CHỨNG MINH CỦA ERDOS ĐỐI VỚI BỔ ĐỀ BERTRAND

VỀ CÁC SỐ NGUYÊN TỐ

****

I. Giới thiệu.

Vào năm 1832, Bertrand phát biểu một bổ đề về số nguyên tố rằng: *"Giữa hai số tự nhiên n và 2n, luôn tồn tại một số nguyên tố,* $n > 0$ *"* và ông đã chứng minh được rằng nó đúng với mọi n bé hơn 3 triệu nhưng chưa biết rằng nó thực sự đúng với mọi số tự nhiên n hay không. Năm năm sau, Tchebyshev đã có một chứng minh sử dụng phương pháp giải tích cho bổ đề trên và nó đã được công nhận. Đến năm 1932, Erdos cũng đã đưa ra một chứng minh sơ cấp cho bổ đề trên, chỉ sử dụng các kiến thức và các đánh giá đơn giản. Dưới đây, chúng ta sẽ cùng tìm hiểu rõ chứng minh này.

II. Bổ đề và chứng minh.

1. Bổ đề Bertrand.

"Với mọi số tự nhiên $n > 0$***, tồn tại ít nhất một số nguyên tố p thỏa mãn*** $n < p \le 2n$***."***

2. Các bổ đề phụ.

Trước hết, gọi $o_p(n)$ là số mũ lớn nhất của số nguyên tố p trong phân tích tiêu chuẩn của số nguyên dương n. Khi đó, với mọi số nguyên dương a, b thì:

$o_p(ab) = o_p(a).o_p(a)$ và $o_p\left(\left[\dfrac{a}{b}\right]\right) = o_p(a) - o_p(b)$.

- **Bổ đề 1.**

Nếu không có số nguyên tố nào nằm giữa n và 2n thì tất cả các ước nguyên tố của C_{2n}^n *sẽ nằm trong khoảng từ 2 đến* $\dfrac{2n}{3}$.

Chứng minh.

Xét giá trị $C_{2n}^n = \dfrac{(2n)!}{n!.n!}$, với p là số nguyên tố thỏa mãn $\dfrac{2n}{3} < p \le 2n$ thì:

$o_p(C_{2n}^n) = o_p\left(\dfrac{(2n)!}{n!.n!}\right) = o_p\left((2n)!\right) - 2o_p\left(n!\right) = 2 - 2.1 = 0$, nghĩa là C_{2n}^n không có ước nguyên tố nào thỏa mãn $\dfrac{2n}{3} < p \le n$.

Do đó, nếu tồn tại số nguyên dương n thỏa mãn rằng không tồn tại số nguyên tố nào với $n < p \le 2n$ thì tất cả các ước nguyên tố của C_{2n}^n sẽ nằm trong khoảng từ 2 đến $\dfrac{2n}{3}$.

- **Bổ đề 2.**

Với n là số nguyên dương, nếu p là ước nguyên tố của C_{2n}^{n} *thì* $p^{o_p\left(C_{2n}^{n}\right)} \le 2n$.

Chứng minh.

Gọi $r(n)$ là số nguyên dương thỏa mãn $p^{r(p)} \le 2n < p^{r(p)+1}$. Áp dụng bất đẳng thức về phần nguyên $0 \le [2x] - 2[x] \le 1$ với mọi số thực x, ta có:

$$o_p(C_{2n}^{n}) = o_p\left(\frac{(2n)!}{n!.n!}\right) = o_p\left((2n)!\right) - 2o_p\left(n!\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{2n}{p^i}\right] - 2\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^i}\right] = \sum_{i=1}^{r(p)}\left[\frac{2n}{p^i}\right] - 2\sum_{i=1}^{r(p)}\left[\frac{n}{p^i}\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{r(p)}\left(\left[\frac{2n}{p^i}\right] - 2\left[\frac{n}{p^i}\right]\right) \le \sum_{i=1}^{r(p)} 1 = r(p)$$

Do đó: $p^{o_p\left(C_{2n}^{n}\right)} \le p^{r(p)} \le 2n$. Ta có đpcm.

- **Bổ đề 3.**

Tích của tất cả các số nguyên tố không vượt quá n thì không vượt quá 4^n.

Chứng minh.

