**Chủ đề 2. TỌA ĐỘ VECTO' TRONG KHÔNG GIAN**

**Bài 1. BÀI TOÁN VÈ VECTƠ VÀ TỌA ĐỌ TRONG KHÔNG GIAN OXYZ**

**PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NẮM**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **I. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN**  **1) Quy tắc hình hộp:**  Nếu hình hộp  có ba cạnh xuất phát từ A là AB, AD, AA’ và có đường chéo là  thì khi đó ta có quy tắc hình hộp là: . | |  |
| **2) Phân tích một vectơ theo 3 vectơ không đồng phẳng:**  Trong không gian cho ba vectơ không đồng phẳng . Khi đó với mọi vectơ  ta đều tìm được một bộ ba số  sao cho . Ngoài ra bộ ba số  là duy nhất. | |  |
| **3) Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian:**  ***a) Góc giữa hai vecto trong không gian***  Trong không gian, cho  và  là hai vectơ khác . Lấy một điểm  bất kì, gọi  và  là hai điểm sao cho . Khi đó ta gọi góc   là góc giữa hai vectơ  và  trong không gian, kí hiệu là . | |  |
| ***b) Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian***  Tích vô hướng của hai vectơ  và  là một số, được ký hiệu  và được xác định bởi  từ đó suy ra cosin góc giữa hai vectơ  và  là  Đặc biệt khi . | | |
| **II. HỆ TRỤC TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN**  **1) Hệ trục tọa độ:**  Trong không gian , cho vectơ . Khi đó luôn tồn tại duy nhất bộ ba số  sao cho: .  Ta gọi bộ ba số  đó là tọa độ của vectơ  đối với hệ tọa độ  cho trước và viết  hoặc . |  | |

**2) Tọa độ vectơ:**

Cho .







 với 

 và  cùng phương khi và chỉ khi có một số thực  sao cho



Hoặc  với .

+ Tích vô hướng của 2 vectơ: 

+ Độ dài vectơ: 





**3) Tọa độ của điểm**

Cho ba điểm .

Nếu  là trung điểm của đoạn thẳng  thì 

Nếu  là trọng tâm của tam giác  thì



Nếu  là trọng tâm của tứ diện  thì



**4) Tích có hướng của 2 vectơ và ứng dụng:**

Trong không gian Oxyz cho hai vectơ: .

Vectơ tích có hướng của  và  là: 

\*Chú ý: 

**a) Tính chất:**

 cùng phương 



 đồng phẳng 

**b) Ứng dụng:**

Diện tích tam giác: 

Thể tích tứ diện: 

Thể tích hình hộp: 

**5) Phương trình mặt cầu:**

**a) Định nghĩa 1:** Phương trình mặt cầu  tâm  bán kính R có dạng:

|  |
| --- |
|  |

**\*Chú ý:** Phương trình mặt cầu tâm  bán kính R có dạng:

|  |
| --- |
|  |

**b) Định nghĩa 2:** Mỗi phương trình có dạng:

|  |
| --- |
|  |

Với điều kiện  là phương trình mặt cầu tâm  bán kính 

**6) Phương trình tổng quát của mă̆t phẳng:**

+ Cho mặt phẳng  đi qua  và có vectơ pháp tuyến .

+ Phương trình tổng quát của  là: 

hay: 

**7) Phương trình tham số và chính tắc của đường thẳng:**

|  |  |
| --- | --- |
| Cho đường thẳng   * Phương trình tham số: * Phương trình chính tắc:  với . |  |

**PHẦN B. BÀI TẬP ÁP DỤNG**

**Bài 1.** Theo định luật II Newton: gia tốc của một vật có cùng hướng với lực tác dụng lên vật. Độ lớn của gia tốc tỉ lệ thuận với độ lớn của lực và tỉ lệ nghịch với khối lượng của vật: , trong đó  là vectơ gia tốc,  là vectơ lực tác dụng lên vật,  là khối lượng của vật. Muốn truyền cho quả bóng khối lượng  một gia tốc  thì cần một lực đá có độ lớn là bao nhiêu?

![](data:application/octet-stream;base64,)

