# **CHƯƠNG VIII. QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN. PHÉP CHIẾU VUÔNG GÓC**

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu những vấn đề sau: hai đường thẳng vuông góc; đường thẳng vuông góc với mặt phẳng; góc giữa đường thẳng và mặt phẳng; góc nhị diện; hai mặt phẳng vuông góc; khoảng cách trong không gian; một số hình khối trong không gian.

# **BÀI 1. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC**

Trong *Hình 1*, hai đường thẳng  gợi lên hình ảnh hai đường thẳng vuông góc trong không gian.



Trong không gian, thế nào là hai đường thẳng vuông góc với nhau ?

## **A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM**

**I. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN**

**Hoạt động 1.** Trong không gian cho 2 đường thẳng 

a) Nếu  cắt  nhau tại điểm  (*Hình 2*) thì góc giữa hai

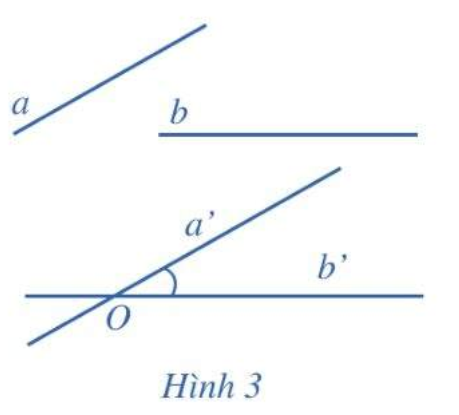
đường thẳng  xác định như thế nào?

b) Nếu  thì góc giữa hai đường thẳng  bằng bao nhiêu độ?

c) Nếu  trùng nhau thì góc giữa hai đường thẳng  bằng bao nhiêu độ?

Dựa trên góc giữa hai đường thẳng trong mặt phẳng, ta có thể định nghĩa góc giữa hai đường thẳng trong không gian như sau:

Góc giữa hai đường thẳng và trong không gian là góc giữa hai đường thẳng và cùng đi qua điểm và lần lượt song song ( hoặc trùng) với và . Kí hiệu hoặc .



**Nhận xét:**

* Góc giữa hai đường thẳng  không phụ thuộc vào vị trí điểm  (*Hình 3*). Thông thường, khi ta tìm góc giữa hai đường thẳng , ta chọn  thuộc  hoặc chọn  thuộc .
* Góc giữa hai đường thẳng  bằng góc giữa hai đường thẳng  tức là .
* Góc giữa hai đường thẳng không vượt quá .
* Nếu  thì  với mọi đường thẳng  trong không gian.

**Ví dụ 1:** Cho hình hộp có góc giữa hai đường thẳng  và bằng (*Hình 4*).

a) Góc giữa hai đường thẳng  và bằng góc giữa hai đường thẳng:

A.  và  B. và

C.  và D.  và

b) Tìm góc giữa hai đường thẳng  và.

**Luyện tập 1.** Cho tứ diện có lần lượt là trung điểm của . Biết tam giác đều. Tính góc giữa hai đường thẳng và .

**II. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN**

**Hoạt động 2.** Trong *Hình 1* ở phần mở đầu, hai đường thẳnggợi lên hình ảnh hai đường thẳng vuông góc. Góc giữavàbằng bao nhiêu độ?

Hai đường thẳng được gọi là *vuông góc* với nhau khi giữa chúng bằng .

Khi hai đường thẳngvàvuông góc với nhau, ta kí hiệu .

**Nhận xét:** Nếu một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì nó vuông góc với đường thẳng còn lại.

**Ví dụ 2.** Cho hình chóp  có đáy  là hình thoi. Gọi  lần lượt là trung điểm của các cạnh  và  (Hình 5). Chứng minh rằng .

**Luyện tập 2.** Cho hình lăng trụ có là trực tâm của tam giác . Chứng minh rằng .

## **Dạng 1. Tính góc giữa hai đường thẳngHu**

### **1. Phương pháp**

* Lấy điểm O tùy ý ( ta có thể lấy điểm O thuộc một trong hai đường thẳng), qua đó vẽ các đường thẳng lần lượt song song (hoặc trùng) với hai đường thẳng đã cho.
* Tính một góc trong các góc được tạo bởi giữa hai đường thẳng cắt nhau tại O.
* Nếu góc đó nhọn thì đó là góc cần tìm, nếu góc đó tù thì góc cần tính là góc bù với góc đã tính.

