(3^n + \frac{1}{3^n}\right)^2$

d). $S_n = 6 + 66 + 666 + \dots + \underbrace{666\dots 6}_{n \text{ số } 6}$

Lời giải

a). Ta có dãy số $2, 2^2, 2^3, \dots, 2^n$ là một cấp số nhân với n số hạng, có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công

bội $q = \frac{2^2}{2} = 2$. Do đó $S_n = u_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = 2 \cdot \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = 2(2^n - 1)$

b). Ta có dãy số $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots, \frac{1}{2^n}$ là một cấp số nhân với n số hạng, có số hạng đầu $u_1 = \frac{1}{2}$ và

công bội $q = \frac{\frac{1}{2^2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$. Do đó $S_n = u_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}$

$$\begin{aligned}
 c). \quad S_n &= \left(3 + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(9 + \frac{1}{9}\right)^2 + \dots + \left(3^n + \frac{1}{3^n}\right)^2 \\
 &= 3^2 + 2 + \frac{1}{3^2} + 3^4 + 2 + \frac{1}{3^4} + \dots + 3^{2n} + 2 + \frac{1}{3^{2n}} \\
 &= (3^2 + 3^4 + \dots + 3^{2n}) + \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2n}}\right) + \underbrace{2 + 2 + \dots + 2}_n
 \end{aligned}$$

• Có dãy số $3^2, 3^4, \dots, 3^{2n}$ là cấp số nhân với n số hạng, có số hạng đầu $u_1 = 3^2$ và công bội $q = \frac{3^4}{3^2} = 9$. Do đó $S_1 = u_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = 9 \cdot \frac{1 - 9^n}{1 - 9} = \frac{9}{8}(9^n - 1)$

• Có dãy số $\frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^4}, \dots, \frac{1}{3^{2n}}$ là cấp số nhân với n số hạng, có số hạng đầu $u_1 = \frac{1}{3^2}$ và công bội $q = \frac{1}{9}$. Do đó $S_1 = u_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1 - \frac{1}{9^n}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{1}{8} \left(1 - \frac{1}{9^n}\right) = \frac{9^n - 1}{8 \cdot 9^n}$

$$\text{Vậy } S_n = \frac{9}{8}(9^n - 1) + \frac{9^n - 1}{8 \cdot 9^n} + 2n = \frac{(9^n - 1)(9^{n+1} + 1)}{8 \cdot 9^n} + 2n$$

$$\begin{aligned}
 d). \quad S_n &= 6 + 66 + 666 + \dots + \underbrace{666\dots6}_{n \text{ số } 6} = \frac{6}{9} \left(9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{999\dots9}_n \right) \\
 &= \frac{2}{3} \left[(10 - 1) + (100 - 1) + (1000 - 1) + \dots + (10^n - 1) \right] \\
 &= \frac{2}{3} \left[10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^n - n \right] = \frac{2}{3} \left[10 \cdot \frac{10^n - 1}{10 - 1} - n \right] = \frac{20}{27} (10^n - 1) - \frac{2n}{3}
 \end{aligned}$$

$$B = 7 + 77 + 777 + \dots + \underbrace{777\dots7}_n$$

Câu 25. Tính tổng

Lời giải

$$B = 7 + 77 + 777 + \dots + \underbrace{777\dots7}_n$$

$$\Leftrightarrow B = 7 \left(1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{111\dots1}_n \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{B}{7} = 1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{111\dots1}_n$$

$$\Leftrightarrow \frac{9B}{7} = 9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{999\dots9}_n$$

$$\Leftrightarrow \frac{9B}{7} = (10 - 1) + (10^2 - 1) + (10^3 - 1) + \dots + (10^n - 1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{9B}{7} = (10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^n) - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{1}{10^{n-1}} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{9B}{7} = \frac{10(1 - 10^n)}{1 - 10} - n$$

$$\Leftrightarrow \frac{9B}{7} = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{9}$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{7(10^{n+1} - 9n - 10)}{81}$$

DẠNG 3. BÀI TOÁN THỰC TẾ

Câu 26. Ruộng bậc thang là một hình thức canh tác có nhiều ở khu vực Tây Bắc và Đông Bắc Việt Nam. Hình ảnh ruộng bậc thang thể hiện nét đẹp văn hoá, là công trình nghệ thuật độc đáo của đồng bào vùng cao phía Bắc. Ruộng bậc thang ở một số nơi đã trở thành những địa chỉ tham quan du lịch đầy hấp dẫn của du khách trong nước và quốc tế.



