Sở Giáo dục-Đào tạo **KỲ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 12-THPT**

TP.Hồ Chí Minh **CẤP THÀNH PHỐ**

Năm học 2010 - 2011 (khóa ngày 3/3/2011)

MÔN TOÁN

Thời gian làm bài : 180 phút (không kể thời gian phát đề)

ĐỀ CHÍNH THỨC

Bài 1. (2 điểm)

Giải phương trình : $2\sin 2x - \cos 2x = 7\sin x + 2\cos x - 4$

Bài 2. (6 điểm)

a) Chứng minh $ad + bc \le \sqrt{a^2 + b^2}.\sqrt{c^2 + d^2}$ với a, b, c, d là các số thực.

b) Cho ba số thực dương a, b, c thoả: $a + b + c \ge \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Chứng minh rằng: $a + b + c \ge \frac{3}{a+b+c} + \frac{2}{abc}$.

c)Cho $x, y, z \in R$ thỏa $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của $A = x + y + z - xyz$.

Bài 3. (2 điểm)

Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $n^4 + n^3 + 1$ là số chính phương.

Bài 4. (2 điểm) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + 3xy^2 = -49 \\ x^2 - 8xy + y^2 = 8y - 17x \end{cases}$$

Bài 5. (2 điểm)

Định m để phương trình sau có nghiệm: $\sqrt{1-x} - \sqrt{x} + m\sqrt{x - x^2} = 2$

Bài 6. (4 điểm)

Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với (ABCD), SA = a. Xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung của AC và SD.

Bài 7. (2 điểm)

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = 2x^2 - xy + 2y^2$ với x, y là các số thực thỏa mãn $x^2 - xy + y^2 = 3$.

HẾT

ĐÁP ÁN :

Bài 1 : *(2 điểm)*

Giải phương trình : $2\sin 2x - \cos 2x = 7\sin x + 2\cos x - 4$

Giải : $2\sin 2x - \cos 2x = 7\sin x + 2\cos x - 4$

$\Leftrightarrow 4\sin x\cos x - (1 - 2\sin^2 x) - 7\sin x - 2\cos x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos x(2\sin x - 1) + 2\sin^2 x - 7\sin x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos x(2\sin x - 1) + (2\sin x - 1)(\sin x - 3) = 0$

$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)(2\cos x + \sin x - 3) = 0$

$\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \ v\, x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi (k \in Z)$

Bài 2 : *(6 điểm)* **<u>Mỗi câu 2 điểm</u>**

a) Chứng minh : $ad + bc \le \sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{c^2+d^2}$ với a, b, c, d là các số thực.

Nếu $ad + bc < 0$: Bất đẳng thức đúng.

Nếu $ad + bc \ge 0$:

Bất đẳng thức tương đương với : $(ad + bc)^2 \le (a^2+b^2)(c^2+d^2)$

$\Leftrightarrow a^2d^2 + b^2c^2 + 2abcd \le a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2$

$\Leftrightarrow 2abcd \le a^2c^2 + b^2d^2 \Leftrightarrow (ac - bd)^2 \ge 0$ (đúng)

b)Cho ba số thực dương a, b, c thoả: $a + b + c \ge \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Chứng minh rằng: $a + b + c \ge \frac{3}{a+b+c} + \frac{2}{abc}$.

Giải

Ta có $a + b + c \ge \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \ge \frac{9}{a+b+c} \Rightarrow a + b + c \ge 3$.

$$(a + b + c)^2 = \frac{1}{3}(a+b+c)^2 + \frac{2}{3}(a+b+c)^2$$

$$\ge 3 + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2$$

$$\geq 3 + \frac{2}{3}\left[3\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)\right]$$

$$= 3 + 2\frac{a+b+c}{abc}$$

$$\Rightarrow a + b + c \geq \frac{3}{a+b+c} + \frac{2}{abc} \text{ (đpcm).}$$

c)Cho x, y, z $\in$ R thỏa $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của $A = x + y + z - xyz$.

<u>Giải</u> :

$$A = x(1 - yz) + (y + z) \leq \sqrt{x^2+(y+z)^2}.\sqrt{(1-yz)^2+1^2} = \sqrt{2+2yz}.\sqrt{2-2yz+y^2z^2} = B$$

Đặt $t = yz \leq \frac{y^2+z^2}{2} \leq \frac{x^2+y^2+z^2}{2} = 1 \Rightarrow t^3 \leq t^2$.

Do đó:

$$B = \sqrt{(2+2t)(2-2t+t^2)} = \sqrt{2\left(t^3-t^2+2\right)} \leq 2$$

$\Rightarrow A \leq 2$.

Khi x = 0, y = z = 1 thì A = 2.

Vậy Max A = 2.

Bài 3 : *(2 điểm)*

Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $n^4 + n^3 + 1$ là số chính phương.

