

Bài 22. Phương trình - BPT - Logarit - Mũ
Thời gian làm bài: 40 phút (Không kể thời gian giao đề)

Họ tên thí sinh:

Số báo danh:

PHẦN E. CÂU HỎI TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1. Tìm nghiệm phương trình $\sqrt{2} \cdot 2^{3x+1} = 8$

Lời giải

Lời giải

$$\sqrt{2} \cdot 2^{3x+1} = 8 \Leftrightarrow 2^{3x+1} = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow 3x+1 = \log_2 4\sqrt{2} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \frac{1}{2}$.

Câu 2. Dân số ở một địa phương được ước tính theo công thức $S = A \cdot e^{rt}$, trong đó A không đổi là dân số của năm 2023, S là dân số sau t năm, r là tỉ lệ tăng dân số hằng năm. Hỏi đến năm nào thì dân số ở địa phương đó sẽ đạt gấp đôi dân số năm 2023? Biết $r = 1,13\%$ / năm.

Lời giải

Hướng dẫn giải

Dân số đạt gấp đôi nghĩa là $S = 2A$, ta có:

$$2A = A \cdot e^{1,13\% \cdot t} \Leftrightarrow e^{1,13\% \cdot t} = 2 \Leftrightarrow 1,13\% \cdot t = \ln_e 2 \Leftrightarrow t = \frac{\ln 2}{1,13\%} \approx 61,34 \text{ (do } e > 1 \text{)}.$$

Vậy sau 62 năm tức đến năm 2085 thì dân số ở địa phương đó sẽ gấp đôi dân số năm 2023.

Câu 3. Giả sử giá trị còn lại (tính theo triệu đồng) của một chiếc ô tô sau t năm sử dụng được mô hình hoá bằng công thức: $V(t) = A \cdot (0,905)^t$, trong đó A là giá xe (tính theo triệu đồng) lúc mới mua. Hỏi nếu theo mô hình này, sau bao nhiêu năm sử dụng thì giá trị của chiếc xe đó còn lại không quá 300 triệu đồng? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị). Biết $A = 780$ (triệu đồng).

Lời giải

Hướng dẫn giải

Ta có: $V(t) \leq 300 \Leftrightarrow 780 \cdot (0,905)^t \leq 300$

$$\Leftrightarrow (0,905)^t \leq \frac{5}{13} \Leftrightarrow t \geq \log_{0,905} \left(\frac{5}{13} \right) \approx 9,6 \text{ (do } 0 < 0,905 < 1 \text{)}.$$

Vậy sau khoảng 10 năm sử dụng, giá trị chiếc xe đó còn lại không quá 300 triệu đồng.

Câu 4. Anh Hưng gửi tiết kiệm khoản tiền 700 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 7% / năm theo hình thức lãi kép kì hạn 12 tháng. Tính thời gian tối thiểu gửi tiết kiệm để anh Hưng thu được ít nhất 1 tỉ đồng (cả vốn lẫn lãi). Cho biết công thức lãi kép là $T = A \cdot (1+r)^n$, trong đó A là tiền vốn, T là tiền vốn và lãi nhận được sau n năm, r là lãi suất/năm.

Lời giải

Hướng dẫn giải

$$T \geq 1000 \Leftrightarrow 700(1+7\%)^n \geq 1000 \Leftrightarrow 1,07^n \geq \frac{10}{7}$$

Ta có:

$$\Leftrightarrow n \geq \log_{1,07} \left(\frac{10}{7} \right) \approx 5,27 \text{ (do } 1,07 > 1 \text{)}.$$

Vậy thời gian gửi tiết kiệm phải ít nhất 6 năm thì anh Hưng mới thu được ít nhất 1 tỉ đồng.

$$L = 10 \log \left(\frac{I}{10^{-12}} \right)$$

Câu 5. Mức cường độ âm L (đơn vị: dB) được tính bởi công thức $L = 10 \log \left(\frac{I}{10^{-12}} \right)$, trong đó I (đơn vị: W / m^2) là cường độ âm. Mức cường độ âm ở một khu dân cư được quy định là dưới $60dB$. Hỏi cường độ âm của khu vực đó phải dưới bao nhiêu W / m^2 ?