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp rằng $\prod_{p \le n} p \le 4^n$ (kí hiệu p là số nguyên tố). (*)

- Với $n = 2, 3$, mệnh đề (*) hiển nhiên đúng.
- Xét n là số chẵn và mệnh đề (*) đúng đến $n-1$, vì n là số chẵn nên không thể là số nguyên tố, do đó, ta có: $\prod_{p \le n} p = \prod_{p \le n-1} p \le 4^{n-1} < 4^n$.
- Xét n là số lẻ và mệnh đề (*) đúng đến $n-1$. Đặt $n = 2m+1, m \in \mathbb{N}$. Khi đó:

$$\prod_{p \le n} p = \prod_{p \le m+1} p. \prod_{m+1 < p \le 2m+1} p \le 4^{m+1}.\frac{(2m+1)!}{(m+1)!} = 4^{m+1}.C_{2m+1}^{m}.$$

Ta cũng có $\sum_{i=0}^{2m+1} C_{2m+1}^{i} = 2^{2m+1}$, mà $C_{2m+1}^{m} = C_{2m+1}^{m+1}$ nên $2C_{2m+1}^{m+1} + \sum_{0 \le i \le 2m+1, i \ne m+1, i \ne m} C_{2m+1}^{i} = 2^{2m+1}$ nên:

$2C_{2m+1}^{m+1} \le 2^{2m+1} \Rightarrow C_{2m+1}^{m+1} \le 4^m$. Do đó:

$$\prod_{p \le n} p \le 4^{m+1}.C_{2m+1}^{m} \le 4^{m+1}.4^m = 4^{2m+1}.$$

Suy ra (*) cũng đúng với n, theo nguyên lí quy nạp (*) đúng với mọi số tự nhiên n.

- **Bổ đề 4.**

Với mọi số nguyên dương n thì $C_{2n}^{n} \ge \frac{4^n}{2n+1}$.

Chứng minh.

Ta sẽ chứng minh bổ đề này bằng quy nạp.

- Với $n=1$, bổ đề hiển nhiên đúng.

- Giả sử bổ đề đúng đến $n=k\ge 1$, tức là $C_{2k}^{k}\ge \dfrac{4^k}{2k+1}$, ta cần chứng minh rằng nó cũng đúng với $n=k+1$, tức là $C_{2k+2}^{k+1}\ge \dfrac{4^{k+1}}{2k+3}$.

Ta có: $C_{2k+2}^{k+1}=\dfrac{(2k+2)!}{(k+1)!.(k+1)!}=\dfrac{(2k)!}{k!.k!}.\dfrac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2}\ge \dfrac{4^k}{2k+1}.\dfrac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2}=\dfrac{4.4^k}{2k+2}>\dfrac{4^{k+1}}{2k+3}$.

Do đó, bổ đề đúng với $n=k+1$.

Theo nguyên lí quy nạp, bổ đề được chứng minh.

3. Chứng minh bổ đề Bertrand.

Ta xét dãy số nguyên tố sau: $2,3,5,7,13,23,43,83,163,631,1259$, trong đó mỗi số hạng liền sau nhỏ hơn 2 lần số hạng liền trước. Điều đó có nghĩa là với mọi $n<1024$ thì trong tập hợp $\{n+1,n+2,n+3,...,2n-1,2n\}$ luôn tồn tại ít nhất một số nguyên tố (là một trong các số nguyên tố của dãy trên). Thật vậy, vì nếu ngược lại, tồn tại một tập hợp không thỏa mãn điều kiện vừa nêu thì ta gọi p là số nguyên tố thuộc dãy trên và gần với $n+1$ nhất; do p không thuộc tập hợp $\{n+1,n+2,n+3,...,2n-1,2n\}$ nên $p<n+1\Rightarrow p\le n\Rightarrow 2p\le 2n$, tức là số nguyên tố liền sau của p sẽ nhỏ hơn 2n, nghĩa là nó sẽ thuộc tập hợp $\{n+1,n+2,n+3,...,2n-1,2n\}$, mâu thuẫn.

Do đó, bổ đề Bertrand đúng với mọi $n<1024$.