<u>Giải</u> :

Ta tìm n thỏa $\begin{cases} n \in N* \\ n^4+n^3+1 = m^2 \quad (m \in N*) \end{cases}$ (I)

Ta có $m^2=n^4+n^3+1> n^4 \Rightarrow m>n^2 \Rightarrow m=n^2+k \ (k\in N*) \Rightarrow n^4+n^3+1=(n^2+k)^2 \Rightarrow n^2(n-2k)=k^2-1 \geq 0$

Nếu $k^2-1>0$ thì $n-2k \in N* \Rightarrow k^2-1 \geq n^2 \Rightarrow k^2>n^2 \Rightarrow n < k$ mâu thuẫn với $n-2k \in N*$

Vậy phải có $k^2-1=0 \Rightarrow k=1$ và $n^2(n-2)=0 \Rightarrow n=2$ (Khi đó m=5)

Vậy có duy nhất một số nguyên dương n thỏa $n^4 + n^3 + 1$ là số chính phương , đó là n=2

Bài 4: (2 điểm) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + 3xy^2 = -49 \\ x^2 - 8xy + y^2 = 8y - 17x \end{cases}$$

Giải

$$\begin{cases} x^3 + 3xy^2 = -49 & (1) \\ x^2 - 8xy + y^2 = 8y - 17x & (2) \end{cases}$$

(1) + 3.(2) ta được:

$$x^3 + 3xy^2 + 3x^2 - 24xy + 3y^2 = -49 + 24y - 51x$$

$\Leftrightarrow \quad x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 3y^2(x + 1) - 24y(x + 1) + 48(x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \quad (x + 1)^3 + (x + 1)(3y^2 - 24y + 48) = 0$

$\Leftrightarrow \quad (x + 1)[(x + 1)^2 + 3(y - 4)^2] = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ \begin{cases} x = -1 \\ y = 4 \end{cases} \end{array}\right.$$

* Thay x = –1 vào (1) ta được $-1 - 3y^2 = -49 \Leftrightarrow y^2 = 16 \Leftrightarrow y = \pm 4$.

Vậy hệ có hai nghiệm là (–1; 4), (–1; –4).

Bài 5. Định m để phương trình sau có nghiệm: $\sqrt{1-x} - \sqrt{x} + m\sqrt{x - x^2} = 2$

Giải

Đặt $t = \sqrt{1-x} - \sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x - x^2} = \dfrac{1-t^2}{2}$ $(-1 \le t \le 1)$

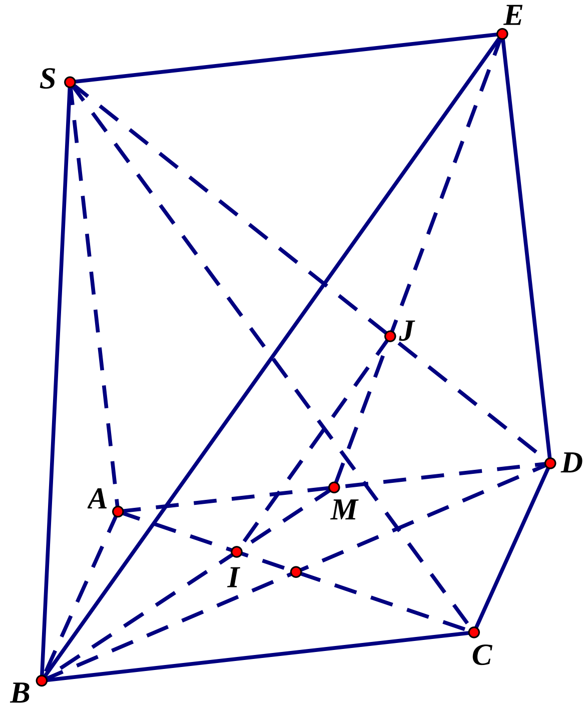
Phương trình trở thành $t + m.\dfrac{1-t^2}{2} = 2 \Leftrightarrow m = \dfrac{2t-4}{t^2-1}$ $\quad t \in (-1,1)$

Xét hàm số y = f(t) = $\dfrac{2t-4}{t^2-1}$ với $t \in (-1,1)$

t	-1		$2-\sqrt{3}$		1
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$2+\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $m \geq 2+\sqrt{3}$

Bài 6. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với (ABCD), SA = a. Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của AC và SD.



Giải

Gọi M là trung điểm của AD. I là giao điểm của BM và AC, J là giao điểm của EM và SD (E là đỉnh của hình vuông SADE).

Ta có $\frac{IM}{IB} = \frac{AM}{BC} = \frac{1}{2}$, $\frac{JM}{JE} = \frac{DM}{SE} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{IM}{IB} = \frac{JM}{JE} \Rightarrow IJ \,//\, BE$ và $IJ = \frac{1}{3}BE$

$AC \perp (BDE) \Rightarrow AC \perp BE \Rightarrow AC \perp IJ$

$SD \perp (BAE) \Rightarrow SD \perp BE \Rightarrow SD \perp IJ$

Vậy IJ là đoạn vuông góc chung của AC và SD.

$BE = a\sqrt{3} \Rightarrow IJ = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Bài này cũng có thể giải bằng phương pháp tọa độ

Bài 7. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức A = $2x^2 - xy + 2y^2$ với x, y là các số thực thỏa mãn $x^2 - xy + y^2 = 3$.

Giải

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{2t^2 - t + 2}{t^2 - t + 1}$ (*)

Ta có $f(t) = 3 - \dfrac{(t-1)^2}{t^2 - t + 1} \le 3$ và $f(t) = \dfrac{5}{3} + \dfrac{(t+1)^2}{3(t^2 - t + 1)} \ge \dfrac{5}{3} \Rightarrow \dfrac{5}{3} \le f(t) \le 3$

(có thể tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của f(t) bằng giải tích)

Với y = 0 ta có A = 6

Với y ≠ 0, thay t = $\dfrac{x}{y}$ vào (*) ta có: $\dfrac{5}{3} \le \dfrac{2x^2 - xy + y^2}{x^2 - xy + y^2} \le 3 \Rightarrow 5 \le A \le 9$

Vậy giá trị lớn nhất của A là 9 khi x = y

giá trị nhỏ nhất của A là 5 khi x = – y