Lời giải

Hướng dẫn giải

$$L < 60 \Leftrightarrow 10 \log \left(\frac{I}{10^{-12}} \right) < 60 \Leftrightarrow \log \left(\frac{I}{10^{-12}} \right) < 6$$

Ta có:

$$\Leftrightarrow \frac{I}{10^{-12}} < 10^6 \Leftrightarrow I < 10^{-6} \text{ (do } 10 > 1).$$

Vậy cường độ âm ở khu vực đó phải dưới $10^{-6} (W / m^2)$.

Câu 6. Số lượng của một loài vi khuẩn trong phòng thí nghiệm được tính theo công thức $S(t) = A \cdot e^{rt}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, $S(t)$ là số lượng vi khuẩn có sau t (phút), r là tỉ lệ tăng trưởng ($r > 0$), t (tính theo phút) là thời gian tăng trưởng. Biết rằng số lượng vi khuẩn ban đầu có 500 con và sau 6 giờ có 2000 con. Hỏi ít nhất bao nhiêu giờ, kể từ lúc bắt đầu, số lượng vi khuẩn đạt ít nhất 120000 con?

Lời giải

Hướng dẫn giải

Ta có: $A = 500, S(360) = 2000, 6 \text{ giờ} = 360 \text{ phút}$.

Sau 6 giờ số lượng vi khuẩn là 2000 con, tức là: $2000 = 500 \cdot e^{r \cdot 360}$

$$\Leftrightarrow e^{r \cdot 360} = 4 \Leftrightarrow r = \frac{\ln 4}{360} \text{ (do } e > 1).$$

Số lượng vi khuẩn đạt ít nhất 120000 con, nghĩa là: $500 \cdot e^{\frac{\ln 4}{360} t} \geq 120000$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{\ln 4}{360} t} \geq 240 \Leftrightarrow \frac{\ln 4}{360} t \geq \ln 240 \Leftrightarrow t \geq \frac{360 \cdot \ln 240}{\ln 4} \approx 1423,24 \text{ (phút)}.$$

Vậy sau ít nhất 24 (giờ) thì số lượng vi khuẩn đạt ít nhất 120000 con.

$$\log_1(-x+2) = -2$$

Câu 7. Tìm nghiệm phương trình

Lời giải

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $-x+2 > 0 \Leftrightarrow x < 2$.

$$\log_1(-x+2) = -2 \Leftrightarrow -x+2 = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} \Leftrightarrow x = -14 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}.$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = -14$.

Câu 8. Tìm nghiệm phương trình $\ln 2x + \ln(x-1) = \ln x^2$;

Lời giải

Hướng dẫn giải

$$\begin{cases} 2x > 0 \\ x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1. (*) \\ x^2 > 0 \end{cases}$$

Điều kiện:

$$\ln 2x + \ln(x-1) = \ln x^2 \Leftrightarrow \ln[2x(x-1)] = \ln x^2 \Rightarrow 2x(x-1) = x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}, \text{ ta thấy chỉ có nghiệm } x = 2 \text{ thỏa mãn điều kiện } (*).$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 2$.

Câu 9. Tìm nghiệm phương trình $\log(x^2 - 3x + 2) = 2\log_{100}(2x - 4)$;

Lời giải

Hướng dẫn giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x^2 - 3x + 2 > 0 \\ 2x - 4 > 0 \end{cases} \quad (*)$$

$$\log(x^2 - 3x + 2) = 2\log_{100}(2x - 4) \Leftrightarrow \log(x^2 - 3x + 2) = \log(2x - 4)$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 2x - 4 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

Thay lần lượt hai giá trị này vào $(*)$, ta thấy chỉ có giá trị $x = 3$ thỏa mãn.

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 3$.

Câu 10. Tìm nghiệm phương trình $\log_3(2x - 3) = \log_3(x - 2) + 1$;

Lời giải

Hướng dẫn giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 2x - 3 > 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2. (*)$$

$$\log_3(2x - 3) = \log_3(x - 2) + 1 \Leftrightarrow \log_3(2x - 3) = \log_3(x - 2) + \log_3 3$$

$$\Leftrightarrow \log_3(2x - 3) = \log_3 3(x - 2) \Rightarrow 2x - 3 = 3x - 6 \Leftrightarrow x = 3 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 3$.

