

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN 8

Thời gian: 150 phút

Bài 1: (1 điểm) Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $x^4 + 1 - 2x^2$

b) $x^2 - 28x - 27$

Bài 2: (2 điểm) Giải phương trình

a) $-2|-3x+4|-2=0$

b) $\frac{1}{x-1} + \frac{2x^2-5}{x^3-1} = \frac{4}{x^2+x+1}$

Bài 3 (1 điểm)

Với giá trị nào của x thì $\frac{x-1}{x+1} > 0$

Bài 4 (2 điểm)

Hai người làm chung một công việc trong 12 ngày thì xong. Năng suất làm việc trong một ngày của người thứ hai chỉ bằng $\frac{2}{3}$ người thứ nhất. Hỏi nếu làm riêng, mỗi người làm trong bao lâu sẽ xong công việc

Bài 5 (3,5 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC . M là giao điểm của CE và DF .

a) Chứng minh CE vuông góc với DF

b) Chứng minh $\frac{CM \cdot CE}{CF} = a$

c) Tính diện tích ΔMDC theo a

Bài 6. (0,5 điểm)

Cho $x + \frac{1}{x} = 3$. Tính giá trị biểu thức $A = x^3 + \frac{1}{x^3}$

ĐÁP ÁN

Bài 1.

$$a) x^4 - 1 + 2x^2 = (x^2 + 1)^2$$

$$b) -x^2 - 28x - 27 = -(x+1)(x+27)$$

Bài 2.

$$a) -2|-3x+4|-2=0$$

$$\Leftrightarrow |-3x+4| = -1 \text{ (khẳng định sai vì } |-3x+4| \geq 0 \forall x)$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm

$$b) \frac{1}{x-1} + \frac{2x^2-5}{x^3-1} = \frac{4}{x^2+x+1} \quad \text{ĐKXD: } x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+x+1}{x^3-1} + \frac{2x^2-5}{x^3-1} = \frac{4(x-1)}{x^3-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+x+1+2x^2-5}{x^3-1} = \frac{4(x-1)}{x^3-1}$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 & (tm) \\ x=1 & (ktm) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \{0\}$$

Bài 3.

$$+\frac{x-1}{x+1} > 0 \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x-1 > 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > -1 \end{cases} \Rightarrow x > 1 \\ \begin{cases} x-1 < 0 \\ x+1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x < -1 \end{cases} \Rightarrow x < -1 \end{cases}$$

Vậy $x > 1$ hoặc $x < -1$

Bài 4.

Gọi x (ngày) là thời gian để người thứ nhất hoàn thành công việc ($x > 0$).

Một ngày người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ (công việc)

Một ngày người thứ hai làm được $\frac{2}{3x}$ (công việc)

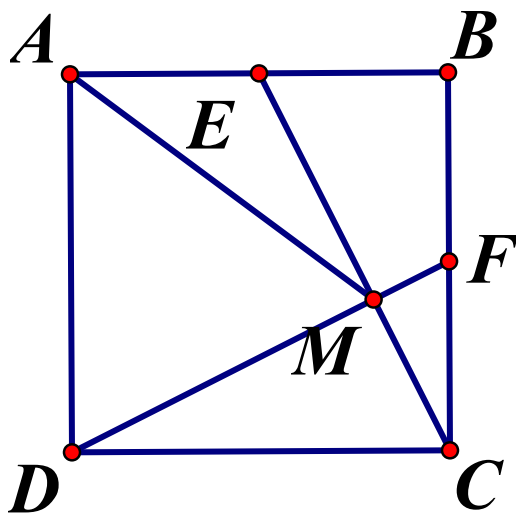
Một ngày hai người làm chung được $\frac{1}{x} + \frac{2}{3x}$ (công việc)

Theo bài ta có phương trình $\frac{1}{x} + \frac{2}{3x} = \frac{1}{12} \Leftrightarrow x = 20$

Vậy người thứ nhất làm xong trong 20 ngày

Người thứ hai làm xong trong 30 ngày.

Bài 5.



a) $\triangle BEC = \triangle CFD (c.g.c) \Rightarrow \angle ECB = \angle FDC$

$\triangle CDF$ vuông tại C $\Rightarrow \angle DFC + \angle FDC = 90^\circ \Rightarrow \angle DFC + \angle ECB = 90^\circ \Rightarrow \triangle CMF$ vuông tại M

Hay $CE \perp DF$

b) Xét $\triangle CMF$ và $\triangle CBE$ có: $\angle CMF = \angle CBE = 90^\circ$; $\angle MCF$ chung

$\Rightarrow \triangle CMF \sim \triangle CBE (g - g)$

$\Rightarrow \frac{CM}{BC} = \frac{CF}{CE} \Rightarrow \frac{CM \cdot CE}{CF} = BC$

Mà $BC = a$ do đó: $\frac{CM \cdot CE}{CF} = a$

$$c) \quad \Delta CMD \sim \Delta FCD (g.g) \Rightarrow \frac{CD}{FD} = \frac{CM}{FC}$$

$$\text{Do đó: } \frac{S_{\Delta CMD}}{S_{\Delta FCD}} = \left(\frac{CD}{FD}\right)^2 \Rightarrow S_{\Delta CMD} = \left(\frac{CD}{FD}\right)^2 \cdot S_{\Delta FCD}$$

$$\text{Mà: } S_{\Delta FCD} = \frac{1}{2} \cdot CF \cdot CD = \frac{1}{4} CD^2$$

$$\text{Vậy: } S_{\Delta CMD} = \frac{CD^2}{FD^2} \cdot \frac{1}{4} \cdot CD^2.$$

Trong ΔDCF theo Pitago ta có:

$$DF^2 = CD^2 + CF^2 = CD^2 + \left(\frac{1}{2}BC\right)^2 = CD^2 + \frac{1}{4}CD^2 = \frac{5}{4}CD^2$$

$$S_{\Delta MCD} = \frac{CD^2}{\frac{5}{4}CD^2} \cdot \frac{1}{4}CD^2 = \frac{1}{5}CD^2 = \frac{1}{5}a^2$$

Do đó:

Bài 6.

$$A = x^3 + \frac{1}{x^3} = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot \frac{1}{x} + 3 \cdot x \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 3^3 - 3 \cdot 3 = 18$$