

§3. Hàm số bậc hai

Dạng 1. Chiều biến thiên của hàm số bậc hai

Dạng 1.1 Xác định chiều biến thiên của hàm số cho trước

Câu 1. **Chọn E**

$a > 0$. Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
y	$+\infty$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$+\infty$

Câu 2. **Chọn D**

Đỉnh của parabol: $x_I = -\frac{b}{2a} = 2$

Bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	+	0	-
y	$-\infty$	5	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra khẳng định **D** sai.

Câu 3. **Chọn E**

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$-\infty$	4	$-\infty$

Câu 4. **Chọn C**

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$+\infty$	7	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy, hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$

Câu 5. **Chọn D**

Hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ có $a = 1 > 0$ nên đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.
 $(2; +\infty)$
 Vì vậy hàm số đồng biến trên $(2; +\infty)$.

Câu 6. Chọn C

Hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ có hệ số $a = 1 > 0$ nên đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$.
 $(-\infty; 2)$
 Vì vậy hàm số đồng biến trên $(-\infty; 2)$.

Câu 7. Chọn D

Do $a = -1$ nên hàm số đồng biến trên $(-\infty; 2)$ nghịch biến trên $(2; +\infty)$.

Câu 8. Chọn A

Ta có hàm số $(P): y = f(x) = x^2 - 2x + 3$ là hàm số bậc hai có hệ số $a = 1$; nên (P) có bề lõm hướng lên.

Hoành độ đỉnh của parabol $x_I = \frac{-b}{2a} = 1$. Do đó hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Câu 9. Chọn D

Hàm số bậc hai có $a = 2 > 0$; $-\frac{b}{2a} = 1$ nên hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$.

Câu 10. Chọn A

$(P): y = f(x) = -3x^2 + x - 2$, TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Có $a = -3$, đỉnh S có hoành độ $x = \frac{1}{6}$.

Nên hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trong khoảng $\left(\frac{1}{6}; +\infty\right)$.

Câu 11. Ta có $a = -1 < 0, \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2 \cdot (-1)} = 3$. Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.

Đáp án A.

Câu 12. Chọn D

Khi $m = 1$, hàm số trở thành $y = x^2 - 3x + 2$

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Đỉnh $I\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\right)$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
y	$+\infty$	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Dạng 1.2 Xác định m thỏa mãn điều kiện cho trước

Câu 13. Hàm số có $a=1>0, \frac{-b}{2a}=m+1$ nên đồng biến trên khoảng $(m+1; +\infty)$.

Do đó để hàm số đồng biến trên khoảng $(4; 2018)$ thì ta phải có

$$(4; 2018) \subset (m+1; +\infty) \Leftrightarrow m+1 \leq 4 \Leftrightarrow m \leq 3.$$

Vậy có ba giá trị nguyên dương của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là 1, 2, 3.

Đáp án D.

Câu 14. **Chọn C**

Hàm số $y=f(x)=x^2+2(b+6)x+4$ là hàm số bậc hai có hệ số $a=1>0, -\frac{b}{2a}=-b-6$ nên có bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-(b+6)$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$f(-(b+6))$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có:

Hàm số đồng biến trên $(6; +\infty)$ thì $\Leftrightarrow (6; +\infty) \subset (-b-6; +\infty) \Leftrightarrow -b-6 \leq 6 \Leftrightarrow b \geq -12$.

Câu 15. **Chọn C**

Đồ thị hàm số có trục đối xứng là đường $x=m-1$. Đồ thị hàm số đã cho có hệ số x^2 âm nên sẽ đồng biến trên $(-\infty; m-1)$ và nghịch biến trên $(m-1; +\infty)$. Theo đề, cần: $m-1 \leq 1 \Leftrightarrow m \leq 2$.

Câu 16. **Chọn C**

Hàm số $y = -x^2 + 2|m+1|x - 3$ có $a = -1 < 0$; $-\frac{b}{2a} = |m+1|$ nên hàm số nghịch biến trên $(|m+1|; +\infty)$.

Để hàm số nghịch biến trên $(2; +\infty)$ thì $(2; +\infty) \subset (|m+1|; +\infty)$

$$\Leftrightarrow |m+1| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq m+1 \leq 2 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 1$$

Câu 17. Chọn B

Gọi (P) là đồ thị của $y = f(x) = x^2 + (m-1)x + 2m-1$.

