Chương I:

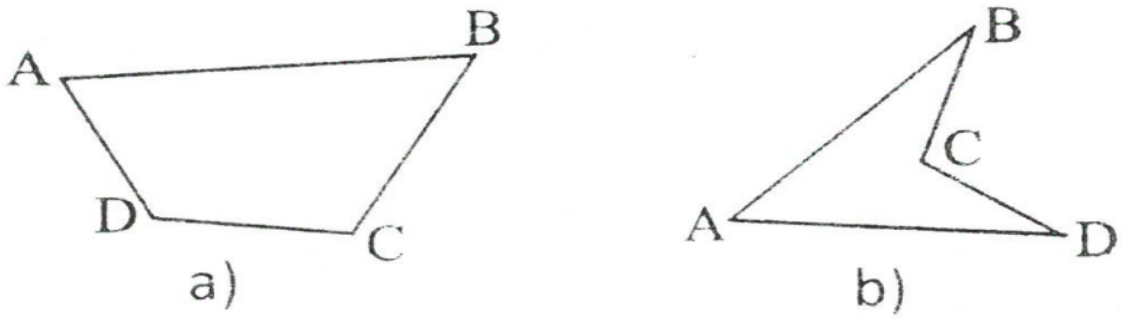
TỨ GIÁC

Chuyên đề 1.

TỨ GIÁC

A. Kiến thức cần nhớ

1. Tứ giác ABCD là hình gồm bốn đoạn thẳng AB, BC, CD, DA, trong đó bất kì hai đoạn thẳng nào cũng không cùng nằm trên một đường thẳng (h.1.1 a, b).



Hình 1.1

Ta phân biệt tứ giác lồi (h.1.1 a) và tứ giác lõm (h.1.1 b). Nói đến tứ giác mà không chú thích gì thêm, ta hiểu đó là tứ giác lồi.

2. Tổng các góc của tứ giác bằng 360°.

$$\boxed{\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=360^\circ.}$$

B. Một số ví dụ

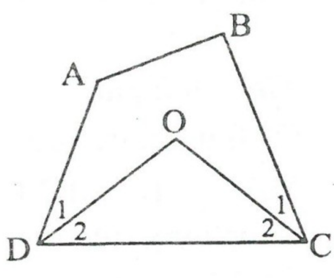
Ví dụ 1: Cho tứ giác ABCD, $\hat{A}-\hat{B}=40^\circ$. Các tia phân giác của góc C và góc D cắt nhau tại O. Cho biết $\widehat{COD}=110^\circ$. Chứng minh rằng $AB \perp BC$.

Giải (h.1.2)

*** Tìm cách giải**

Muốn chứng minh $AB \perp BC$ ta chứng minh $\hat{B}=90^\circ$.

Đã biết hiệu $\hat{A}-\hat{B}$ nên cần tính tổng $\hat{A}+\hat{B}$.



Hình 1.2

*** Trình bày lời giải**

Xét ΔCOD có $\widehat{COD}=180^\circ-\left(\hat{C}_2+\hat{D}_2\right)=180^\circ-\dfrac{\hat{C}+\hat{D}}{2}$

(vì $\hat{C}_1=\hat{C}_2$; $\hat{D}_1=\hat{D}_2$).

Xét tứ giác ABCD có: $\hat{C}+\hat{D}=360^\circ-\left(\hat{A}+\hat{B}\right)$, do đó

$\widehat{COD} = 180° - \dfrac{360° - \left(\widehat{A} + \widehat{B}\right)}{2} = 180° - 180° + \dfrac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2}$

Vậy $\widehat{COD} = \dfrac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2}$. Theo đề bài $\widehat{COD} = 110°$ nên $\widehat{A} + \widehat{B} = 220°$.

Mặt khác, $\widehat{A} - \widehat{B} = 40°$ nên $\widehat{B} = \left(220° - 40°\right) : 2 = 90°$. Do đó $AB \perp BC$.

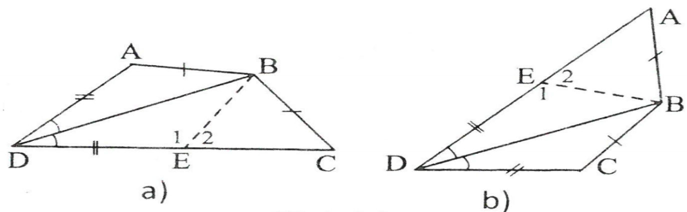
Ví dụ 2: Tứ giác ABCD có AB = BC và hai cạnh AD, DC không bằng nhau. Đường chéo DB là đường phân giác của góc D. Chứng minh rằng các góc đối của tứ giác này bù nhau.

