SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

BÀ RỊA VŨNG TÀU

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC 2023-2024
MÔN TOÁN 9

Bài 1. (3 điểm):

1) Rút gọn biểu thức$P=\left(\frac{a\sqrt{a}+a-2}{a-1}-\frac{1}{a\sqrt{a}-a}\right):\frac{1}{a\sqrt{a}-a}$;với a > 0,a≠1.

2) Tính giá trị của biểu thức Q = a^3+b^3với a = $\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}$, b=$\sqrt[3]{7-\sqrt{50}}$.

Bài 2. (3 điểm):

1) Giải phương trình $x^2-5x+7=\sqrt{2x-5}$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases}4x^2+1=y^2-4x\\ x^2+2y^2=3xy\end{cases}$

Bài 3. (3 điểm):

1) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x; y) thoả mãn phương trình

$4y^2-2xy+6y-x+7=0$

2) Cho ba số nguyên a,b,c thỏa mãn a + b + c = 2022^{2033}. Chứng minh $a^3+b^3+c^3$chia hết cho 3.

Bài 4. (4 điểm):

1) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol (P) : y = x^2. Tìm tọa độ các điểm A và B thuộc (P) sao cho tam giác OAB đều.

2) Cho các số dương x,y,z thỏa $\sqrt{2(x^2+y^2)}+\sqrt{2(y^2+z^2)}+\sqrt{2(z^2+x^2)}+xyz=7$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức S = $\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{z+y}$

Bài 5. (5 điểm): Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) lấy điểm M sao cho MA > OA. Vẽ tiếp tuyến thứ hai MC với đường tròn (O) (C là tiếp điểm). Đường thẳng qua M song song với AB cắt tia OC tại D. Vẽ đường tròn (01) đường kính MD. Gọi E giao điểm của MB với đường tròn (O), F giao điểm của MB với đường tròn (O')(E khác B,F khác M). Tia DF cắt AB tại K.

1) Chứng minh $\widehat{CFB}=\widehat{COB}$

2) Chứng minh ACEF cân

3) Chứng minh K là trung điểm của AO.

Bài 6. (2 điểm): Cho tam giác ABC có trọng tâm G và nội tiếp trong đường tròn (O). Các đường trung tuyến kẻ từ các đỉnh A, B,C của tam giác ABC lần lượt cắt đường tròn (O) tại các điểm D, E, F. Chứng minh rằng AB+BC+CA≤$\sqrt{3}$(GD+GE+GF).

--HẾT--

LỜI GIẢI

Bài 1

1) Rút gọn biểu thức P=$\left(\frac{a\sqrt{a}+a-2}{a-1}-\frac{1}{a\sqrt{a}-a}\right):\frac{1}{a\sqrt{a}-a}$;với a > 0,a≠1.

2) Tính giá trị của biểu thức Q = a^3+b^3với a = $\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}$, b=$\sqrt[3]{7-\sqrt{50}}$.

GIẢI

1) P=$\left(\frac{a\sqrt{a}+a-2}{a-1}-\frac{1}{a\sqrt{a}-a}\right):\frac{1}{a\sqrt{a}-a}$;với a > 0,a≠1.

$=\left[\frac{(\sqrt{a}-1)(a+2\sqrt{a}+2)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}-\frac{1}{\sqrt{a}+1}\right]:\frac{1}{a(\sqrt{a}-1)}$

$=\left(\frac{a+2\sqrt{a}+2-1}{\sqrt{a}+!}\right).a(\sqrt{a}-1)=\frac{(\sqrt{a}+1)^2}{\sqrt{a}+1}.a(\sqrt{a}-1)=a(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)=a(a-1)$

2. a = $\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}$, b=$\sqrt[3]{7-\sqrt{50}}$.