Một ruộng bậc thang có thửa thấp nhất nằm ở độ cao $1250m$ so với mực nước biển, độ chênh lệch giữa thửa trên và thửa dưới trung bình là $1,2m$.

Hỏi thửa ruộng ở bậc thứ 10 có độ cao là bao nhiêu so với mực nước biển?

Lời giải

Ta có thửa ruộng thấp nhất có độ cao $u_1 = 1250m$ so với mực nước biển.

Thửa ruộng ở bậc thứ hai cao hơn so với mực nước biển là: $u_2 = 1250 + 1,2 (m)$.

Thửa ruộng ở bậc thứ ba cao hơn so với mực nước biển là: $u_3 = 1250 + 1,2 + 1,2 = 1250 + 2.1,2 (m)$.

Thửa ruộng ở bậc thứ 10 cao hơn so với mực nước biển là: $u_{10} = 1250 + 9.1,2 = 1260,8(m)$

Câu 27. Chiều cao (đơn vị: centimét) của một đứa trẻ n tuổi phát triển bình thường được cho bởi công thức: $x_n = 75 + 5(n - 1)$.
(Nguồn: <https://bibabo.vn>)

a) Một đứa trẻ phát triển bình thường có chiều cao năm 3 tuổi là bao nhiêu centimét?

b) Dãy số (x_n) có là một cấp số cộng không? Trung bình một năm, chiều cao mỗi đứa trẻ phát triển bình thường tăng lên bao nhiêu centimét?

Lời giải

a) Chiều cao 3 năm tuổi của một đứa trẻ phát triển bình thường là: $x_3 = 75 + 5(3 - 1) = 85(cm)$

b) Ta có: $x_{n+1} = 75 + 5(n+1 - 1) = 75 + 5n$

Xét hiệu $x_{n+1} - x_n = 75 + 5n - [75 + 5(n-1)] = 5$

Do đó (x_n) là một cấp số cộng có số hạng đầu $x_1 = 75$ và công sai $d = 5$

Câu 28. Khi kí kết hợp đồng lao động với người lao động, một doanh nghiệp đề xuất hai phương án trả lương như sau:

Phương án 1: Năm thứ nhất, tiền lương là 120 triệu. Kể từ năm thứ hai trở đi, mỗi năm tiền lương được tăng 18 triệu.

Phương án 2: Quý thứ nhất, tiền lương là 24 triệu. Kể từ quý thứ hai trở đi, mỗi quý tiền lương được tăng 1,8 triệu.

Nếu là người được tuyển dụng vào doanh nghiệp trên, em sẽ chọn phương án nào khi:

a) Kí hợp đồng lao động 3 năm?

b) Kí hợp đồng lao động 10 năm?

Lời giải

+) Theo phương án 1: Gọi (u_n) là dãy số tiền lương của người lao động theo phương án 1 qua mỗi năm. Dãy số (u_n) lập thành một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 120$ và công sai $d = 18$.

Khi đó số hạng tổng quát của cấp số nhân là: $u_n = 120 + (n-1) \cdot 18$.

+) Theo phương án 2: Gọi (v_n) là dãy số tiền lương của người lao động theo phương án 2 qua từng quý. Dãy số (v_n) lập thành một cấp số cộng có số hạng đầu $v_1 = 24$ và công sai $d = 1,8$.

Khi đó số hạng tổng quát của cấp số nhân là $v_n = 24 + (n-1) \cdot 1,8$.

a) Khi kí hợp đồng 3 năm tương đương với 12 quý ta có:

+) Theo phương án 1: $u_3 = 120 + (3-1) \cdot 18 = 156$ (triệu đồng)

Tổng số tiền lương nhận được sau 3 năm là:

$$S_3 = \frac{3 \cdot (120 + 156)}{2} = 414 \text{ (triệu đồng)}.$$

+) Theo phương án 2: $u_{12} = 24 + (12-1) \cdot 1,8 = 43,8$.