$y = f(x)$ là hàm số bậc hai có hệ số $a = 1$.

Gọi I là đỉnh của (P) , có $x_I = \frac{1-m}{2}$.

Nên hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1-m}{2}; +\infty\right)$.

Do đó để hàm số trên khoảng $(-2; +\infty)$ khi $\frac{1-m}{2} \leq -2 \Leftrightarrow m \geq 5$.

Suy ra tập $S = [5; +\infty)$. Khi đó $(-10; 10) \cap S = [5; 10)$.

Câu 18. Chọn C

Với $m > 0$, ta có hàm số $f(x) = mx^2 - 4x - m^2$ nghịch biến trên $\left(-\infty; \frac{2}{m}\right)$, suy ra hàm nghịch

biến trên $(-1; 2)$ khi $(-1; 2) \subset \left(-\infty; \frac{2}{m}\right) \Leftrightarrow 2 \leq \frac{2}{m} \Leftrightarrow 0 < m \leq 1$.

Dạng 2. Xác định hàm số bậc hai thỏa mãn điều kiện cho trước

Dạng 2.1 Xác định tọa độ đỉnh, trục đối xứng của đồ thị hàm số

Câu 19. Chọn A

Đỉnh của parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) là điểm $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Câu 20. Chọn B

Hoành độ đỉnh của $(P): y = 3x^2 - 2x + 1$ là $x = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{3} \Rightarrow y = 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$.

Vậy $I\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Câu 21. Chọn A

Câu 22. Chọn A

Hoành độ đỉnh là $x_I = -\frac{b}{2a} = -2$. Từ đó loại câu B.

Thay hoành độ $x_I = -2$ vào phương trình Parabol ở các câu A, C, D, ta thấy chỉ có câu A thỏa điều kiện $y_I = 1$.

Dạng 2.1 Khi biết tọa độ đỉnh và điểm đi qua

Câu 23. Chọn C

Ta có: $x_I = -1 \Rightarrow -\frac{4}{2a} = -1 \Rightarrow a = 2$.

Hơn nữa $I \in (P)$ nên $-5 = a - 4 - b \Rightarrow b = 3$.

Câu 24. Chọn C

Theo giả thiết ta có hệ:
$$\begin{cases} a - b + c = 0 \\ -\frac{b}{2a} = 1 \\ a + b + c = 2 \end{cases} \text{ với } a \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a - b + c = 0 \\ b = -2a \\ a + b + c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = -\frac{1}{2} \\ c = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Vậy hàm bậc hai cần tìm là $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$

Câu 25. Chọn A

Đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$ đi qua điểm $A(2;1)$ và có đỉnh $I(1; -1)$ nên có hệ phương trình

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 1 \\ -\frac{b}{2a} = 1 \\ a + b + c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2b + c = 1 \\ b = -2a \\ a + b + c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ b = -2a \\ -a + c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ b = -4 \\ a = 2 \end{cases}$$

Vậy $T = a^3 + b^2 - 2c = 22$.

Câu 26. Chọn C

Vì đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) có đỉnh $I(1;1)$ và đi qua điểm $A(2;3)$ nên ta có hệ:

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 3 \\ -\frac{b}{2a} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 3 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \\ c = 3 \end{cases}$$

Nên $S = a^2 + b^2 + c^2 = 29$

Câu 27. Chọn D

Parabol $(P): y = x^2 + mx + n$ nhận $I(2; -1)$ là đỉnh, khi đó ta có

$$\begin{cases} 4 + 2m + n = -1 \\ -\frac{m}{2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + n = -5 \\ m = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 3 \\ m = -4 \end{cases}$$

Vậy $m = -4, n = 3$.