Ta có $a^3+b^3=(7+\sqrt{50})+(7-\sqrt{50})=14$

ab=$\sqrt[3]{(7+\sqrt{50})(7-\sqrt{50})}=\sqrt[3]{49-50}=-1$

đặt x=a+b

=>$x^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$

=>$x^3=14-3x$

=>$x^3+3x-14=0$⇔(x-2)(x^2+2x+7)$=0$

Mà $x^2+2x+7=(x+1)^2+6>0$.Suy ra x=2

Do đó $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=2^2=2(-1)=6$

=>84 = $(a^2+b^2)(a^3+b^3)$=$a^5+b^5+a^3b^2+a^2b^3$

=>84 = Q + $a^2b^2(a+b)=Q+2b^2(a+b)=Q+2=¿Q=82$

Bài 2. (3 điểm):

1) Giải phương trình $x^2-5x+7=\sqrt{2x-5}$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases}4x^2+1=y^2-4x\\ x^2+2y^2=3xy\end{cases}$

GIẢI

1) Giải phương trình $x^2-5x+7=\sqrt{2x-5}$.

$x^2-5x+7=\sqrt{2x-5}$, *điều kiện* $x\geq\frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow(2x+5)^2+3=4\sqrt{2x-5}$

Đặt u =$\sqrt{2x-5}$(u≥0)

Ta có phương trình $u^4+3=4u$

$\Leftrightarrow u^4-2u^2+1+2u^2-4u+2=0$

$\Leftrightarrow(u^2-1)^2+2(u^2-1)^2=0\Leftrightarrow(u^2-1)^2\left((u^2-1)^2+2\right)=0$

Mà $(u^2+1)^2$+2>0, ta được u=1

$\sqrt{2x-5}=1$ ⇔x=3 (thỏa mãn)

Vậy S= $\{3\}$

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases}4x^2+1=y^2-4x\\x^2+2y^2=3xy\end{cases}$

$\begin{cases}4x^2+1=y^2-4x\\x^2+2y^2=3xy\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2=(2x+1)^2(1)\\(x-y)(x-2y)=0(2)\end{cases}$

(1) $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=2x+1\\y=-2x-1\end{array}\right.$

TH1 y=2x+1 thay vào (2)

$(x-2x-1)(x-4x-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1(y=-1)\\x=\frac{-2}{3}(y=\frac{-1}{3})\end{array}\right.$

TH2 y==2x=1 thay vào (2)

$(x+2x+1)(x+4x+2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{-1}{3}(y=\frac{-1}{3})\\x=\frac{-2}{5}(y=\frac{-1}{5})\end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là

S= $\left\{(-1;-1);\left(\frac{-2}{3};\frac{-1}{3}\right);\left(\frac{-1}{3};\frac{-1}{3}\right);\left(\frac{-2}{5};\frac{-1}{5}\right)\right\}$

Bài 3. (3 điểm):

1) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x; y) thoả mãn phương trình $4y^2-2xy+6y-x+7=0$

2) Cho ba số nguyên a,b,c thỏa mãn a + b + c = 2022^{2033}. Chứng minh $a^3+b^3+c^3$chia hết cho 3.

GIẢI

1)$4y^2-2xy+6y-x+7=0\Leftrightarrow4y^2+6y+7=x(2y+1)$

⇔x= $\frac{4y^2+6y+7}{2y+1}$ do 2y+1≠0

$\Leftrightarrow$x=2y+2+$\frac{5}{2y+1}$

Vì x,y ϵ Z nên $\frac{5}{2y+1}$ εZ

=>2y+1 ϵ $\{-5;-1;1;5\}$

=>y ϵ $\{-3;-1;0;2\}$

Với y=-1=>x=-5

y=-1=>x=-5

y=0=>x=7

y=2=>x=7

vậy có 4 cặp số nguyên (x;y) thỏa mãn là

$(-5;-3);(-5;-1);(7;0);(7;2)$

2) Cho ba số nguyên a,b,c thỏa mãn a + b + c = 2022^{2033}. Chứng minh $a^3+b^3+c^3$chia hết cho 3.

Ta có $a^3-a=a(a^2-1)=(a-1).a.(a+1)$ là tích của ba số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 3

Tương tự $b^3-b \vdots 3; c^3-c \vdots 3$

Do đó $[(a^3+b^3+c^3)-(a+b+c)] \vdots 3$ (1)

Mà 2022⋮3=>a+b+c=2022^{2033} (2)

Từ (1) và (2) ta có $a^3+b^3+c^3 \vdots 3$

Bài 4. (4 điểm):

1) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol (P) : y = x^2. Tìm tọa độ các điểm A và B thuộc (P) sao cho tam giác OAB đều.