Giải (h.1.3 a,b)

*** Tìm cách giải**

Để chứng minh hai góc A và C bù nhau ta tạo ra một góc thứ ba làm trung gian, góc này bằng góc A chẳng hạn. Khi đó chỉ còn phải chứng minh góc này bù với góc C.

*** Trình bày lời giải**



Hình 1.3

- *Xét trường hợp* AD < DC (h.1.3a)

Trên cạnh DC lấy điểm E sao cho DE = DA

$\Delta ADB = \Delta EDB$ (c.g.c)

$\Rightarrow AB = EB$ và $\widehat{A} = \widehat{E}_1$.

Mặt khác, $AB = BC$ nên $BE = BC$. Vậy ΔBEC cân $\Rightarrow \widehat{C} = \widehat{E}_2$.

Ta có: $\widehat{E}_1 + \widehat{E}_2 = 180° \Rightarrow \widehat{A} + \widehat{C} = 180°$.

Do đó: $\widehat{B} + \widehat{D} = 360° - 180° = 180°$.

- *Xét trường hợp* AD > DC (h.1.3b)

Trên tia DA lấy điểm E sao cho DE = DC

Chứng minh tương tự như trên, ta được: $\widehat{A} + \widehat{C} = 180°$; $\widehat{B} + \widehat{D} = 180°$.

Ví dụ 3. Tứ giác ABCD có tổng hai đường chéo bằng a. Gọi M là một điểm bất kì. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $MA + MB + MC + MD$.

Giải (h.1.4)

*** Tìm cách giải**

Để tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $MA + MB + MC + MD$ ta phải chứng minh $MA + MB + MC + MD \geq k$ (k là hằng số).

Ghép tổng trên thành hai nhóm $\left(MA + MC\right) + \left(MB + MD\right)$.

Ta thấy ngay có thể dùng bất đẳng thức tam giác mở rộng.

*** Trình bày lời giải**

Xét ba điểm M, A, C có $MA + MC \geq AC$ (dấu "=" xảy ra khi $M \in AC$).

Xét ba điểm M, B, D có $MB + MD \geq BD$

(dấu '=' xảy ra khi $M \in BD$).

Do đó: $MA + MB + MC + MD \geq AC + BD = a$.

Vậy $\min\left(MA + MB + MC + MD\right) = a$ khi M trùng với giao điểm O của đường chéo AC và BD.

C. Bài tập vận dụng

- **Tính số đo góc**

1.1. Chứng minh rằng trong một tứ giác, tổng hai góc ngoài tại hai đỉnh bằng tổng hai góc trong tại hai đỉnh còn lại.

1.2. Cho tứ giác ABCD có $\hat{A} + \hat{B} = 220°$. Các tia phân giác ngoài tại đỉnh C và D cắt nhau tại K. Tính số đo của góc CKD.

1.3. Tứ giác ABCD có $\hat{A} = \hat{C}$. Chứng minh rằng các đường phân giác của góc B và góc D song song với nhau hoặc trùng nhau.

1.4. Cho tứ giác ABCD có $AD = DC = CB$; $\hat{C} = 130°$; $\hat{D} = 110°$. Tính số đo góc A, góc B.

(Olympic Toán Châu Á - Thái Bình Dương 2010)

- **So sánh các độ dài**

1.5. Có hay không một tứ giác mà độ dài các cạnh tỉ lệ với 1, 3, 5, 10 ?

1.6. Tứ giác ABCD có hai đường chéo vuông góc. Biết $AB = 3; BC = 6,6; CD = 6$. Tính độ dài AD.

1.7. Chứng minh rằng trong một tứ giác tổng hai đường chéo lớn hơn nửa chu vi nhưng nhỏ hơn chu vi của tứ giác.

1.8. Cho bốn điểm A, B, C, D trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng, bất kì hai điểm nào cũng có khoảng cách lớn hơn 10. Chứng minh rằng tồn tại hai điểm đã cho có khoảng cách lớn hơn 14.