Câu 28. Chọn C

Parabol $(P): y = ax^2 + bx + c \rightarrow$ đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a}\right)$

$$I(2; 0) \Rightarrow \begin{cases} -\frac{b}{2a} = 2 \\ c - \frac{b^2}{4a} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ b^2 = 4ac \end{cases} \quad (1)$$

Theo bài ra, ta có (P) có đỉnh

Lại có (P) cắt Oy tại điểm $M(0; -1)$ suy ra $y(0) = -1 \Leftrightarrow c = -1 \quad (2)$

$$\begin{cases} b = -4a \\ b^2 = -a \\ c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ b^2 = b \\ c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ b = 1; c = -1 \end{cases} \quad (\text{vì } b = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ loại})$$

Từ (1), (2) suy ra

Câu 29. Chọn A

Khi $m \neq 0$ thì $(P): y = mx^2 + 2mx + m^2 + 2m$ có đỉnh là $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) \Rightarrow I(-1; m^2 + m)$

Vì đỉnh nằm trên đường thẳng $y = x + 7$ nên

$$m^2 + m = -1 + 7 \Leftrightarrow m^2 + m - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -3 \end{cases} \quad (TM)$$

Vậy tổng các giá trị của tập $S: 2 + (-3) = -1$.

Câu 30. Chọn D

Do đồ thị của nó có đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a}; \frac{1}{4a}\right)$ và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2 nên ta có

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2} \\ \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b + c = \frac{1}{4} \\ 4a + 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + b = 0 \\ 9a + 6b + 4c = 1 \\ 4a + 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \\ c = -2 \end{cases}$$

Vậy $y = -x^2 + 3x - 2$

Câu 31. Chọn B

Hàm số bậc hai cần tìm có phương trình: $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

Hàm số bậc hai có đồ thị là parabol có đỉnh là $S\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right)$ và đi qua $A(1; -4)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{-b}{2a} = \frac{5}{2} \\ \frac{-\Delta}{4a} = \frac{1}{2} \\ a + b + c = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-b}{2a} = \frac{5}{2} \\ \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = \frac{1}{2} \\ a + b + c = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -5a \\ \frac{-25a^2 + 4a(4a - 4)}{4a} = \frac{1}{2} \\ c = 4a - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 10 \\ c = -12 \end{cases}$$

Câu 32. (P) đi qua điểm $A(0; 3) \Rightarrow c = 3$.

$$(P) \text{ có đỉnh } I(-1; 2) \Rightarrow \begin{cases} \frac{-b}{2a} = -1 \\ a - b + 3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a \\ a - 2a = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow a + b + c = 6$$

Đáp án A.

Dạng 2.3 Khi biết các điểm đi qua

Câu 33. Chọn A

Ta có: $-\frac{b}{2a} = -2 \Rightarrow b = 4a$.(1)

Mặt khác: Vì $A, I \in (P) \Rightarrow \begin{cases} 4 = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c \\ 6 = a \cdot (0)^2 + b \cdot (0) + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a - 2b = -2 \\ c = 6 \end{cases}$ (2)

Kết hợp (1), (2) ta có: $\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 2 \\ c = 6 \end{cases}$. Vậy $(P): y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$

Câu 34. Chọn B

Ta có: Vì $A, B, C \in (P) \Rightarrow \begin{cases} -1 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \\ -1 = a \cdot (1)^2 + b \cdot (1) + c \\ 1 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{cases}$

Vậy $(P): y = x^2 - x - 1$

Câu 35. Chọn B

Parabol $y = ax^2 + bx + 2$ đi qua hai điểm $M(1;5)$ và $N(-2;8)$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 5 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 2 \\ 8 = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ 4a - 2b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}.$$

Vậy hàm số cần tìm là $y = 2x^2 + x + 2$.

Câu 36. Chọn A

Thay tọa độ $A(-1;3)$ vào $(P): y = x^2 + bx + 1$.

Ta được: $3 = (-1)^2 - b + 1 \Leftrightarrow b = -1$.

Câu 37. (P): $y = ax^2 + bx + c$ đi qua ba điểm $A(1;4), B(-1;-4)$ và $C(-2;-11)$ suy ra

$$\begin{cases} a + b + c = 4 \\ a - b + c = -4 \\ 4a - 2b + c = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow (P): y = -x^2 + 4x + 1$$

Hoành độ của đỉnh của (P) là $x = \frac{-b}{2a} = 2$. Suy ra tung độ của đỉnh của (P) là $y = -2^2 + 4 \cdot 2 + 1 = 5$.

Đáp án B.

Dạng 3. Đọc đồ thị, bảng biến thiên của hàm số bậc hai

Dạng 3.1 Xác định hình dáng của đồ thị, bảng biến thiên khi biết hàm số**Câu 38. Chọn B**

Hàm số $y = -2x^2 + 4x + 1$ có đỉnh $I(1;3)$, hệ số $a = -2 < 0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$, nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Câu 39. Chọn D

Dựa vào đồ thị có:

$(P): y = f(x) = x^2 - 2x - 3$; có $a = 1 > 0$; nên (P) có bề lõm hướng lên (loại hình 2).