### **2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng**

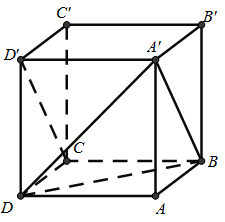
**Ví dụ 1:** Cho tứ diện đều ABCD. Gọi I là trung điểm của BC. Tính côsin của góc tạo bởi hai đường thẳng DI và AB.

**Lời giải**

|  |  |
| --- | --- |
| Đặt cạnh của tứ diện có độ dài là  Gọi J là trung điểm của AC.  Ta có:  Kẻ  Ta có: |  |

**Ví dụ 2:** Cho hình lập phương ABCD.A’B’C’D’. Xác định Góc tạo bởi hai đường thẳng BD và CD’.

**Lời giải**

****

Do  nên góc giữa BD và CD’ là góc giữa BD và BA’

Mà  là tam giác đều nên góc giữa BD và BA’ là 

Vậy góc giữa BD và CD’ là 

**Ví dụ 3:** Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và AD. Cho biết  và . Xác định góc tạo bởi hai đường thẳng AB và CD

**Lời giải**

Gọi I là trung điểm của AC ta có: 

****Áp dụng định lí côsin trong :



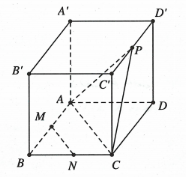


Suy ra: 

Vậy: 

**Ví dụ 4.** Cho hình lập phương cạnh . Gọi  lần lượt là trung điểm các cạnh . Xác định góc giữa hai đường thẳng và .

**Lời giải**



Dễ thấy là đường trung bình trong tam giác  nên .

Lại có 

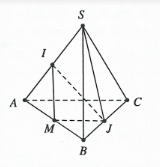


Do đó 

.

**Ví dụ 5.** Cho hình chóp  có tất cả các cạnh đều bằng . Gọi lần lượt là trung điểm của . Tính số đo của góc hợp bởi  và .

***Lời giải***



Gọi là trung điểm  thì lần lượt là đường trung bình của tam giác và .

Ta có: 

Mặt khác tam giác cân tại 

Khi đó  nên tam giác vuông cân tại 

## **Dạng 2. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc trong không gian**

### **1. Phương pháp**

**Cách 1:** Dùng định nghĩa: 

**Cách 2**: Dùng định lí: 

### **2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng**

**Ví dụ 1.** Cho hình chóp  có , . Chứng minh  vuông góc với .

**Lời giải**

A drawing of a pyramid

Description automatically generated with low confidence

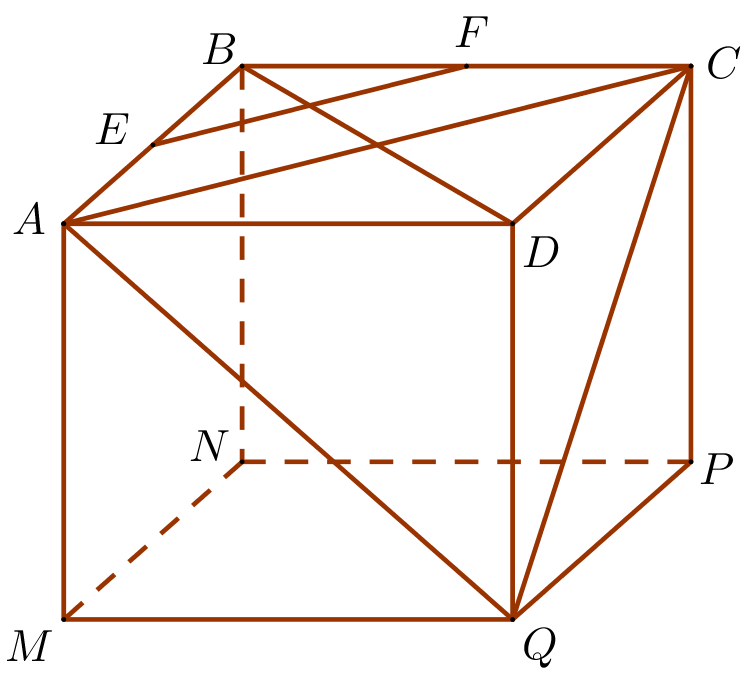
Vì ,  nên , suy ra , nên hai tam giác  và  là tam giác cân. Gọi  là trung điểm , ta có  nên  