Câu 11. Tìm nghiệm phương trình $\log_2^2 x + \log_2 x - 2 = 0$.

Lời giải

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x > 0$.

$$\log_2^2 x + \log_2 x - 2 = 0 \Leftrightarrow \log_2^2 x - 1 + \log_2 x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\log_2 x - 1)(\log_2 x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x - 1 = 0 \\ \log_2 x + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 2^{-2} = \frac{1}{4} \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

$$S = \left\{ \frac{1}{4}; 2 \right\}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm là

Câu 12. Tìm nghiệm bất phương trình $3^{x^2 - 4x + 5} > \frac{1}{9}$

Lời giải

Hướng dẫn giải

$$3^{x^2 - 4x + 5} > \frac{1}{9} \Leftrightarrow 3^{x^2 - 4x + 5} > 3^{-2} \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 > -2 \text{ (do } 3 > 1). \Leftrightarrow x^2 - 4x + 7 > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \in \mathbb{R}$.

Câu 13. Tìm nghiệm bất phương trình $\frac{0,5}{2^{x-2}} \geq 4^{\frac{x}{2}}$

Lời giải

Hướng dẫn giải

$$\frac{0,5}{2^{x-2}} \geq 4^{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow 0,5 \geq 2^{x-2} \cdot 2^x \Leftrightarrow 2^{-1} \geq 2^{2x-2} \Leftrightarrow -1 \geq 2x-2 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2} \text{ (do } 2 > 1).$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \leq \frac{1}{2}$.

Câu 14. Tìm nghiệm bất phương trình $3^x - 2 \cdot 5^x < 0$;

Lời giải

Hướng dẫn giải

$$3^x - 2 \cdot 5^x < 0 \Leftrightarrow 3^x < 2 \cdot 5^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x < 2 \Leftrightarrow x > \log_{\frac{3}{5}} 2 \text{ (do } 0 < \frac{3}{5} < 1).$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > \log_{\frac{3}{5}} 2$.

Câu 15. Tìm nghiệm bất phương trình $25^x - 5^{1+x} - 6 \geq 0$.

Lời giải

Hướng dẫn giải

$$25^x - 5^{1+x} - 6 \geq 0 \Leftrightarrow 5^{2x} - 5 \cdot 5^x - 6 \geq 0 \\ \Leftrightarrow (5^x)^2 - 5 \cdot 5^x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow (5^x + 1)(5^x - 6) \geq 0.$$

Vì $5^x + 1 > 0$ nên bất phương trình trở thành: $5^x \geq 6 \Leftrightarrow x \geq \log_5 6$ (do $5 > 1$).

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \geq \log_5 6$.

Câu 16. Tìm nghiệm bất phương trình $\log_{\frac{1}{4}}(-x+2) \geq -2$;

Lời giải

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $-x+2 > 0 \Leftrightarrow x < 2$. (*)

Khi đó, do cơ số $0 < \frac{1}{4} < 1$ nên bất phương trình đã cho trở thành:

$$-x+2 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} \Leftrightarrow -x+2 \leq 4^2 \Leftrightarrow x \geq -14.$$

Kết hợp với điều kiện (*), ta được tập nghiệm của bất phương trình là: $S = [-14; 2)$.

Câu 17. Tìm nghiệm bất phương trình $\log_2(x^2 + 3x) \leq 2$;

Lời giải

Hướng dẫn giải

$$x^2 + 3x > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < -3 \end{cases} \text{ (*)}$$

Điều kiện:

Khi đó, do cơ số $2 > 1$ nên bất phương trình đã cho trở thành:

$$x^2 + 3x \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 1.$$

Kết hợp với điều kiện (*), ta được tập nghiệm của bất phương trình là:

$$S = [-4; -3) \cup (0; 1]$$

$$\ln 2 + \ln \left(x - \frac{1}{2} \right) < \ln x^2$$

Câu 18. Tìm nghiệm bất phương trình

Lời giải

Hướng dẫn giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x - \frac{1}{2} > 0 \\ x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}. (*)$$