1.9. Cho tứ giác ABCD có độ dài các cạnh là a, b, c, d đều là các số tự nhiên. Biết tổng $S = a + b + c + d$ chia hết cho a, cho b, cho c, cho d. Chứng minh rằng tồn tại hai cạnh của tứ giác bằng nhau.

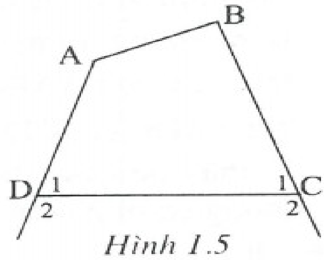
- **Bài toán giải bằng phương trình tô màu**

1.10. Có chín người trong đó bất kì ba người nào cũng có hai người quen nhau. Chứng minh rằng tồn tại một nhóm bốn người đôi một quen nhau.

Hướng dẫn giải

1.1. · **Trường hợp hai góc ngoài tại hai đỉnh kề nhau** (h.1.5)

Gọi $\widehat{C}_1$, $\widehat{D}_1$ là số đo hai góc trong; $\widehat{C}_2$, $\widehat{D}_2$ là số đo hai góc ngoài tại hai đỉnh kề nhau là C và D. Ta có:



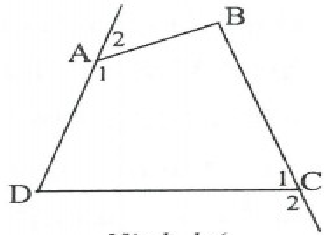
Hình 1.5

$\widehat{C}_2 + \widehat{D}_2 = \left(180^\circ - \widehat{C}_1\right) + \left(180^\circ - \widehat{D}_1\right) = 360^\circ - \left(\widehat{C}_1 + \widehat{D}_1\right)$. (1)

Xét tứ giác ABCD có: $\widehat{A} + \widehat{B} = 360^\circ - \left(\widehat{C}_1 + \widehat{D}_1\right)$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{C}_2 + \widehat{D}_2 = \widehat{A} + \widehat{B}$.

· **Trường hợp hai góc ngoài tại hai đỉnh đối nhau** (h.1.6)



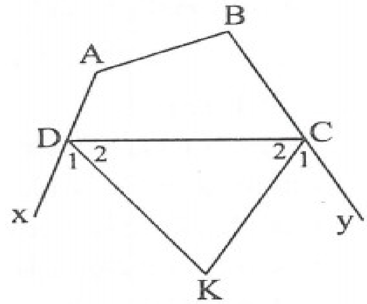
Hình 1.6

Chứng minh tương tự, ta được $\widehat{A}_2 + \widehat{C}_2 = \widehat{B} + \widehat{D}$

1.2. (h.1.7)

Ta có: $\widehat{CDx} + \widehat{DCy} = \widehat{A} + \widehat{B} = 220^\circ$. (bài 1.1).

$\Rightarrow \dfrac{\widehat{CDx} + \widehat{CDy}}{2} = 110^\circ$. Do đó $\widehat{D}_2 + \widehat{C}_2 = 110^\circ$.



Hình 1.7

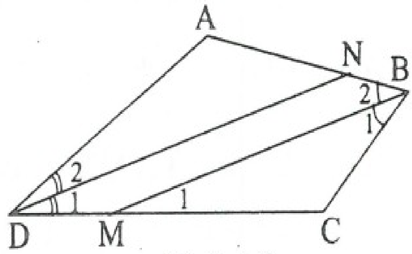
Xét ΔCKD có: $\widehat{CKD} = 180^\circ - \left(\widehat{D}_2 + \widehat{C}_2\right) = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$

1.3. (h.1.8)

Xét tứ giác ABCD có: $\widehat{B} + \widehat{D} = 360^\circ - \left(\widehat{A} + \widehat{C}\right) = 360^\circ - 2\widehat{C}$.

Vì $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$, $\widehat{D}_1 = \widehat{D}_2$ nên $\widehat{B}_1 + \widehat{D}_1 = 180^\circ - \widehat{C} \Rightarrow \widehat{B}_1 + \widehat{D}_1 + \widehat{C} = 180^\circ$.

(1)



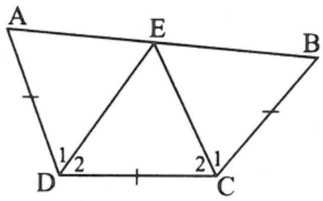
Hình 1.8

Xét ΔBCM có $\widehat{B}_1 + \widehat{M}_1 + \widehat{C} = 180^\circ$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{D}_1 = \widehat{M}_1$. Do đó $DN // BM$.