Giả sử tồn tại số nguyên dương n sao cho không có số nguyên tố nào nằm giữa n và 2n, với nhận xét trên thì ta chỉ cần xét $n\ge 1024$ và khi đó, theo bổ đề 1 thì mọi ước nguyên tố của C_{2n}^{n} nằm giữa 2 và $\dfrac{2n}{3}$. Theo bổ đề 2 và 3, ta có đánh giá sau:

$$C_{2n}^{n}=\prod_{2\le p\le \frac{2n}{3}}p\le \prod_{2\le p\le\sqrt{2n}}p.\prod_{\sqrt{2n}\le p\le\frac{2n}{3}}p\le \prod_{1\le p\le\sqrt{2n}}p.\prod_{1\le p\le\frac{2n}{3}}p\le (2n)^{\sqrt{2n}}.4^{\frac{2n}{3}}.$$

(chú ý rằng $\prod_{1\le p\le\sqrt{2n}}p\le (2n)^{\sqrt{2n}}$ suy ra từ số các ước nguyên tố của C_{2n}^{n} không vượt quá $\sqrt{2n}$ thì nhỏ hơn $\sqrt{2n}$ và mỗi ước đó đóng góp không quá 2n vào giá trị của C_{2n}^{n} theo bổ đề 2).

Theo bổ đề 4: $\dfrac{4^n}{2n+1}\le (2n)^{\sqrt{2n}}.4^{\frac{2n}{3}}\Leftrightarrow 4^{\frac{n}{3}}\le (2n+1).(2n)^{\sqrt{2n}}\Leftrightarrow \dfrac{2n}{3}\le \log_2(2n+1)+\sqrt{2n}.\log_2(2n)$.

Xét $n=1024$, bất đẳng thức trên trở thành $\dfrac{2048}{3}\le \log_2 2049+\sqrt{2048}.\log_2 2048$, nhưng ta thấy rằng $\dfrac{2048}{3}>\dfrac{2046}{3}=682$ và

$$\log_2 2049+\sqrt{2048}.\log_2 2048<\log_2 4096+\sqrt{2048}.\log_2 2048=12+32\sqrt{2}.11<12+32.\frac{3}{2}.11=540.$$

Do đó bất đẳng thức trên không đúng với $n = 1024$ và dễ thấy rằng vế trái tăng nhanh hơn vế phải nên bất đẳng thức $\frac{2n}{3} \le \log_2(2n+1) + \sqrt{2n}.\log_2(2n)$ cũng không đúng với mọi $n > 1024$.

Điều mâu thuẫn này dẫn đến điều giả sử ban đầu là sai.

Vậy với mọi số tự nhiên $n > 0$, tồn tại ít nhất một số nguyên tố p thỏa mãn $n < p \le 2n$.

Bổ đề Bertrand được chứng minh hoàn toàn.

III. Một số vấn đề liên quan.

1.Định lí của Greenfield.

Với mọi n nguyên dương, tập hợp $\{1, 2, 3, ..., 2n-1, 2n\}$ *có thể được phân chia thành n cặp:*

$$\{a_1, b_1\}, \{a_2, b_2\}, \{a_3, b_3\}, ..., \{a_n, b_n\}$$

thỏa mãn: với mọi $i = 1, 2, 3, ..., n$ *thì tổng* $a_i + b_i$ *là số nguyên tố.*

Chứng minh.

Ta sẽ chứng minh định lí này bằng quy nạp.

- Với $n = 1$, định lí hiển nhiên đúng.
- Giả sử định lí đúng đến $n-1$, ta cần chứng minh rằng nó cũng đúng với n. Thật vậy:

Theo bổ đề Bertrand, tồn tại số nguyên tố p nằm giữa 2n và 4n, tức là $p = 2n + m$ với $1 \le m < 2n$.

Do m là số lẻ nên nếu ta chia tập hợp $\{1, 2, 3, ..., 2n\}$ thành hai tập hợp rời nhau $\{1, 2, 3, ..., m-1\}$ và $\{m, m+1, ..., 2n-1, 2n\}$, đồng thời mỗi tập như thế có số phần tử là chẵn.

Theo giả thiết quy nạp thì ta có thể chia $\{1, 2, 3, ..., m-1\}$ thành $\frac{m-1}{2}$ cặp có tổng là số nguyên tố.

Đồng thời ta thấy rằng có thể chia các số thuộc tập $\{m, m+1, ..., 2n-1, 2n\}$ thành $\frac{2n-m+1}{2}$ cặp có tổng là $(2n-k) + (m+k) = 2n + m, 0 \le k \le \frac{2n-m-1}{2}$ và $2n + m = p$ là số nguyên tố.