Khi đó, do cơ số $e > 1$ nên bất phương trình đã cho trở thành:

$$\ln(2x - 1) < \ln x^2 \Rightarrow 2x - 1 < x^2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 > 0 \Leftrightarrow x \neq 1.$$

Kết hợp với điều kiện $(*)$, ta được tập nghiệm của bất phương trình là:

$$S = \left(\frac{1}{2}; 1 \right) \cup (1; +\infty)$$

Câu 19. Tìm nghiệm bất phương trình $\log x + \log(3 - x) \leq 1$

Lời giải

Hướng dẫn giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x > 0 \\ 3 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 3. (*)$$

Khi đó, do cơ số $10 > 1$ nên bất phương trình đã cho trở thành:

$$\log x(3 - x) \leq 1 \Rightarrow 3x - x^2 \leq 10 \Rightarrow x^2 - 3x + 10 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}.$$

Kết hợp với điều kiện $(*)$, vậy nghiệm của bất phương trình là $0 < x < 3$.

Câu 20. Tìm nghiệm bất phương trình $\log_2 3 + \log_5 x \geq 1 + \log_2 3 \cdot \log_5 x$;

Lời giải

Hướng dẫn giải

$$\text{Điều kiện: } x > 0. (*)$$

$$\begin{aligned} \log_2 3 + \log_5 x \geq 1 + \log_2 3 \cdot \log_5 x &\Leftrightarrow \log_5 x \cdot (1 - \log_2 3) - (1 - \log_2 3) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (1 - \log_2 3)(\log_5 x - 1) \geq 0. \end{aligned}$$

Khi đó, do $1 - \log_2 3 < 0$ và cơ số $5 > 1$ nên bất phương trình trở thành:

$$\log_5 x \leq 1 \Rightarrow x \leq 5.$$

Kết hợp với điều kiện $(*)$, ta được nghiệm của bất phương trình là $0 < x \leq 5$.

$$\log_3^2(-x) - 2\log_{\sqrt{5}}(-x) - 2\log_{\frac{1}{3}}(-x) + 1 > 0$$

Câu 21. Tìm nghiệm bất phương trình

Lời giải

Hướng dẫn giải

$$\text{Điều kiện: } -x > 0 \Leftrightarrow x < 0. (*)$$

$$\log_3^2(-x) - 2\log_{\sqrt{5}}(-x) - 2\log_{\frac{1}{3}}(-x) + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow \log_3^2(-x) - 4\log_3(-x) + 2\log_3(-x) + 1 > 0 \Leftrightarrow \log_3^2(-x) - 2\log_3(-x) + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow (\log_3(-x) - 1)^2 > 0 \Rightarrow \log_3(-x) - 1 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \log_3(-x) \neq 1 \Leftrightarrow -x \neq 3 \Leftrightarrow x \neq -3.$$

Kết hợp với điều kiện $(*)$, ta được tập nghiệm của bất phương trình là

$$S = (-\infty; -3) \cup (-3; 0).$$

Câu 22. Dân số nước ta năm 2022 ước tính là 99200000 người. Giả sử tỉ lệ tăng dân số hằng năm của nước ta không đổi là $r = 0,93\%$. Biết rằng sau t năm, dân số Việt Nam (tính từ mốc năm 2022) ước tính theo công thức $S = A \cdot e^{rt}$. Hỏi từ năm nào trở đi, dân số nước ta vượt 120 triệu người?

Lời giải

Hướng dẫn giải

Xét bất phương trình:

$$99200000 \cdot e^{0,93\% \cdot t} > 120000000 \Leftrightarrow e^{0,93\% \cdot t} > \frac{75}{62} \Leftrightarrow 0,93\% \cdot t > \ln\left(\frac{75}{62}\right) \\ \Leftrightarrow t > 20,468.$$

Vậy từ năm 2043 trở đi thì dân số nước ta vượt quá 120 triệu người.

Câu 23. Một người gửi tiết kiệm 10 tỉ đồng theo thể thức lãi kép kì hạn 12 tháng với lãi suất 7% một năm và lãi hằng năm được nhập vào vốn. Sau ít nhất bao nhiêu năm người đó nhận được số tiền nhiều hơn 12 tỉ đồng?