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 2.** Một em bé cân nặng  trượt trên cầu thang trượt dài 2 m . Biết rằng, cầu trượt có góc nghiêng so với phương nằm ngang là .  a) Tính độ lớn của trọng lực  tác dụng lên em bé, biết . |  |
| b) Cho biết công  sinh bởi một lực  có độ dịch chuyển  được tính theo công thức  . Hãy tính công sinh bởi trọng lực  khi em bé trượt hết chiều dài cầu trượt (làm tròn đến hàng đơn vị). | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 3.** Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi giây không dãn phát từ điểm  trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm M, N, K trên đường tròn sao cho lực căng  lần lượt trên mỗi dây  đôi một vuông góc với nhau và . Tính trọng lượng của chiếc đèn đó. |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 4.** Một chiếc đèn chùm treo có khối lượng  được thiết kế với đĩa đèn được giữ bởi bốn đoạn xích  sao cho  là hình chóp tứ giác đều có  (Hình).  Biết  trong đó  là vectơ gia tốc rơi tự do có độ lớn  là trọng lực tác động vật có đơn bị là  là khối lượng của vật có đơn vị kg. Tính đ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích (tính chính xác đến hàng phần mười). |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 5.** Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật , mặt phẳng  song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc  của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp ,  có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng  một góc  (Hình 4). Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Tính trọng lượng của chiếc xe ô tô (làm tròn đến hàng đơn vị), biết rằng các lực căng  đều có cường độ là  và trọng lượng của khung sắt là . |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 6.** Một kiện hàng có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật . Kiện hàng đó được buộc vào móc  của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp  có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng  một góc  (Hình 5). Chiếc cần cẩu kéo kiện hàng lên theo phương thẳng đứng. Tính trọng lượng của kiện hàng (làm tròn đến hàng đơn vị), biết rằng các lực căng  đều có cường độ là . |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 7.** Một chiếc ô tô Hyundai Grand i10 được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với áy trên là hình chữ nhật , mặt phẳng  song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc  của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp  có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng  một góc bằng . Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết khối lượng chiếc xe ô tô Hyundai grand i10 là 1051 kg và trọng lượng khung sắt là 2490 N ; cường đ các lực căng  là bằng nhau. Tính cường đ lực căng  (tính chính xác đến hàng phần mười). |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 8.** Một tấm gỗ tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không giãn xuất phát từ điểm  trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm  trên tấm gỗ tròn sao cho các lực căng  lần lượt trên mỗi dây  đôi một vuông góc với nhau và có độ lớn  (xem hình vẽ). Tính trọng lượng  của tấm gố tròn đó (tính chính xác đến hàng phần mười). |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 9.** Người ta treo một bóng đèn có khối lượng  bằng cách luồn sợi dây qua một cái móc của đèn và hai đầu dây được gắn chặt trên trần nhà. Hai nửa sợi dây có chiều dài bằng nhau và hợp với nhau một góc bằng . Tính lực căng của mỗi nửa sợi dây là bao nhiêu? Lấy . |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 10.** Người ta vận chuyển một thùng hàng có dạng hình hộp chữ nhật bằng cách móc 4 dây cáp vào 4 góc trên của thùng hàng và đầu còn lại móc vào cần cẩu như hình vẽ. Biết rằng các đoạn dây cáp có độ dài bằng nhau và góc tạo bởi hai đoạn dây cáp đối diện nhau là . Chiếc cần cẩu kéo thùng hàng lên theo phương thẳng đứng. Biết rằng  chịu được tối đa lực căng là 5000 N . Hỏi cần cẩu nâng được thùng hàng có khối lượng (đơn vị kg ) tối đa là bao nhiêu (làm tròn đến hàng đơn vị)? Lấy . |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 11.** Một sân Tennis với hệ trục tọa đ  được chọn như hình bên dưới (Hình 1).  a) Mặt sân nằm trong mặt phẳng tọa độ nào?  b) Trục  có vuông góc với mặt sân không? | *Hình 1* |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 12.** Một sân cầu lông có kích thước cho trong hình bên dưới (Hình 3), với hệ trục tọa độ  được đã chọn.  Em hãy xác định tọa độ của vectơ . |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 13.** Một căn phòng với hệ trục tọa đ  được chọn như hình bên dưới (Hình 2).  Em hãy cho biết mặt bên phải (nơi ánh sáng chiếu vào) của căn phòng nằm trong mặt phẳng tọa độ nào? | *Hình 2* |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 14.** Cho biết máy bay Airbus chở hành khác đang bay với vectơ vận tốc |  |
| (đơn vị: km/h). Một máy bay quân sự  bay ngược hướng và có tốc độ gấp 3 lần tốc độ của máy bay .  a) Tìm tọa độ vectơ vận tốc  của máy bay .  b) Tính tốc độ của máy bay . | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 15.** Trong không gian hệ trục tọa độ  (đơn vị trên mỗi trục là kilômét) một trạm phát sóng điện thoại của nhà mạng Vinaphone được đặt ở vị trí  và được thiết kế bán kính phủ sóng là 5000 m .  a) Sử dụng phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phủ sóng trong không gian.  b) Nhà bạn Minh Hiền và bạn Trúc Linh có vị trí tọa độ lần lượt là  và . Hỏi Minh Hiền và Trúc Linh dùng điện thoại tại nhà thì có thể sử dụng dịch vụ của trạm này không? |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 16.** Ở một số vùng quê ở Việt Nam, trước mỗi nhà thường có một khoảng sân rộng để phơi lúa vào mùa gặt và cũng là nơi để tổ chức một số sự kiện: đám cưới, ám hỏi, thôi nôi,... Bác An tính xây một sân trước cửa nhà hình chữ nhật  có độ dài các cạnh lần lượt là  và . Để tiện cho việc thoát nước khi trời mưa và khi rửa sân nên bác An xây vị trí  thấp hơn vị trí  là 5 cm , vị trí  thấp hơn vị trí  là 8 cm . |  |
| Chọn hệ trục tọa đ  như hình vẽ để xác định xem vị trí  thấp hơn vị trí  bao nhiêu cm? (làm tròn đến cm ). | |