Vậy 

**Ví dụ 2.** Cho hình hộp  có sáu mặt đều là các hình vuông. Gọi ,  lần lượt là trung điểm của  và .

1. Chứng minh: , .
2. Tính góc giữa  và .

**Lời giải**



1. Chứng minh: , .

Ta thấy:  là đường trung bình của 

.

Mà:  nên 

1. Tính góc giữa  và .

Ta có: .

Nhận thấy: .

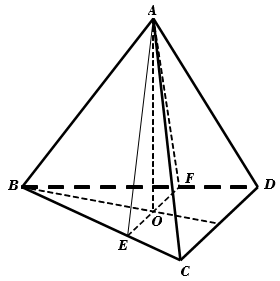
 đều .

.

**Ví dụ 3:** Cho hình chóp  có  và .

Chứng minh rằng ,  và .

**Lời giải**

* Qua  vẽ đường thẳng song song với  cắt  tại  và cắt  tại .
* Ta cần chứng minh . Ta có .
* Vì  nên  là tam giác đều nên  và . 
* Xét hai tam giác  và , ta có

 nên . Suy ra . 

* Từ  và , suy ra tam giác  cân tại  có  là trung tuyến

nên cũng là đường cao.

* Do đó . Vậy .

## **B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP**

## **Dạng 1. Tính góc giữa hai đường thẳngHu**

### **1. Phương pháp**

* Lấy điểm O tùy ý ( ta có thể lấy điểm O thuộc một trong hai đường thẳng), qua đó vẽ các đường thẳng lần lượt song song (hoặc trùng) với hai đường thẳng đã cho.
* Tính một góc trong các góc được tạo bởi giữa hai đường thẳng cắt nhau tại O.
* Nếu góc đó nhọn thì đó là góc cần tìm, nếu góc đó tù thì góc cần tính là góc bù với góc đã tính.

### **2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng**

**Ví dụ 1:** Cho tứ diện đều ABCD. Gọi I là trung điểm của BC. Tính côsin của góc tạo bởi hai đường thẳng DI và AB.

** Lời giải**

**Ví dụ 2:** Cho hình lập phương ABCD.A’B’C’D’. Xác định Góc tạo bởi hai đường thẳng BD và CD’.

** Lời giải**

**Ví dụ 3:** Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và AD. Cho biết  và . Xác định góc tạo bởi hai đường thẳng AB và CD

** Lời giải**

**Ví dụ 4.** Cho hình lập phương cạnh . Gọi  lần lượt là trung điểm các cạnh . Xác định góc giữa hai đường thẳng và .

** Lời giải**

**Ví dụ 5.** Cho hình chóp  có tất cả các cạnh đều bằng . Gọi lần lượt là trung điểm của . Tính số đo của góc hợp bởi  và .

** Lời giải**

## **Dạng 2. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc trong không gian**

### **1. Phương pháp**

**Cách 1:** Dùng định nghĩa: 

**Cách 2**: Dùng định lí: 

### **2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng**

**Ví dụ 1.** Cho hình chóp  có , . Chứng minh  vuông góc với .

** Lời giải**

**Ví dụ 2.** Cho hình hộp  có sáu mặt đều là các hình vuông. Gọi ,  lần lượt là trung điểm của  và .

1. Chứng minh: , .
2. Tính góc giữa  và .

** Lời giải**

**Ví dụ 3:** Cho hình chóp  có  và .

Chứng minh rằng ,  và .

** Lời giải**

## **C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA**

**Bài 1.** Hình 6 gợi nên hình ảnh 5 cặp đường thẳng vuông góc. Hãy chỉ ra 5 cặp đường thẳng đó.



** Lời giải**

**Bài 2.** Trong hình 7 cho , , là các hình chữ nhật.

Chứng minh rằng , .