(P) có đỉnh I có $x_I = 1$ (loại hình 1 và 3).

Vậy $(P): y = f(x) = x^2 - 2x - 3$ có đồ thị là hình 4.

Câu 40. Chọn C

Hàm số $y = -2x^4 + 4x + 1$ có hệ số $a = -2 < 0$ nên bề lõm quay lên trên vì vậy ta loại đáp án B,

D. Hàm số có tọa độ đỉnh $I(1;3)$ nên ta loại đáp án **A.**

Vậy bảng biến thiên của hàm số $y = -2x^4 + 4x + 1$ là bảng **C.**

Câu 41. **Chọn A**

$$y = -x^2 + 2x - 1$$

Có $a = -1 < 0$, nên loại C và **D**.

Tọa độ đỉnh $(1; 0)$, nên nhận **A**.

Câu 42. **Chọn C**

$$y' = -2x + 2$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 1)$; nghịch biến trên $(1; +\infty)$.

Dạng 3.2 Xác định dấu hệ số của hàm số khi biết đồ thị của nó

Câu 43. **Chọn B**

Bề lõm hướng xuống $a < 0$.

Câu 44. **Đáp án C**.

Parabol quay bề lõm xuống dưới $\Rightarrow a < 0$.

Parabol cắt Oy tại điểm có tung độ dương $\Rightarrow c > 0$.

Đỉnh của parabol có hoành độ dương $\Rightarrow \frac{-b}{2a} > 0 \Rightarrow \frac{b}{a} < 0$ mà $a < 0$ nên suy ra $b > 0$.

Câu 45. **Chọn C**

Do $a > 0$ nên Parabol quay bề lõm lên trên, suy ra loại phương án A, D . Mặt khác do

$a > 0, b > 0$ nên đỉnh Parabol có hoành độ $x = -\frac{b}{2a} < 0$ nên loại phương án B . Vậy chọn C .

(Nhận xét: Với các đáp án này thừa dữ kiện $c < 0$)

Câu 46. **Chọn C**

Vì $c > 0$ nên đồ thị cắt trục tung tại điểm nằm phía trên trục hoành.

Mặt khác $a > 0, b < 0$ nên hai hệ số này trái dấu, trục đối xứng sẽ phía phải trục tung.

Do đó, hình (3) là đáp án cần tìm.

Câu 47. **Chọn A**

Parabol có bề lõm quay lên $\Rightarrow a > 0$ loại **D**.

Parabol cắt trục tung tại điểm có tung độ âm nên $c < 0$ loại B, **C. Chọn A**.

Câu 48. **Chọn D**

Dựa vào bảng biến thiên ta có: Parabol (P) có bề lõm quay xuống dưới; hoành độ đỉnh dương;

cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -1 nên
$$\begin{cases} a < 0 \\ \frac{-b}{2a} > 0 \\ c = -1 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \\ c < 0 \end{cases}$$

Câu 49. Chọn D

Vì Parabol hướng bề lõm lên trên nên $a > 0$.

Đồ thị hàm số cắt Oy tại điểm $(0; c)$ ở dưới $Ox \Rightarrow c < 0$.

Hoành độ đỉnh Parabol là $-\frac{b}{2a} < 0$, mà $a > 0 \Rightarrow b > 0$.

Câu 50. Chọn D

Dựa vào đồ thị, nhận thấy:

* Đồ thị hàm số là một parabol có bề lõm quay xuống dưới nên $a < 0$.

* Đồ thị cắt trục tung tại tung độ bằng c nên $c > 0$.

* Đồ thị cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ $x_1 = -1$ và $x_2 = 3$ nên x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ mà theo Vi-et $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2 \Leftrightarrow b = -2a \Rightarrow b > 0$.

* Vậy $a < 0, b > 0, c > 0$.

Câu 51. Chọn A

Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ $(=c)$ âm nên $c < 0$. Suy ra loại B, D.

Đồ thị hướng bề lõm lên trên nên $a > 0$, hoành độ đỉnh $\left(= -\frac{b}{2a} \right)$ dương nên $\frac{-b}{2a} > 0, a > 0 \Rightarrow b < 0$.