Lời giải

Hướng dẫn giải

Theo công thức lãi kép: $T = A(1+r)^n$, số tiền người đó nhận được sau n năm là:

$$T = 10 \cdot 10^9 (1 + 7\%)^n = 10^{10} \cdot 1,07^n \text{ (đồng)}$$

Để nhận được số tiền nhiều hơn 12 tỉ đồng thì

$$T = 10^{10} \cdot 1,07^n > 12 \cdot 10^9 \Leftrightarrow 1,07^n > \frac{6}{5} \Leftrightarrow n > \log_{1,07}\left(\frac{6}{5}\right) \approx 2,695.$$

Vậy sau ít nhất 3 năm người đó nhận được số tiền nhiều hơn 12 tỉ đồng.

Câu 24. Để đầu tư dự án trồng rau sạch theo công nghệ mới, bác Thảo đã làm hợp đồng xin vay vốn ngân hàng số tiền là 500 triệu đồng với lãi suất $r < 0$ cho kỳ hạn một năm. Điều kiện kèm theo của hợp đồng là số tiền lãi năm trước sẽ được tính làm vốn để sinh lãi cho năm sau (theo thể thức lãi kép). Sau hai năm thành công với dự án rau sạch của mình, bác đã thanh toán hợp đồng ngân hàng với số tiền là 599823000 đồng. Hỏi bác Thảo đã vay ngân hàng với lãi suất r là bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần nghìn)?

Lời giải

Hướng dẫn giải

Ta có: $A = 500$ triệu đồng, lãi suất $r/\%$ năm, $n = 2$ năm, $T = 599823000$ đồng.

Theo công thức lãi kép, ta có:

$$T = A(1+r)^n \Leftrightarrow 599823000 = 500000000(1+r)^2 \\ \Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{599823}{500000}} - 1 \approx 0,095.$$

Vậy lãi suất mà bác Thảo vay ngân hàng là xấp xỉ $9,5\%$.

Câu 25. Một điện thoại đang nạp pin, dung lượng pin nạp được tính theo công thức mũ như sau

$Q(t) = Q_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{3t}{2}}\right)$, với t là khoảng thời gian tính bằng giờ và Q_0 là dung lượng nạp tối đa. Hãy tính thời gian nạp pin của điện thoại tính từ lúc cạn pin cho đến khi điện thoại đạt được 80% dung lượng pin tối đa (làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Hướng dẫn giải

Theo giả thiết, ta có phương trình:

$$\frac{80}{100} Q_0 = Q_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{3t}{2}}\right) \Rightarrow e^{-\frac{3t}{2}} = \frac{1}{5} \Rightarrow -\frac{3t}{2} = -\ln 5 \Rightarrow t \approx 1,07$$

giờ

Vậy thời gian nạp pin của điện thoại là khoảng 1,07 giờ.

Câu 26. Mức cường độ âm L (đơn vị: dB) được tính bởi công thức

$L = 10 \log \left(\frac{I}{10^{-12}} \right)$, trong đó I (đơn vị: W/m^2) là cường độ âm. Hãy tính mức cường độ âm mà tai người có thể nghe được, biết rằng tai người có thể nghe được âm với cường độ âm từ $10^{-12} W/m^2$ đến $10^1 W/m^2$.

Lời giải

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\begin{aligned} 10^{-12} \leq I \leq 10^1 &\Leftrightarrow \frac{10^{-12}}{10^{-12}} \leq \frac{I}{10^{-12}} \leq \frac{10^1}{10^{-12}} \\ &\Leftrightarrow 1 \leq \frac{I}{10^{-12}} \leq 10^{13} \Leftrightarrow \log 1 \leq \log \left(\frac{I}{10^{-12}} \right) \leq \log 10^{13} \\ &\Leftrightarrow 0 \leq 10 \log \left(\frac{I}{10^{-12}} \right) \leq 130 \text{ (do } 10 > 1) \\ &\Leftrightarrow 0 \leq L \leq 130. \end{aligned}$$

Vậy mức cường độ âm mà tai người có thể nghe được là từ $0dB$ đến $130dB$.