1.4. (h.1.9)

Vẽ đường phân giác của các góc $\widehat{C}$ và $\widehat{D}$ chúng cắt nhau tại E.



Hình 1.9

Xét ΔECD có $\widehat{CED} = 180^\circ - \dfrac{110^\circ + 130^\circ}{2} = 60^\circ$.

$\Delta ADE = \Delta CDE$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AED} = \widehat{CED} = 60^\circ$.

$\Delta BCE = \Delta DCE$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BEC} = \widehat{DEC} = 60^\circ$.

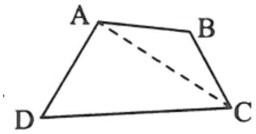
Suy ra $\widehat{AEB} = 180^\circ$ do đó ba điểm A, E, B thẳng hàng

Vậy $\widehat{BAD} = \widehat{EAD} = \widehat{ECD} = 65^\circ$. Do đó $\widehat{ABC} = 360^\circ - (65^\circ + 110^\circ + 130^\circ) = 55^\circ$.

1.5. (h.1.10)

Giả sử tứ giác ABCD có CD là cạnh dài nhất.

Ta sẽ chứng minh CD nhỏ hơn tổng của ba cạnh còn lại (1).



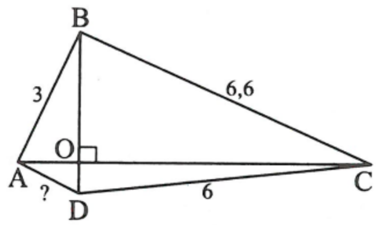
Hình 1.10

Thật vậy, xét ΔABC ta có: $AC < AB + BC$.

Xét ΔADC có: $CD < AD + AC$. Do đó $CD < AD + AB + BC$.

Ta thấy nếu các cạnh tỉ lệ với 1, 3, 5, 10 thì không thỏa mãn điều kiện (1) nên không có tứ giác nào mà các cạnh tỉ lệ với 1, 3, 5, 10.

1.6. (h.1.11)



Hình 1.11

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo.

Xét ΔAOB, ΔCOD vuông tại O, ta có:

$AB^2 + CD^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2$.

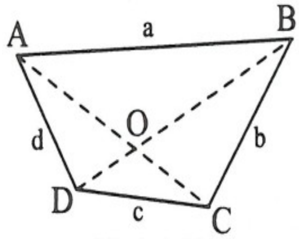
Chứng minh tương tự, ta được:

$BC^2 + AD^2 = OB^2 + OC^2 + OD^2 + OA^2$.

Do đó: $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$.

Suy ra: $3^2 + 6^2 = 6,6^2 + AD^2 \Rightarrow AD^2 = 9 + 36 - 43,56 = 1,44 \Rightarrow AD = 1,2$.

1.7. (h1.12)



Hình 1.12

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD của tứ giác ABCD.

Gọi độ dài các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt là a, b, c, d. Vận dụng bất đẳng thức tam giác ta được:

$OA + OB > a;\ OC + OD > c$.

Do đó $(OA + OC) + (OB + OD) > a + c$ hay $AC + BD > a + c$. (1)

Chứng minh tương tự, ta được: $AC + BD > d + b$. (2)

Cộng từng vế của (1) và (2), ta được:

$$2(AC + BD) > a + b + c + d \Rightarrow AC + BD > \frac{a + b + c + d}{2}$$

Xét các ΔABC và ΔADC ta có: $AC < a + b;\ AC < c + d$

$\Rightarrow 2AC < a + b + c + d$. (3)

Tương tự có: $2BD < a + b + c + d$. (4)

Cộng từng vế của (3) và (4) được: $2(AC + BD) < 2(a + b + c + d)$

$\Rightarrow AC + BD < a + b + c + d$.

Từ các kết quả trên ta được điều phải chứng minh.

1.8. • Trước hết ta chứng minh một bài toán phụ:

Cho ΔABC, $\widehat{A} \ge 90^\circ$. Chứng minh rằng $BC^2 \ge AB^2 + AC^2$.

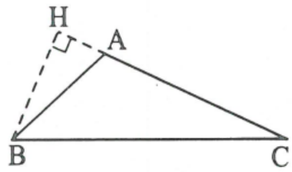
Giải (h.1.13).