Tổng số tiền lương nhận được sau 3 năm tương ứng với 12 quý là:

$$S_{12} = \frac{12 \cdot (24 + 43,8)}{2} = 406,8 \text{ (triệu đồng)}.$$

Vậy nếu được tuyển dụng vào doanh nghiệp và kí hợp đồng lao động 3 năm thì nên theo phương án 1.

b) Khi kí hợp đồng 10 năm tương đương với 40 quý ta có:

+) Theo phương án 1: $u_{10} = 120 + (10-1) \cdot 18 = 282$ (triệu đồng)

Tổng số tiền lương nhận được sau 10 năm là:

$$S_{10} = \frac{10 \cdot (120 + 282)}{2} = 2010 \quad (\text{triệu đồng}).$$

+) Theo phương án 2: $u_{40} = 24 + (40 - 1) \cdot 1,8 = 94,2$

Tổng số tiền lương nhận được sau 10 năm tương ứng với 40 quý là:

$$S_{12} = \frac{40 \cdot (24 + 94,2)}{2} = 2364 \quad (\text{triệu đồng}).$$

Vậy nếu được tuyển dụng vào doanh nghiệp và kí hợp đồng lao động 10 năm thì nên theo phương án 2.

Câu 29. Một rạp hát có 20 hàng ghế. Tính từ sân khấu, số lượng ghế của các hàng tăng dần như trong hình minh họa dưới đây.



Bạn hãy đếm và nêu nhận xét về số ghế của năm hàng đầu tiên.

Làm thế nào để biết được số ghế của một hàng bất kì và tính được tổng số ghế có trong rạp hát đó?

Lời giải

Số ghế của 5 hàng đầu tiên là: $u_1 = 14; u_2 = 17; u_3 = 20; u_4 = 23; u_5 = 26$

Số ghế hàng sau hơn số ghế hàng liền trước là 3 ghế

Số ghế của một hàng bất kì là: $u_n = 14 + 3n$

Tổng số ghế trong rạp là: $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$

Câu 30. Một rạp hát có 20 hàng ghế xếp theo hình quạt. Hàng thứ nhất có 17 ghế, hàng thứ hai có 20 ghế, hàng thứ ba có 23 ghế,... cứ thế tiếp tục cho đến hàng cuối cùng (Hình 4).



Hình 4

a) Tính số ghế có ở hàng cuối cùng.

b) Tính tổng số ghế có trong rạp.

Lời giải

Ta có: $u_1 = 17; u_2 = 20; u_3 = 23$

Suy ra $d = 3$ và $u_n = 17 + (n - 1) \cdot 3 = 3n + 14$

a) $u_{20} = 3 \cdot 20 + 14 = 74$

b) $S_{20} = \frac{20(17 + 74)}{2} = 910$

Câu 31. Một người muốn mua một thanh gỗ đủ để cắt ra làm các thanh ngang của một cái thang. Biết rằng chiều dài các thanh ngang của cái thang đó (từ bậc dưới cùng) lần lượt là $45\text{ cm}, 43\text{ cm}, 41\text{ cm}, \dots, 31\text{ cm}$.



Hình 5

a) Cái thang đó có bao nhiêu bậc?

b) Tính chiều dài thanh gỗ mà người đó cần mua, giả sử chiều dài các mối nối (phần gỗ bị cắt thành mùn cưa) là không đáng kể.

Lời giải

a) Chiều dài các thanh ngang là dãy cấp số cộng có số hạng đầu là 45 , công sai là -2

$$u_n = 45 - 2(n - 1) = 47 - 2n$$

Khi $u_n = 31 \Leftrightarrow n = 8$

Vậy cái thang có 8 bậc

b) $S_8 = \frac{8 \cdot (45 + 31)}{2} = 304$

Vậy chiều dài thanh gỗ là 304 cm

Câu 32. Khi một vận động viên nhảy dù nhảy ra khỏi máy bay, giả sử quãng đường người ấy rơi tự do (tính theo feet) trong mỗi giây liên tiếp theo thứ tự trước khi bung dù lần lượt là: $16; 48; 80; 112; 144; \dots$ (các quãng đường này tạo thành cấp số cộng).

a) Tính công sai của cấp số cộng trên.

b) Tính tổng chiều dài quãng đường rơi tự do của người đó trong 10 giây đầu tiên.