Câu 52. Chọn A

Nhận xét:

+) Parabol có bề lõm quay xuống dưới nên $a < 0$.

+) Parabol cắt trục tung tại điểm có hoành độ bằng 0 và tung độ âm nên thay $x = 0$ vào $y = ax^2 + bx + c$ suy ra $c < 0$.

+) Parabol có trục đối xứng nằm bên phải trục tung nên $x = -\frac{b}{2a} > 0$ mà $a < 0$ nên $b > 0$.

Vậy $a < 0, b > 0, c < 0$.

Câu 53. Chọn C

Từ dáng đồ thị ta có $a > 0$.

Đồ thị cắt trục Oy tại điểm có tung độ dương nên $c > 0$.

Hoành độ đỉnh $-\frac{b}{2a} > 0$ mà $a > 0$ suy ra $b < 0$.

Câu 54. Chọn C

Vì $a < 0$ nên đồ thị có bề lõm hướng xuống dưới $\Rightarrow$ loại hình (1), hình (3).

$a < 0; b < 0 \Rightarrow \frac{-b}{2a} < 0$ nên trục đối xứng của (P) nằm bên trái trục tung. Vậy hình (2) thỏa mãn nên chọn đáp án **C**.

Câu 55. Chọn B

Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm nằm phía dưới trục Ox nên $C < 0$

Đồ thị có bề lõm hướng lên do đó $a > 0$

Tọa độ đỉnh nằm ở góc phần tư thứ III nên $\frac{-b}{2a} < 0$ và $b > 0$.

Dạng 3.3 Xác định hàm số khi biết đồ thị của nó

Câu 56. Chọn A

Đồ thị có bề lõm quay xuống dưới nên $a < 0$. Loại phương án **D**.

Trục đối xứng: $x = 2$ do đó chọn **A**.

Câu 57. Chọn B

Đồ thị có hệ số $a > 0$ nên loại **C**.

Đồ thị đi qua điểm $(1; 1)$ nên loại **A** và loại **D**.

Câu 58. Chọn A

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $a > 0$. Loại **B**.

Tọa độ đỉnh $I(1; 2) \Rightarrow -\frac{b}{2a} = 1 > 0$. Suy ra $b < 0$. Loại **C**.

Thay $x = 1 \Rightarrow y = 2$. Loại **D**.

Câu 59. Chọn A

Từ bảng biến thiên suy ra hệ số $a > 0$. Loại **C, D**

Tọa độ đỉnh $I(2; -4)$ loại **B**

Câu 60. Chọn D

Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -1 nên loại **B** và **C**

Hoành độ của đỉnh là $x_I = -\frac{b}{2a} = 1$ nên ta loại A và chọn **D**.

Câu 61. Chọn D

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $(0; -1)$ nên $c = -1$.

Tọa độ đỉnh $I(1; -3)$, ta có phương trình:
$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 1 \\ a \cdot 1^2 + b \cdot 1 - 1 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 0 \\ a + b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \end{cases}$$

Vậy parabol cần tìm là: $y = 2x^2 - 4x - 1$.

Câu 62. Chọn D

Do đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -1 nên suy ra $c = -1$ (1)

Đồ thị có tọa độ đỉnh $I\left(\frac{-b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a}\right) \equiv I(1; -3)$ nên ta có:

$$\begin{cases} \frac{-b}{2a} = 1 \\ \frac{-\Delta}{4a} = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a \\ \Delta = 12a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a \\ b^2 - 4ac - 12a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a \\ 4a^2 - 4ac - 12a = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình } \begin{cases} c = -1 \\ b = -2a \\ 4a^2 - 8a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \\ c = -1 \end{cases}$$

Ta được parabol có phương trình là $y = 2x^2 - 4x - 1$.

Câu 63. Chọn B

Dựa vào hình vẽ ta có hàm số bậc hai có hệ số $a > 0$ nên ta loại đáp án C, **D**.

Mặt khác đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có tọa độ $(1; 0)$, mà điểm $(1; 0)$ thuộc đồ thị hàm số $y = 2x^2 - 3x + 1$ và không thuộc đồ thị hàm số $y = x^2 - 3x + 1$ nên ta chọn **B**.