** Lời giải**

**Bài 3.** Cho hình chóp  có đáy  là hình bình hành và  (Hình 8). Tính góc giữa hai đường thẳng:

a)  và ; b)  và .

** Lời giải**

**Bài 4.** Bạn Hoa nói rằng: “Nếu hai đường thẳng phân biệt  và  cùng vuông góc với đường thẳng  thì  và vuông góc với nhau”. Bạn Hoa nói đúng hay sai? Vì sao?

** Lời giải**

## **D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**

**Câu 1:** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

**A.** Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

**B.** Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng vuông góc với nhau thì song song với đường thẳng còn lại.

**C.** Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.

**D.** Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng kia.

**Lời giải**

**🖎**

**Câu 2:** Cho hai đường thẳng phân biệt  và mặt phẳng , trong đó. Mệnh đề nào sau đây là sai?

**A.** Nếu  thì . **B.** Nếu  thì.

**C.** Nếu  thì. **D.** Nếu  thì .

**Lời giải**

**🖎**

**Câu 3:** Cho hình lập phương . Hãy xác định góc giữa cặp vectơ  và?

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Lời giải**

**🖎**

**Câu 4:** Cho hình lập phương . Góc giữa  và  là:

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Lời giải**

**🖎**

**Câu 5:** Cho hình hộp . Giả sử tam giác  và  đều có ba góc nhọn. Góc giữa hai đường thẳng  và  là góc nào sau đây?

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Lời giải**

**🖎**

**Câu 6:** Cho hình lập phương . Chọn khẳng định **sai?**

**A.** Góc giữa  và  bằng  **B.** Góc giữa  và  bằng 

**C.** Góc giữa  và  bằng  **D.** Góc giữa  và  bằng 

**Lời giải**

**🖎**

**Câu 7:** Cho tứ diện  có . Gọi  lần lượt là trung điểm của . Góc  bằng

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Lời giải**

**🖎**

**Câu 8:** Cho hình chóp  có tất cả các cạnh đều bằng . Gọi  và  lần lượt là trung điểm của  và . Số đo của góc  bằng:

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Lời giải**

**🖎**

**Câu 9:** Cho hình chóp  có cạnh , tất cả các cạnh còn lại đều bằng . Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng  và 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Lời giải**

**🖎**

**Câu 10:** Cho tứ diện  có . Gọi  lần lượt là trung điểm của  và . Biết  vuông góc với . Tính .

**A.  B.**  **C.**  **D.** 

**Lời giải**

**🖎**

**Câu 11:** Cho tứ diện  có  vuông góc với . Mặt phẳng  song song với  và  lần lượt cắt  tại . Tứ giác  là hình gì?

**A.** Hình thang. **B.** Hình bình hành.

**C.** Hình chữ nhật. **D.** Tứ giác không phải hình thang.

**Lời giải**

**🖎**

**Câu 12:** Trong không gian cho hai tam giác đều  và  có chung cạnh  và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Gọi  lần lượt là trung điểm của các cạnh  và . Tứ giác  là hình gì?

**A.** Hình bình hành. **B.** Hình chữ nhật. **C.** Hình vuông. **D.** Hình thang.

**Lời giải**

**🖎**

**Câu 13:** Cho tứ diện  trong đó , góc giữa  và  là  và điểm  trên  sao cho . Mặt phẳng  qua  song song với  và  cắt  lần lượt tại . Diện tích  bằng:

**A.  B.**  **C.  D.** 

**Lời giải**

**🖎**

**Câu 14:** Cho tứ diện  có  vuông góc với , .  là điểm thuộc cạnh  sao cho . Mặt phẳng  đi qua  song song với  và . Diện tích thiết diện của  với tứ diện là:

**A.  B.**  **C.  D.** 

**Lời giải**

**🖎**

**Câu 15:** Cho tứ diện  có  vuông góc với , .  là điểm thuộc cạnh  sao cho . Mặt phẳng song song với  và  lần lượt cắt  tại . Diện tích lớn nhất của tứ giác bằng bao nhiêu?

**A.  B.**  **C.  D.** 

**Lời giải**

**🖎**