Lời giải

a) Công sai của cấp số cộng trên là: $d = 32$

b) $S_{10} = \frac{10 [2 \cdot 16 + (10 - 1) \cdot 32]}{2} = 1600$

Vậy tổng chiều dài quãng đường rơi tự do của người đó trong 10 giây đầu tiên là 1600 feet

Câu 33. Một cầu thang bằng gạch có tổng cộng 30 bậc. Bậc dưới cùng cần 100 viên gạch. Mỗi bậc tiếp theo cần ít hơn hai viên gạch so với bậc ngay trước nó.

a) Cần bao nhiêu viên gạch cho bậc trên cùng?

b) Cần bao nhiêu viên gạch để xây cầu thang?

Lời giải

Công thức của cấp số cộng biểu thị số viên gạch cho mỗi bậc cầu thang như sau:

$$u_1 = 100, u_{n+1} = u_n + (-2), \forall n \geq 1.$$

a) Ta tính $u_{30} = u_1 + (30 - 1)(-2) = 42$.

b) Ta tính $S_{30} = u_1 + u_2 + \dots + u_{30} = \frac{30}{2} [2 \cdot 100 + (30 - 1)(-2)] = 2130$.

Như vậy, ta cần 2130 viên gạch để xây cầu thang.

Câu 34. Bác Hưng quyết định tham gia một chương trình bơi lội để duy trì sức khỏe. Bác bắt đầu bằng cách bơi 10 phút vào ngày đầu tiên, sau đó thêm 2 phút mỗi ngày sau đó.

a) Tìm công thức truy hồi cho số phút T_n mà bác ấy bơi vào ngày thứ n của chương trình.

b) Tìm sáu số hạng đầu của dãy số T_n .

c) Tìm công thức tổng quát của dãy số (T_n) .

d) Bác Hưng đạt được mục tiêu bơi ít nhất 60 phút mỗi ngày vào ngày thứ bao nhiêu của chương trình?

e) Tính tổng thời gian bác Hưng bơi sau 30 ngày đầu của chương trình.

Lời giải

Gọi T_n là số phút mà bác Hưng bơi vào ngày thứ n của chương trình.

a) Do bác bắt đầu bằng cách bơi 10 phút vào ngày đầu tiên, sau đó thêm 2 phút mỗi ngày sau đó nên ta có hệ thức truy hồi sau $T_1 = 10, T_{n+1} = T_n + 2 \forall n \geq 1$.

b) Sáu số hạng đầu của dãy số là

$$T_1 = 10; T_2 = 12; T_3 = 14; T_4 = 16; T_5 = 18; T_6 = 20.$$

c) Theo định nghĩa dãy số T_n là cấp số cộng có $T_1 = 10$ và công sai $d = 2$.

Suy ra, công thức tổng quát của dãy số là $T_n = T_1 + (n - 1)d = 8 + 2n \quad \forall n \geq 1$.

d) Ta có $T_n \geq 60 \Leftrightarrow 8 + 2n \geq 60 \Leftrightarrow n \geq 26$.

Vậy bác Hưng đạt được mục tiêu bơi ít nhất 60 phút mỗi ngày vào ngày thứ 26 của chương trình.

e) Tổng thời gian bác Hưng bơi trong 30 ngày đầu của chương trình là

$$S_{30} = \frac{[2T_1 + (30 - 1)d] \cdot 30}{2} = 1170 (\text{phút}).$$

Câu 35. Khi kí kết hợp đồng lao động với người lao động, một doanh nghiệp đề xuất hai phương án trả lương như sau:

Phương án 1: Năm thứ nhất, tiền lương là 120 triệu đồng. Kể từ năm thứ hai trở đi, mỗi năm tiền lương được tăng 18 triệu đồng.

Phương án 2: Quý thứ nhất, tiền lương là 24 triệu đồng. Kể từ quý thứ hai trở đi, mỗi quý tiền lương được tăng 1,8 triệu đồng.

Nếu là người được tuyển dụng vào doanh nghiệp trên, em nên chọn phương án nào khi:

a) Kí hợp đồng lao động 3 năm?

b) Kí hợp đồng lao động 10 năm?

Lời giải

Ở phương án trả lương thứ nhất, số tiền lương mỗi năm người lao động nhận được lập thành cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 120$, công sai $d = 18$.