Vẽ $BH \perp AC$. Vì $\widehat{A} \ge 90^\circ$ nên H nằm trên tia đối của tia AC.

Xét ΔHBC và ΔHBA vuông tại H, ta có:

$BC^2 = HB^2 + HC^2 = \left(AB^2 - HA^2\right) + \left(HA + AC\right)^2$

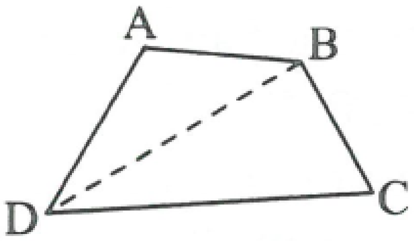
$= AB^2 - HA^2 + HA^2 + AC^2 + 2HA.AC = AB^2 + AC^2 + 2HA.AC$.



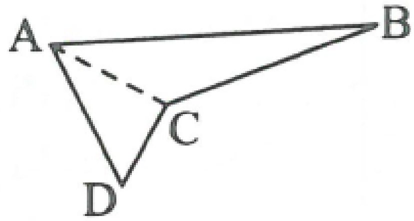
Hình 1.13

Vì $HA.AC \geq 0$ nên $BC^2 \geq AB^2 + AC^2$ (dấu "=" xảy ra khi $H \equiv A$ tức là khi ΔABC vuông).

- Vận dụng kết quả trên để giải bài toán đã cho



Hình 1.14



Hình 1.15

Trường hợp tứ giác ABCD là tứ giác lồi (h.1.14)

Ta có: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^\circ$.

Suy ra trong bốn góc này phải có một góc lớn hơn hoặc bằng 90°, giả sử $\widehat{A} \geq 90^\circ$.

Xét ΔABD ta có $BD^2 \geq AB^2 + AD^2 > 10^2 + 10^2 = 200$ suy ra $BD > \sqrt{200}$, do đó $BD > 14$.

Trường hợp tứ giác ABCD là tứ giác lõm (h.1.15)

Nối CA, Ta có: $\widehat{ACD} + \widehat{ACB} + \widehat{BCD} = 360^\circ$.

Suy ra trong ba góc này phải có một góc lớn hơn hoặc bằng 120°.

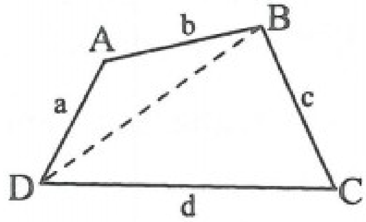
Giả sử $\widehat{ACB} \geq 120^\circ$, do đó $\widehat{ACB}$ là góc tù

Xét ΔACB có $AB^2 \geq AC^2 + BC^2 > 10^2 + 10^2 = 200$.

Suy ra $AB > \sqrt{200} \Rightarrow AC > 14$.

Vậy luôn tồn tại hai điểm đã cho có khoảng cách lớn hơn 14.

1.9. (h.1.16)



Hình 1.16

Ta chứng minh bằng phương pháp phản chứng.

Giả sử không có hai cạnh nào của tứ giác bằng nhau.

Ta có thể giả sử $a < b < c < d$.

Ta có: $a + b + c > BD + c > d$.

Do đó $a + b + c + d > 2d$. Ta đặt $a + b + c + d = S$ thì $S > 2d$. (*)

Ta có: $S \vdots a \Rightarrow S = ma \left(m \in N\right)$ (1)

$S \vdots b \Rightarrow S = nb \left(n \in N\right)$ (2)

$S \vdots c \Rightarrow S = pc \left(p \in N\right)$ (3)

$S \vdots d \Rightarrow S = qd\left(q \in N\right)$ (4)

Từ (4) và (*) $\Rightarrow qd > 2d$ do đó $q > 2$.

Vì $a < b < c < d$ nên từ (1), (2), (3), (4) suy ra $m > n > p > q > 2$.

Do đó $q \geq 3; p \geq 4; n \geq 5; m \geq 6$.

Từ (1), (2), (3), (4) suy ra $\frac{1}{m} = \frac{a}{S}; \frac{1}{n} = \frac{b}{S}; \frac{1}{p} = \frac{c}{S}; \frac{1}{q} = \frac{d}{S}$.

Ta có: $\frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \geq \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{a+b+c+d}{S} = 1$.