Câu 27. Tìm nghiệm của phương trình $5^{x-\sqrt{x^2+4}} = 25$;

Lời giải

Lời giải

$$\begin{aligned} 5^{x-\sqrt{x^2+4}} = 25 &\Leftrightarrow x - \sqrt{x^2+4} = \log_5 25 \Leftrightarrow x - \sqrt{x^2+4} = 2 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x^2+4} = x - 2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ x^2 + 4 = (x - 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x = 0 \end{cases} \text{ (Hệ vô nghiệm)} \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Câu 28. Tìm nghiệm của phương trình $16^{\frac{x+10}{x-10}} = 0,125 \cdot 8^{\frac{x+5}{x-15}}$.

Lời giải

Lời giải

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x \neq 10 \\ x \neq 15 \end{cases}$.

Phương trình đã cho viết lại $2^{\frac{4x+40}{x-10}} = 2^{-3} \cdot 2^{\frac{3x+15}{x-15}} \Leftrightarrow \frac{4x+40}{x-10} = \frac{60}{x-15} \Leftrightarrow 4x^2 - 80x = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 20 \end{cases}$.

Đối chiếu điều kiện, phương trình có nghiệm $x = 0$ hoặc $x = 20$.

Câu 29. Tìm nghiệm của phương trình $\log_2[x(x-1)] = 1$;

Lời giải

Lời giải

Điều kiện: $x(x-1) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < 0 \end{cases}$.

Ta có: $PT \Leftrightarrow x(x-1) = 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1; x = 2$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = -1; x = 2$.

Câu 30. Tìm nghiệm của phương trình $\log_2 x + \log_2 (x - 1) = 1$;

Lời giải

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$

$$PT \Leftrightarrow \log_2 x(x - 1) = 1 \Leftrightarrow x(x - 1) = 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Ta có:

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm của phương trình là $x = 2$.

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 2$.

Câu 31. Tìm nghiệm của phương trình $\ln(x + 1) + \ln(x + 3) = \ln(x + 7)$;

Lời giải

Lời giải

Với điều kiện $x > -1$, phương trình trở thành:

$$\ln(x + 1)(x + 3) = \ln(x + 7) \Leftrightarrow (x + 1)(x + 3) = x + 7 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -4 \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm của phương trình là $x = 1$.

Câu 32. Tìm nghiệm của phương trình $\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = 11$.

Lời giải

Lời giải

Với điều kiện $x > 0$, phương trình trở thành:

$$\log_3 x + \frac{1}{2} \log_3 x + \frac{1}{3} \log_3 x = 11 \Leftrightarrow \log_3 x = 6 \Leftrightarrow x = 3^6 = 729 > 0$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 729$.

Câu 33. Tìm nghiệm của phương trình $\log_3 (x^2 + 4x) + \log_{\frac{1}{3}} (2x - 3) = 0$;

Lời giải

Lời giải

Điều kiện xác định $x > \frac{3}{2}$.

$$\log_3 (x^2 + 4x) + \log_{\frac{1}{3}} (2x - 3) = 0 \Leftrightarrow \log_3 (x^2 + 4x) = \log_3 (2x - 3)$$

Ta có

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x = 2x - 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 3 = 0. \text{ Phương trình vô nghiệm.}$$

Câu 34. Tìm nghiệm của phương trình $\log_2 (x - 2) - 6 \log_{\frac{1}{8}} \sqrt{3x - 5} = 2$;

Lời giải

Lời giải

Điều kiện: $x > 2$.

Ta có phương trình tương đương với:

$$\log_2 (x - 2) + \log_2 (3x - 5) = 2 \Leftrightarrow (x - 2)(3x - 5) = 4 \Leftrightarrow 3x^2 - 11x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Đối chiếu với đk ta được nghiệm của phương trình là $x = 3$.

$$\log_3(2x-1) \cdot \ln(-x+5) = \log_{\frac{1}{27}}(2x-1);$$

Câu 35. Tìm nghiệm của phương trình

Lời giải

Lời giải

Điều kiện $\frac{1}{2} < x < 5$.

Ta có phương trình: $\log_3(2x-1) \cdot \ln(-x+5) = -\frac{1}{3} \log_3(2x-1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(2x-1) = 0 \\ \ln(-x+5) = -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 5 - \frac{1}{\sqrt[3]{e}} \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\left\{1; 5 - \frac{1}{\sqrt[3]{e}}\right\}$.

$$\log_2(x+2) + \log_4(x-5)^2 + \log_{\frac{1}{2}} 8 = 0$$

Câu 36. Tìm nghiệm của phương trình

Lời giải

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} x > -2 \\ x \neq 5 \end{cases}$.