Ở phương án trả lương thứ hai, số tiền lương mỗi quý người lao động nhận được lập thành cấp số cộng (v_n) có số hạng đầu $v_1 = 24$, công sai $d' = 1,8$.

a) Nếu kí hợp đồng lao động 3 năm thì:

Tổng số tiền lương người lao động nhận được trong 3 năm ở phương án 1 là tổng 3 số hạng đầu của cấp số cộng và bằng:

$$S_3 = \frac{(2u_1 + 2d) \cdot 3}{2} = 3u_1 + 3d = 3 \cdot 120 + 3 \cdot 18 = 414 \quad (\text{triệu đồng}).$$

Do 1 năm có 4 quý nên tổng số tiền lương người lao động nhận được trong 3 năm ở phương án 2 là tổng 12 số hạng đầu của cấp số cộng và bằng:

$$S'_{12} = \frac{(2v_1 + 11d') \cdot 12}{2} = 12v_1 + 66d' = 12 \cdot 24 + 66 \cdot 1,8 = 406,8 \quad (\text{triệu đồng}).$$

Vậy nếu kí hợp đồng lao động 3 năm thì em nên chọn phương án 1.

b) Nếu kí hợp đồng lao động 10 năm thì:

Tổng số tiền lương người lao động nhận được trong 10 năm ở phương án 1 bằng:

$$S_{10} = \frac{(2u_1 + 9d) \cdot 10}{2} = 10u_1 + 45d = 10 \cdot 120 + 45 \cdot 18 = 2010 \quad (\text{triệu đồng}).$$

Tổng số tiền lương người lao động nhận được trong 10 năm ở phương án 2 bằng:

$$S'_{40} = \frac{(2v_1 + 39d') \cdot 40}{2} = 40v_1 + 780d' = 40 \cdot 24 + 780 \cdot 1,8 = 2364 \quad (\text{triệu đồng}).$$

Vậy nếu kí hợp đồng lao động 10 năm thì em nên chọn phương án 2.

Câu 36. Mặt sàn tầng một (tầng trệt) của một ngôi nhà cao hơn mặt sân $0,5m$. Cầu thang đi từ tầng một lên tầng hai gồm 25 bậc, mỗi bậc cao $16cm$.

a) Viết công thức để tìm độ cao của bậc cầu thang thứ n so với mặt sân.

b) Tính độ cao của sàn tầng hai so với mặt sân.

Lời giải

a) Mỗi bậc thang cao $16\text{cm} = 0,16\text{m}$.

$\Rightarrow n$ bậc thang cao $0,16n(\text{m})$

Vì mặt bằng sàn cao hơn mặt sân $0,5\text{m}$ nên công thức tính độ cao của bậc n so với mặt sân sẽ là:
 $h_n = (0,5 + 0,16n)(\text{m})$

b) Độ cao của sàn tầng hai so với mặt sân ứng với $n = 25$ là: $h_{25} = 0,5 + 0,16 \cdot 25 = 4,5(\text{m})$

Câu 37. Dân số trung bình của Việt Nam năm 2020 là 97,6 triệu người, tỉ lệ tăng dân số là $1,14\%$ /năm. (Nguồn: Niên giám thống kê của Việt Nam năm 2020, NXB Thống kê, 2021)

Giả sử tỉ lệ tăng dân số không đổi qua các năm.

a) Sau 1 năm, dân số của Việt Nam sẽ là bao nhiêu triệu người (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

b) Viết công thức tính dân số Việt Nam sau n năm kể từ năm 2020.

Lời giải

a) Sau 1 năm, dân số của Việt Nam sẽ là: $u_1 = 97,6 + 97,6 \cdot 0,0114 = 97,6 \cdot (1 + 0,0114) = 97,6 \cdot 1,0114 \approx 98,7$ (triệu người).

b) Gọi u_n là dân số của Việt Nam sau n năm.

$$\begin{aligned} u_n &= u_{n-1} + u_{n-1} \cdot 0,0114 = u_{n-1} \cdot (1 + 0,0114) \\ &= u_{n-1} \cdot 1,0114, \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Do tỉ lệ tăng dân số hàng năm là $1,14\%$ nên ta có:

Do đó, (u_n) là cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 97,6 \cdot 1,0114$, công bội $q = 1,0114$.