2) Cho các số dương x,y,z thỏa $\sqrt{2(x^2+y^2)}+\sqrt{2(y^2+z^2)}+\sqrt{2(z^2+x^2)}+xyz=7$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức S = $\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{z+y}$

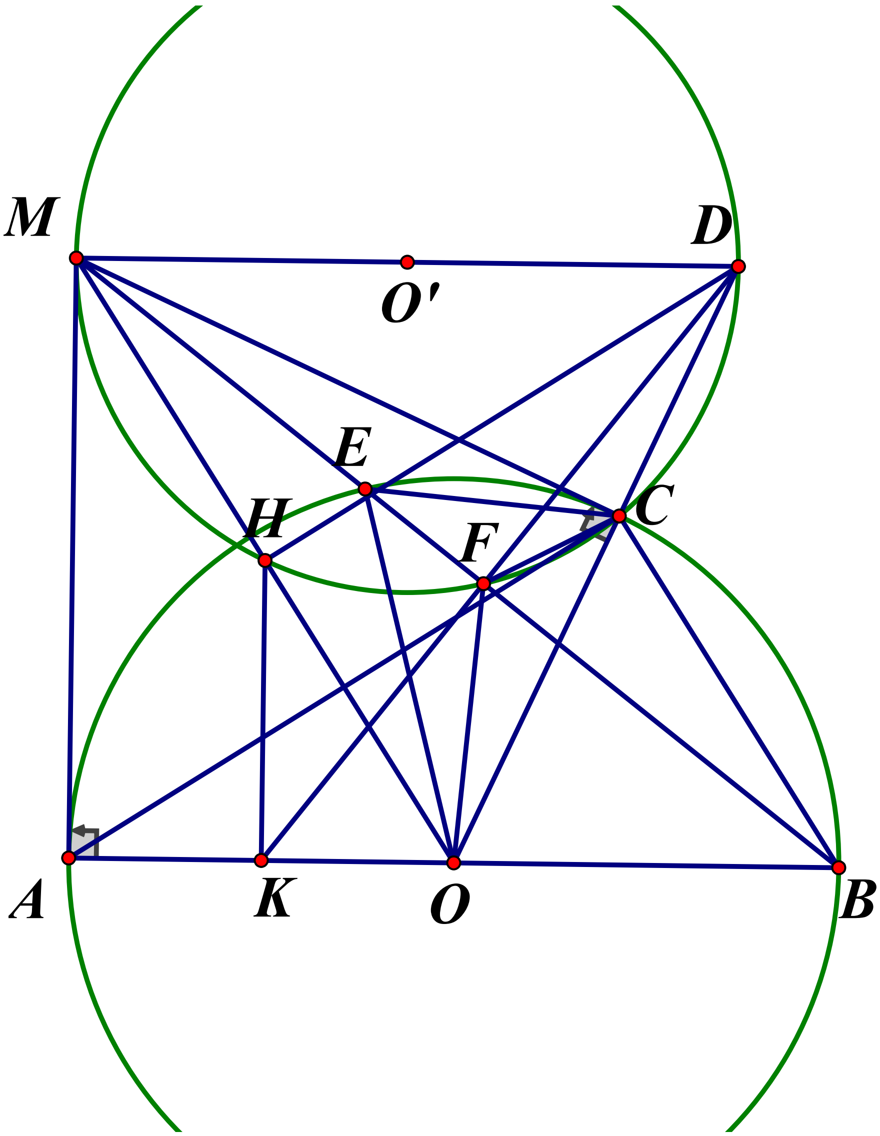
GIẢI

1) Gọi hoành độ của A,B là a;b. Không giảm tính tổng quát ta giả sử a>b

A,B ϵ(P) => A(a;a^2) $và\, B(b;b^2)$
Ta có OA=$\sqrt{a^2+a^4}; OB=\sqrt{b^2+b^4}$
ΔOAB đều nên OA=OB
$a^2+a^4=b^2+b^4$
$\Leftrightarrow (a^2-b^2)(1+a^2+b^2)=0$
$\Leftrightarrow a^2=b^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ a=-b \end{cases}$
Kết hợp điều kiện ta chọn a=-b (a>0 do a>b)
Khi đó A(a;a^2);B(-a;a^2). Với a>0 => AB=2a
ΔOAB đều nên OA=AB$\Leftrightarrow \sqrt{a^2+a^4}=2a \Leftrightarrow a^2+a^4=4a^2 \Leftrightarrow a^2(a^2-3)=0$
Do a>0 =>a=$\sqrt{3}$=>$\begin{cases} A(\sqrt{3};3) \\ B(-\sqrt{3};3) \end{cases}$
Vậy hai cặp điểm (A;B) thỏa mãn là $A(\sqrt{3};3); B(-\sqrt{3};3)$ hoặc $A(-\sqrt{3};3); B(\sqrt{3};3)$
2)Ta chứng minh $x^2+y^2+z^2 \geq 3$(1)
Thật vậy giả sử $x^2+y^2+z^2<3$.Khi đó

$$\sqrt{2(x^2+y^2)}+\sqrt{2(y^2+z^2)}+\sqrt{2(x^2+z^2)} \leq \sqrt{3(2(x^2+y^2)+2(y^2+z^2)2(x^2+z^2))}$$

$=\sqrt{12(x^2+y^2+z^2)}<6$ (2)
$x^2+y^2+z^2>=3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}$=>xyz<1 (3)
Từ (2) và (3) suy ra vô lí theo giả thiết. Do đó (1) đúng
Khi đó S= $\frac{x^4}{x^2(y+z)}+\frac{y^4}{y^2(z+x)}+\frac{z^4}{z^2(x+y)} \geq \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)}$ (4)
Ta có $x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)=xy(x+y)+yz(y+x)+zx(z+x)$
$\leq \sqrt{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}.\sqrt{(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2}$