Với điều kiện đó, phương trình đã cho tương đương với:

$$S = \left\{6; \frac{3 - \sqrt{17}}{2}; \frac{3 + \sqrt{17}}{2}\right\}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là

Câu 37. Tìm nghiệm bất phương trình $5^{|x^2-2x|} > 125$

Lời giải

Lời giải

$$5^{|x^2-2x|} > 125 \Leftrightarrow |x^2-2x| > \log_5 125 \Leftrightarrow |x^2-2x| > 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x > 3 \\ x^2-2x < -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > 3 \end{cases}$$

Tập nghiệm $S = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$

Câu 38. Tìm nghiệm bất phương trình $2^{x+1} + 2^{x+2} < 3^x + 3^{x+1}$;

Lời giải

Lời giải

$$2^{x+1} + 2^{x+2} < 3^x + 3^{x+1} \Leftrightarrow 2^x(2+2^2) < 3^x(1+3) \Leftrightarrow 6 \cdot 2^x < 4 \cdot 3^x \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x < \frac{2}{3} \Leftrightarrow x > 1$$

Tập nghiệm $S = (1; +\infty)$

Câu 39. Tìm nghiệm bất phương trình $(\sqrt{2}+1)^{x+1} \geq (\sqrt{2}-1)^{\frac{x}{x-1}}$.

Lời giải

Lời giải

Điều kiện: $x \neq 1$. Ta có $(\sqrt{2}-1) = (\sqrt{2}+1)^{-1}$. Do đó

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{2}+1)^{x+1} &\geq (\sqrt{2}-1)^{\frac{x}{x-1}} \Leftrightarrow (\sqrt{2}+1)^{x+1} \geq (\sqrt{2}+1)^{-\frac{x}{x-1}} \\
 \Leftrightarrow x+1 &\geq -\frac{x}{x-1} \Leftrightarrow \frac{x^2+x-1}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \vee x > 1 \\
 S &= \left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right] \cup (1; +\infty)
 \end{aligned}$$

Tập nghiệm:

Câu 40. Tìm nghiệm bất phương trình $\log_{\sqrt{5}}(x^2 - 3x + 11) \leq 4$;

Lời giải

Lời giải

Ta có :

$$\begin{aligned}
 \log_{\sqrt{5}}(x^2 - 3x + 11) \leq 4 &\Leftrightarrow 0 < x^2 - 3x + 11 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 11 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ x^2 - 3x + 11 \leq 9 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \leq 0 &\Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2.
 \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm $S = [1; 2]$.

Câu 41. Tìm nghiệm bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}} \frac{x-11}{x+4} \leq 4$

Lời giải

Lời giải

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{x-11}{x+4} \leq 4 \Leftrightarrow \frac{x-11}{x+4} \geq \frac{1}{16} \Leftrightarrow \frac{5x-180}{16(x+4)} \geq 0 \Leftrightarrow x < -4 \vee x \geq 12$$

Ta có

Vậy tập nghiệm $S = (-\infty; -4) \cup [12; +\infty)$.

Câu 42. Tìm nghiệm bất phương trình $\log_3(x-3) > \log_3(2x+7)$;

Lời giải

Lời giải

$$\log_3(x-3) > \log_3(2x+7) \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 > 2x+7 \\ 2x+7 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -10 \\ x > -\frac{7}{2} \end{cases}$$

Ta có

Vậy tập nghiệm $S = \emptyset$.

Câu 43. Tìm nghiệm bất phương trình $\log_5(1-2x) > 1 + \log_{\sqrt{5}}(x+1)$

Lời giải

Lời giải

$$\begin{cases} 1-2x > 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ x > -1 \end{cases}$$

Điều kiện:

$$\log_5(1-2x) > 1 + \log_{\sqrt{5}}(x+1) \Leftrightarrow \log_5(1-2x) > 1 + 2\log_5(x+1)$$

Ta có

$$\Leftrightarrow \log_5(1-2x) < \log_5 5(x+1)^2 \Leftrightarrow 1-2x < 5(x+1)^2 \Leftrightarrow 5x^2 + 12x + 4 \Leftrightarrow x < -2 \vee x > -\frac{2}{5}$$

Vậy tập nghiệm $\left(-\frac{2}{5}; \frac{1}{2} \right)$.