Vậy dân số của Việt Nam sau n năm kể từ năm 2020 là:
 $u_n = 97,6 \cdot 1,0114 \cdot 1,0114^{n-1} = 97,6 \cdot 1,0114^n$ (triệu người).

Câu 38. Một tỉnh có 2 triệu dân vào năm 2020 với tỉ lệ tăng dân số là 1% /năm. Gọi u_n là số dân của tỉnh đó sau n năm. Giả sử tỉ lệ tăng dân số là không đổi.

a) Viết công thức tính số dân của tỉnh đó sau n năm kể từ năm 2020.

b) Tính số dân của tỉnh đó sau 10 năm kể từ năm 2020.

Lời giải

a) Ta có dãy (u_n) lập thành một cấp số nhân có số hạng đầu là $u_0 = 2$ triệu dân và công sai $q = 1\%$. Khi đó số hạng tổng quát của $u_n = 2 \cdot (1 + 1\%)^{n-1}$ (triệu dân).

b) Số dân của tỉnh đó sau 10 năm kể từ năm 2020 là:

$$u_{10} = 2 \cdot (1 + 1\%)^{10-1} \approx 2,19 \text{ (triệu dân)}.$$

Câu 39. Một gia đình mua một chiếc ô tô giá 800 triệu đồng. Trung bình sau mỗi năm sử dụng, giá trị còn lại của ô tô giảm đi 4% (so với năm trước đó).

- a) Viết công thức tính giá trị của ô tô sau 1 năm, 2 năm sử dụng.
b) Viết công thức tính giá trị của ô tô sau n năm sử dụng.
c) Sau 10 năm, giá trị của ô tô ước tính còn bao nhiêu triệu đồng?

Lời giải

- a) Sau 1 năm giá trị của ô tô còn lại là:

$$u_1 = 800 - 800 \cdot 4\% = 800 \cdot (1 - 4\%) = 768 \text{ (triệu đồng)}.$$

Sau 2 năm giá trị của ô tô còn lại là:

$$u_2 = 800 \cdot (1 - 4\%) - 800 \cdot (1 - 4\%) \cdot 4\% = 800 \cdot (1 - 4\%)^2 = 737,28 \text{ (triệu đồng)}.$$

- b) Gọi (u_n) là giá trị của ô tô sau n năm sử dụng.

Dãy số (u_n) tạo thành một cấp số nhân với số hạng đầu là giá trị đầu của ô tô là $u_0 = 800$ triệu đồng và công bội $q = 1 - 4\%$.

Khi đó công thức tổng quát để tính $u_n = 800 \cdot (1 - 4\%)^n$.

- c) Sau 10 năm sử dụng giá trị của ô tô còn lại là:

$$u_{10} = 800 \cdot (1 - 4\%)^{10} \approx 531,87 \text{ (triệu đồng)}.$$

Câu 40. Chu kì bán rã của nguyên tố phóng xạ poloni 210 là 138 ngày, nghĩa là sau 138 ngày, khối lượng của nguyên tố đó chỉ còn một nửa (theo: <https://vi.wikipedia.org/wiki/Poloni-210>). Tính khối lượng còn lại của 20 gam poloni 210 sau:

- a) 690 ngày;
b) 7314 ngày (khoảng 20 năm).

Lời giải

- a) Sau $690 = 138 \cdot 5$ ngày, tức là sau 5 chu kì bán rã, khối lượng nguyên tố Poloni còn lại là:

$$20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 1,25 \text{ (gam)}$$

- b) Sau $7314 = 138 \cdot 53$ ngày, tức là sau 53 chu kì bán rã, khối lượng nguyên tố Poloni còn lại là:

$$20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{53} = 4,44 \cdot 10^{-15} \text{ (gam)}$$

Câu 41. Giả sử một thành phố có dân số năm 2022 là khoảng 2,1 triệu người và tốc độ gia tăng dân số trung bình mỗi năm là $0,75\%$.

- a) Dự đoán dân số của thành phố đó vào năm 2032.
b) Nếu tốc độ gia tăng dân số vẫn giữ nguyên như trên thì ước tính vào năm nào dân số của thành phố đó sẽ tăng gấp đôi so với năm 2022 ?