$\leq \sqrt{\frac{1}{3}(x^2+y^2+z^2)}.\sqrt{2(x^2+y^2+z^2)+2(zy+yz+zx)} \leq \sqrt{\frac{4}{3}(x^2+y^2+z^2)^3}$ (5)
Từ (4) và (5) => S $\geq \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{\frac{4}{3}(x^2+y^2+z^2)^3}=\frac{\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)}}{2} \geq \frac{3}{2}$
Giá trị nhỏ nhất của S là $\frac{3}{2}$. Dấu "=" xảy a khi x=y=z=1
Bài 5. (5 điểm): Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên tiếp tuyến tại A của đường tròn (0) lấy điểm M sao cho MA > OA. Vẽ tiếp tuyến thứ hai MC với đường tròn (O) (C là tiếp điểm). Đường thẳng qua M song song với AB cắt tia OC tại D. Vẽ đường tròn (0') đường kính MD. Gọi E giao điểm của MB với đường tròn (O), F giao điểm của MB với đường tròn (O')(E khác B,F khác M). Tia DF cắt AB tại K.
1) Chứng minh $\widehat{CFB}=\widehat{COB}$
2) Chứng minh ACEF cân.
3) Chứng minh K là trung điểm của AO.
GIẢI



1) Tứ giác <MDCF nội tiếp =>$\widehat{FCO}=\widehat{EMD}$; mà $\widehat{EMD}=\widehat{FBO}\left(so \leq trong\right)=¿\,\widehat{FCO}=\widehat{FBO}$

Tứ giác OBCF nội tiếp =>$\widehat{CFB}=\widehat{COB}$

2) $\widehat{FCO}=\widehat{OBF}$

$\widehat{OBF}=\widehat{ACE}$(cùng chắn $\widehat{AE}$)

=>$\widehat{OCF}=\widehat{ACE}=¿\,\widehat{ACO}=\widehat{FCE}\left(1\right)$

Mà $\widehat{ACO}=\widehat{OAC}\,;\widehat{OAC}=\widehat{FEC}$(cùng chắn $\widehat{CB}$)$=¿\,\widehat{FEC}=\widehat{ACO}\left(2\right)$

Từ (1) và (2)=>$\widehat{FCE}=FEC=¿\,\Delta\,CEF\,cân\,tại\,F$

3) OM cắt (O') tại H≠M. Ta có $\widehat{OMD}=\widehat{MOA}=\widehat{MOD}=¿\Delta MOD\, cân\, tại\, D$