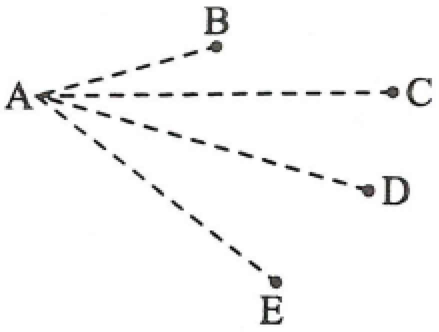
Từ đó: $\frac{19}{20} \geq 1$, vô lí.

Vậy điều giả sử là sai, suy ra tồn tại hai cạnh của tứ giác bằng nhau.

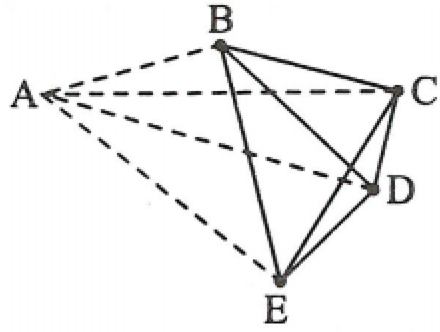
1.10. Coi mỗi người như một điểm, ta có chín điểm A, B, C,…

Nối hai điểm với nhau ta được một đoạn thẳng. Ta tô màu xanh nếu hai người không quen nhau, ta tô màu đỏ nếu hai người quen nhau. Ta sẽ chứng minh tồn tại một tứ giác có các cạnh và đường chéo cùng tô màu đỏ.

· Trường hợp có một điểm là đầu mút của bốn đoạn thẳng màu xanh AB, AC, AD, AE vẽ nét đứt (h.1.17)



Hình 1.17



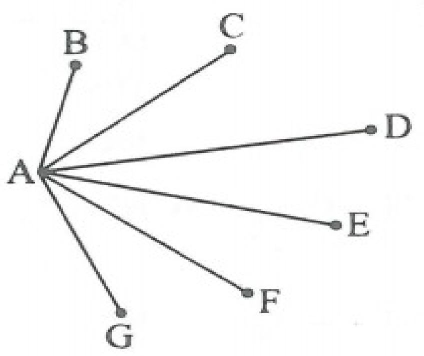
Hình 1.18

Xét ΔABC có hai đoạn thẳng AB, AC màu xanh nên đoạn thẳng BC màu đỏ vì bất kì tam giác nào cũng có một đoạn thẳng màu đỏ. Tương tự các đoạn thẳng CD, DE, EB, BD, CE cũng có màu đỏ (vẽ nét liền) (h.1.18). Do đó tứ giác BCDE có các cạnh và đường chéo được tô đỏ nghĩa là tồn tại một nhóm bốn người đôi một quen nhau.

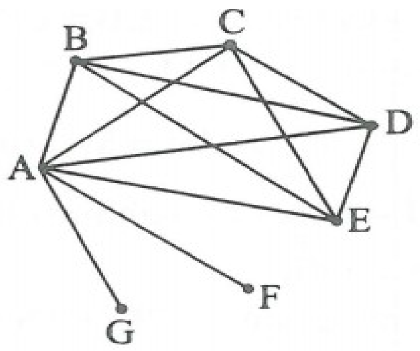
· Trường hợp mọi điểm đều là đầu mút của nhiều nhất là ba đoạn thẳng màu xanh. Không thể mọi điểm đều là đầu mút của ba đoạn thẳng màu xanh vì khi đó số đoạn thẳng màu xanh là $\frac{9.3}{2} \notin N$.

Như vậy tồn tại một điểm là đầu mút của nhiều nhất là hai đoạn thẳng màu xanh, chẳng hạn đó là điểm A, do đó A là đầu mút của ít nhất là sáu đoạn thẳng màu đỏ, giả sử đó là AB, AC, AD, AE, AF, AG (h.1.19)

Trong sáu điểm B, C, D, E, F, G tồn tại ba điểm là đỉnh của một tam giác có ba cạnh cùng màu (đây là bài toán cơ bản về phương pháp tô màu) chẳng hạn đó là ΔBCD (h.1.20).



Hình 1.19



Hình 1.20

Trong ΔBCD có một cạnh màu đỏ (theo đề bài) nên ba cạnh của ΔBCD cùng màu đỏ. Khi đó tứ giác ABCD là tứ giác có các cạnh và đường chéo được tô đỏ, nghĩa là tồn tại một nhóm bốn người đôi một quen nhau.