Câu 44. Tìm m để bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi số thực

$$1 + \log_5 (x^2 + 1) \geq \log_5 (mx^2 + 4x + m).$$

Lời giải

Lời giải

Ta có:

$$1 + \log_5 (x^2 + 1) \geq \log_5 (mx^2 + 4x + m) \Leftrightarrow \log_5 [5(x^2 + 1)] \geq \log_5 (mx^2 + 4x + m)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} mx^2 + 4x + m \leq 5(x^2 + 1) \\ mx^2 + 4x + m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (5 - m)x^2 - 4x + 5 - m \geq 0 & (1) \\ mx^2 + 4x + m > 0 & (2) \end{cases}$$

Bất phương trình đã cho có nghiệm đúng với mọi x khi cả (1) và (2) đúng với mọi x . + Với $m = 0$ hoặc $m = 5$: Không thỏa mãn đề bài.

$$\begin{cases} 5 - m > 0 \\ 4 - (5 - m)^2 \leq 0 \\ m > 0 \\ 4 - m^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 5 \\ \begin{cases} m \leq 3 \\ m \geq 7 \end{cases} \\ m > 0 \\ \begin{cases} m < -2 \\ m > 2 \end{cases} \end{cases}$$

+ Với $m \neq 0$ hoặc $m \neq 5$: Để thỏa mãn đề bài thì

$$\Leftrightarrow 2 < m \leq 3. \text{ Vậy } 2 < m \leq 3.$$

Câu 45. Công thức tính khối lượng còn lại của một chất phóng xạ từ khối lượng ban đầu M_0 là:

$$M(t) = M_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}, \text{ trong đó } t \text{ là thời gian tính từ thời điểm ban đầu; } T \text{ là chu kỳ bán rã chất phóng xạ. Đồng vị}$$

phóng xạ của polonium-209 có chu kỳ bán rã là 103 ngày, biết khối lượng ban đầu $M_0 = 300 \text{ g}$.

Hỏi khối lượng polonium-209 còn lại sau 515 ngày.

Lời giải

Lời giải

Khối lượng polonium-209 còn lại sau 515 ngày là: $M(515) = 300 \cdot 2^{-\frac{515}{103}} = 9,375 \text{ g}$.

Câu 46. Tìm nghiệm của phương trình $\ln(x+1) + \ln(x+3) = \ln(x+7)$;

Lời giải

Lời giải

$$\ln(x+1) + \ln(x+3) = \ln(x+7); \text{ Điều kiện: } \begin{cases} x+1 > 0 \\ x+3 > 0 \\ x+7 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > -1$$

$$PT \Leftrightarrow \ln(x+1) \cdot (x+3) = \ln(x+7) \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = x + 7 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1(N) \\ x = -4(L) \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 1$.

Câu 47. Nếu một người gửi số tiền A với lãi suất kép r mỗi kì thì sau n kì, số tiền T người ấy thu được cả vốn lẫn lãi được cho bởi công thức $T_n = A(1+r)^n$.

Một người gửi 150 triệu đồng vào một ngân hàng theo thể thức lãi suất kép với lãi suất cố định là $8,4\%$ / năm. Nếu theo kì hạn là 1 năm thì sau ít nhất bao nhiêu năm, người đó thu được cả vốn và tiền lãi hơn 200 triệu đồng (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

Lời giải

Lời giải

Ta có: $A = 150$ (triệu đồng), $r = 8,4\%$

Vốn và tiền lãi hơn 200 triệu đồng nghĩa là $T_n > 200$ (triệu đồng)

$$150(1+8,4\%)^n > 200 \Leftrightarrow (1+8,4\%)^n > \frac{4}{3} \Leftrightarrow n > \log_{1+8,4\%} \frac{4}{3} \approx 3,6$$

Ta có:

Vậy thực tế thì sau ít nhất 4 năm người đó thu được cả vốn và tiền lãi hơn 200 triệu đồng.

---HẾT---