Do đó, theo nguyên lí quy nạp, định lí đúng với mọi số nguyên dương n nên ta có đpcm.

2. Định lí về đánh giá mật độ các số nguyên tố.

Tồn tại hai hằng số dương c và C thỏa mãn với mọi số thực x thì:

$\frac{c.\ln x}{x} \le \pi(x) \le \frac{C.\ln x}{x}$ *trong đó* $\pi(x)$ *chính là số các số nguyên tố không vượt quá x.*

Chứng minh.

Xét số nguyên dương n thỏa mãn $C_{2n}^{n} \le \pi(x) \le C_{2n+2}^{n+1}$.

Theo bổ đề 4 thì $C_{2n}^{n} \ge \frac{4^n}{2n+1}$, mà với $n \ge 3$ thì $2^n \ge 2n+1$ nên

$$C_{2n}^{n} \ge \frac{4^n}{2n+1} = 2^n.\frac{2^n}{2n+1} \ge 2^n \Rightarrow \log_2 C_{2n}^{n} \ge n, \forall n \ge 3.$$

Ta cũng có: $C_{2n}^{n}:C_{2n+2}^{n+1}=\frac{(2n)!}{n!.n!}:\frac{(2n+2)!}{(n+1)!.(n+1)!}=\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}>\frac{(n+1)^2}{(2n+2)^2}=\frac{1}{4}$.

Do đó: $\frac{\pi(x).\ln x}{x}\geq\frac{\pi(C_{2n}^{n}).\ln C_{2n}^{n}}{C_{2n+2}^{n+1}}\geq\frac{n.\pi(C_{2n}^{n})}{4C_{2n}^{n}}$.

Theo bổ đề 2, mỗi số nguyên tố là ước C_{2n}^{n} đóng góp không quá $2n$ vào giá trị của C_{2n}^{n} nên $\pi(C_{2n}^{n})\geq\frac{C_{2n}^{n}}{2n}$, suy ra: $\frac{\pi(x).\ln x}{x}\geq\frac{n.\pi(C_{2n}^{n})}{4C_{2n}^{n}}\geq\frac{1}{8}\Leftrightarrow\pi(x)\geq\frac{x}{8.\ln x}$.

Theo bổ đề 3, ta cũng có:

$$4^x\geq\prod_{p\leq x}p\geq x^{\frac{\pi(x)-\pi(x/2)}{2}}\Rightarrow 2x\geq\frac{\pi(x)-\pi(x/2)}{2}.\log_2 x\Leftrightarrow\pi(x)\leq\frac{4x}{\log_2 x}+\pi(x/2).$$

Tiếp tục thực hiện đánh giá này $[\log_2 x]$ lần nữa, ta có:

$$\pi(x)\leq\frac{8x}{\log_2 x}+\pi(2)\leq\frac{9x}{\log_2 x}=\frac{9\ln 2.x}{\ln x}.$$

Do đó, ta có thể chọn $c=\frac{1}{8}, C=9\ln 2$. Vậy định lí được chứng minh.

Người ta cũng chứng minh được rằng $\pi(x)\to\frac{x}{\ln x}$ khi $x\to\infty$.

3.Các kết quả mạnh hơn bổ đề Bertrand.

(1) Với mọi $\varepsilon>0$, tồn tại $n(\varepsilon)>0$ sao cho: với $n>n(\varepsilon)$ thì luôn tồn tại số nguyên tố p thỏa mãn: $n<p\leq n+n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{22}+\varepsilon}$.

(2) Với mọi $\varepsilon>0$, tồn tại $n(\varepsilon)>0$ sao cho: với $n>n(\varepsilon)$ thì luôn tồn tại số nguyên tố p thỏa mãn: $n<p\leq n+n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$.

(3) Với mọi $\varepsilon>0$, tồn tại $n(\varepsilon)>0$ sao cho: với $n>n(\varepsilon)$ thì luôn tồn tại số nguyên tố p thỏa mãn: $n<p\leq n+(1+\varepsilon)\ln^2 n$.

Một câu hỏi thú vị liên quan đến bổ đề Bertrand này là: ***"Có đúng hay không khi cho rằng với mọi số nguyên dương*** $n>1$***, luôn tồn tại một số nguyên tố p với*** $n^2<p\leq(n+1)^2$ ***?".***

Đây vẫn là một câu hỏi mở.