**Bài 17.** Vào dịp tết Nguyên Đán, một số thành phố thường tổ chức bắn pháo hoa. Có 2 ống bắn pháo hoa  và  được đặt trong 2 mặt phẳng song song với nhau và cách nhau 2 m$, ng bắn  đặt nghiêng so với mặt đất một góc  và ống bắn  nghiêng so với mặt đ t một góc . Hai pháo  và  được bắn đồng thời và cùng đi được quãng đường 100 m thì nổ. Ngườ ta tính toán rằng để tạo ra hiệu ứng đẹp nhất thì vị trí nổ của 2 quả pháo  và  không cách  
nhau quá 50 m . Chọn hệ trục tọa độ  như hình vẽ. Hỏi với cách đặt vị trí như trên thì khi nổ, hai quả pháo  và  cùng nổ có tạo ra hiệu ứng đẹp nhất chưa? (ta xem như 2 quả pháo hoa bắn theo đường thằng và tốc độ bay như nhau).



**Bài 18.** Trong không gian hệ trục tọa độ  (đơn vị trên mỗi trục là kilômét) một trạm phát sóng rađa của nước X được đặt trên bán đảo Y ở vị trí  và được thiết kế phát hiện máy bay của địch ở khoảng cách tối đa 500 km .

a) Sử dụng phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phát sóng của rađa trong không gian.

b) Hai chiếc máy bay do thám của hai nước A và B đang bay ở vị trí có tọa độ lần lượt là  và . Hỏi rađa của nước X có thể phát hiện ra hai chiếc máy bay do thám của nước A và B không?

**Bài 19.** Trong không gian hệ trục tọa độ  (đơn vị trên mỗi trục là kilômét), đài kiểm soát không lưu sân bay Cam Ranh - Khánh Hòa ở vị trí  và được thiết kế phát hiện máy bay ở khoảng cách tối đa 600 km . Một máy bay của hãng Việt Nam Airlines đang chuyển động theo đường thẳng  có phương trình  và hướng về đài kiểm soát không lưu (như hình vẽ).

|  |  |
| --- | --- |
| a) Sử dụng phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phát sóng của đài kiểm soát không lưu trong không gian.  b) Xác định quãng đường mà máy bay nhận được tín hiệu của đài kiểm soát không lưu.  c) Tính khoảng cách ngắn nhất giữa máy bay với đài kiểm soát không lưu. |  |

**Chủ đề 3. CÁC SỐ ĐĂ̆C TRƯNG ĐO MỨC ĐỘ PHÂN TÁN CỦA MẦU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM  
 Bài 6. MẪU SÓ LIẸU GHÉP NHÓM**

**PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NẮM**

**1. KHOẢNG BIẾN THIẾN CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM**

***a) Định nghĩa***

Với mẫu số liệu ghép nhóm cho bởi Bảng 1.

Gọi  và  lần lượt là đầu mút trái của nhóm đầu tiên và đầu mút phải của nhóm cuối cùng.

Hiệu  được gọi là khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

*Bảng 1*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Nhóm |  |  |  |  |  |
| Tần số |  |  |  |  |  |

***b) Ý nghĩa của khoảng biến thiên***

- Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm đo mức độ phân tán của mẫu số liệu đó.

- Khoảng biến thiên càng lớn thì mẫu số liệu càng phân tán.

- Khoảng biến thiên chỉ sử dụng hai giá trị  và  của mẫu số liệu nên đại lượng đó dễ bị ảnh hưởng bởi các giá trị bá́t thuoòng.

- Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ cho khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc.

**Lưu ý:** Đối với mẫu số liệu ghép nhóm mà ta biết mẫu số liệu không ghép nhóm sinh ra nó thì ta cũng có thể chọn khoảng biến thiên của mẫu số liệu không ghép nhóm chính là khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm.

**2. KHOẢNG TỨ PHÂN VỊ CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM**

**a) Định nghĩa**

Với mẫu số liệu ghép nhóm cho bởi Bảng 1 .

Gọi  là tứ phân vị của mẫu số liệu đó. Ta gọi hiệu  là khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu đó.

**Lưu ý:** Tứ phân vị thứ , kí hiệu là , với  của mẫu số liệu ghép nhóm (Bảng 1) được xác định như sau:



Trong đó:

*  là cỡ mẫu;
*  là nhóm chứa tứ phân vị thứ ;
*  là tần số của nhóm chứa tứ phân vị thứ ;

* .