Lời giải

Dân số của thành phố từ năm 2022 lần lượt tạo thành cấp số nhân có công bội là $1 + 0,0075 = 1,0075$

Dân số của thành phố vào năm n là: $u_n = 2,1.1,0075^{n-2022}$

a) $u_{2032} = 2,1.1,0075^{2032-2022} = 2,26$

b) Khi $u_n = 2.u_{2022} \Leftrightarrow 1,0075^{n-2022} = 2 \Leftrightarrow n = 2115$

Vậy đến năm 2115, dân số thành phố gấp đôi so với năm 2022

- Câu 42.** Trong trò chơi mạo hiểm nhảy bungee, mỗi lần nhảy, người chơi sẽ được dây an toàn có tính đàn hồi kéo nảy ngược lên 60% chiều sâu của cú nhảy. Một người chơi bungee thực hiện cú nhảy đầu tiên có độ cao nảy ngược lên là 9m.



(Hình 3)

- a) Tính độ cao nảy ngược lên của người đó ở lần nảy thứ ba.
b) Tính tổng các độ cao nảy ngược lên của người đó trong 5 lần nảy đầu.

Lời giải

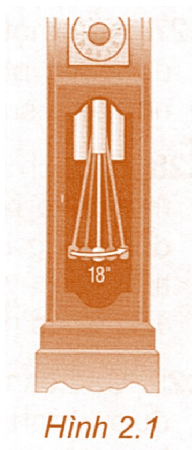
Độ cao nảy ngược lên của người đó ở lần nảy thứ nhất là $u_1 = 9$

Độ cao các lần nảy lần lượt tạo thành cấp số nhân có công bội là $q = 0,6; u_n = 9.0,6^{n-1}$

a) $u_3 = 9.0,6^{3-1} = 3,24$

b) $S_5 = \frac{9 \cdot [1 - 0,6^5]}{1 - 0,6} = 11,528$

- Câu 43.** Ban đầu, một quả lắc đồng hồ dao động theo một cung tròn dài 46cm (H. 2.1).



Hình 2.1

Sau mỗi lần đu liên tiếp, độ dài của cung tròn bằng 0,98 độ dài cung tròn ở ngay lần trước đó.

- a)** Độ dài của cung tròn ở lần thứ 10 là bao nhiêu?
- b)** Sau 15 lần dao động, quả lắc sẽ đi được quãng đường tổng cộng là bao nhiêu?
- (Kết quả tính theo centimét và làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải

Gọi u_n là độ dài cung tròn ở lần thứ n khi con lắc dao động. Do lần một, quả lắc đồng hồ dao động theo một cung tròn dài 46 cm , sau mỗi lần dao động liên tiếp, độ dài của cung tròn bằng 0,98 độ dài cung tròn ở ngay lần trước đó nên dãy số (u_n) lập thành cấp số nhân có $u_1 = 46$ và công bội $q = 0,98$.

- a)** Độ dài của cung tròn ở lần thứ 10 là $u_{10} = u_1 q^9 = 46 \cdot 0,98^9 \approx 38,35(\text{ cm})$.

- b)** Sau 15 lần dao động, quả lắc sẽ đi được quãng đường tổng cộng là

$$S_{15} = u_1 \frac{1 - q^{15}}{1 - q} = 46 \cdot \frac{1 - 0,98^{15}}{1 - 0,98} \approx 601,29(\text{ cm}).$$

Câu 44. Một công ty mua một chiếc máy với giá 1 tỉ 200 triệu đồng. Công ty nhận thấy, trong vòng 5 năm đầu, tốc độ khấu hao là $25\%/ \text{ năm}$ (tức là sau mỗi một năm, giá trị còn lại của chiếc máy bằng 75% giá trị của năm trước đó).

- a)** Viết công thức tính giá trị của chiếc máy đó sau 1 năm, 2 năm.
- b)** Sau 5 năm, giá trị của chiếc máy đó còn khoảng bao nhiêu triệu đồng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

- a)** Giá trị của máy sau 1 năm, 2 năm lần lượt là:

$$1200 \cdot 0,75 = 900 \text{ (triệu đồng); } 1200 \cdot 0,75^2 = 675 \text{ (triệu đồng).}$$

- b)** Sau 5 năm, giá trị chiếc máy đó còn là: $1200 \cdot 0,75^5 \approx 285$ (triệu đồng).