Mà MH $\perp HD$ => H là trung điểm MO

CB//MO (cùng $\perp AC$)=> $\widehat{OBC}=\widehat{AOM}=\widehat{OMD}=\widehat{HFK}\,(tứ\, giác\, HMDF\, nội\, tiếp)$

Mà $\widehat{OBC}=\widehat{OCB}=\widehat{OFB}\,(do\, OBCF\, nội\, tiếp)$

=>$\widehat{OFB}=\widehat{FKH}$

=$\widehat{HFO}=\widehat{KFO}=\widehat{DFM}=90°$ (3)

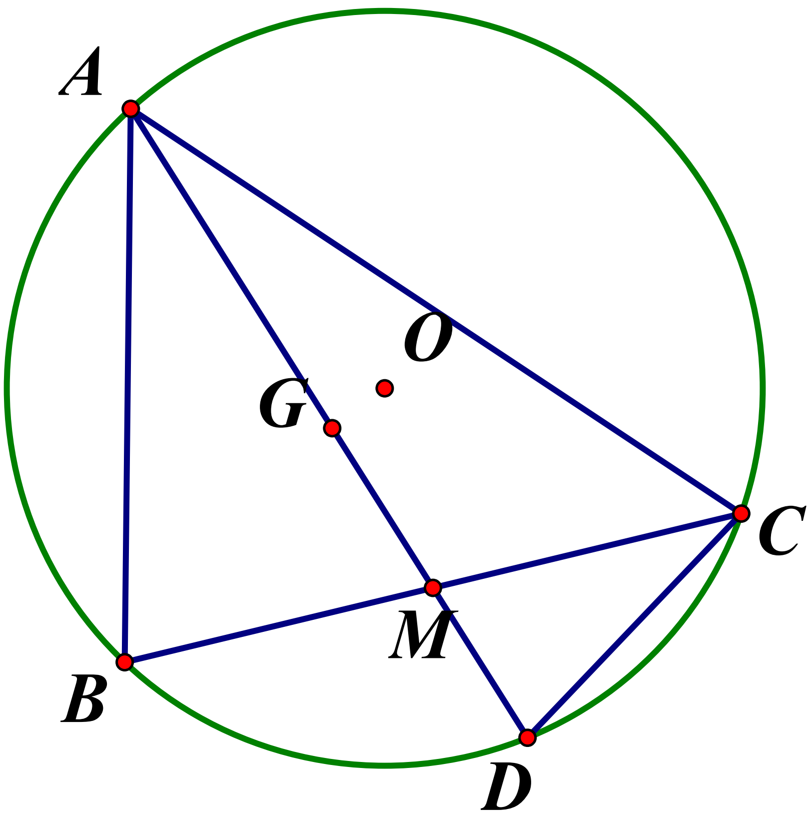
Mà $\widehat{AKO}=\widehat{OMD}=\widehat{KFH}$ suy ra tứ giác KOFH nội tiếp (4)

Từ (3) và (4) suy ra HK $\perp AB$=> HK//MA

=>HK là đường trung bình của ΔMAO=>K là trung điểm OA

Bài 6. (2 điểm): Cho tam giác ABC có trọng tâm G và nội tiếp trong đường tròn (O). Các đường trung tuyến kẻ từ các đỉnh A, B,C của tam giác ABC lần lượt cắt đường tròn (O) tại các điểm D, E, F. Chứng minh rằng AB+BC+CA≤$\sqrt{3}$(GD+GE+GF).

GIẢI



Gọi M là trung điểm BC

ΔMAD~ΔMDC(gg)=> MD.MA=MB.MC=$\frac{1}{4}BC^2$

Ta có GD=MG+MD≥2$\sqrt{MG.MD}=2\sqrt{\frac{1}{3}MA.MD}$

$=2.\sqrt{\frac{1}{3}.\frac{1}{4}BC^2}=\frac{BC}{\sqrt{3}}$

- ⇨ BC≤$\sqrt{3}GD$. Tương tự CA≤$\sqrt{3}\geq$¿;AB≤$\sqrt{3}GF$=> Điều phải chứng minh