Câu 64. Chọn D

Đồ thị hàm số là parabol có bề lõm quay xuống nên hệ số $a < 0$. Loại đáp án A, **B**.

Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên loại đáp án **C**.

Câu 65. Chọn C

Parabol $(P): y = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$ đi qua các điểm $A(-1; 0)$, $B(1; -4)$, $C(3; 0)$ nên có

$$\text{hệ phương trình: } \begin{cases} a - b + c = 0 \\ a + b + c = -4 \\ 9a + 3b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = -3 \end{cases}$$

Khi đó: $2a + b + 2c = 2.1 - 2 + 2(-3) = -6$.

Câu 66. Chọn B

Đồ thị trên là của hàm số bậc hai với hệ số $a < 0$ và có tọa độ đỉnh là $I(2; 1)$. Vậy đồ thị đã cho là đồ thị của hàm số $y = -x^2 + 4x - 3$.

Câu 67. Chọn C

Parabol cần tìm phải có hệ số $a > 0$ và đồ thị hàm số phải đi qua điểm $(2; -5)$. Đáp án C thỏa mãn.

Câu 68. Chọn B

Dựa vào BBT ta thấy:

Parabol có bề lõm quay lên trên nên hệ số $a < 0 \Rightarrow$ Loại A.

Parabol có đỉnh $I(-2; -4)$ nên thay $x = -2; y = -4$ vào các đáp án B, C, D.

Nhận thấy chỉ có đáp án B thỏa mãn.

Dạng 3.4 Đồ thị hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối

Câu 69. Chọn D

Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ gồm hai phần

Phần 1: ứng với $y \geq 0$ của đồ thị $y = f(x)$.

Phần 2: lấy đối xứng phần $y < 0$ của đồ thị $y = f(x)$ qua trục Ox .

Câu 70. Chọn B

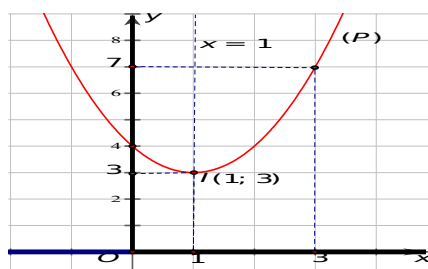
Quan sát đồ thị ta loại A. và D. Phần đồ thị bên phải trục tung là phần đồ thị

(P) của hàm số $y = -x^2 + 5x - 3$ với $x > 0$, tọa độ đỉnh của (P) là $\left(\frac{5}{2}; \frac{13}{4}\right)$, trục đối xứng là $x = 2,5$. Phần đồ thị bên trái trục tung là do lấy đối xứng phần đồ thị bên phải của (P) qua trục tung Oy . Ta được cả hai phần là đồ thị của hàm số $y = -x^2 + 5|x| - 3$.

Dạng 4. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

Dạng 4.1 Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số cho trước

Câu 71. Chọn B



Dựa vào đồ thị của hàm số $y = x^2 - 2x + 4$: (P) , ta nhận thấy:

(P) có đỉnh $I(1;3)$ nên A đúng.

$\min y = 3, \forall x \in [0;3]$, đạt được khi $x = 1$ nên B sai.

(P) có trục đối xứng $x = 1$ nên C đúng.

$\max y = 7, \forall x \in [0;3]$, đạt được khi $x = 3$ nên D đúng.

Câu 72. **Chọn A.**

$$y = x^2 - 4x + 1 = (x - 2)^2 - 3 \geq -3$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = 2$.

Vậy hàm số đã cho đạt giá trị nhỏ nhất là -3 tại $x = 2$.

Câu 73. **Chọn B**

Ta có: $y = x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2 + 2 \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}$

Dấu bằng xảy ra khi $x = -1$ nên chọn đáp án **B.**

Câu 74. .

Chọn A

$$y = 2x^2 + x - 3 = 2\left(x + \frac{1}{4}\right) - \frac{25}{8} \geq -\frac{25}{8}$$

$$y = -\frac{25}{8} \text{ khi } x = -\frac{1}{4} \text{ nên giá trị nhỏ nhất của hàm số } y = 2x^2 + x - 3 \text{ là } -\frac{25}{8}.$$

Câu 75. Ta có $\Delta = 1^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 2 = 25$

Vì $a = -3 < 0$ nên hàm số có giá trị lớn nhất là: $\frac{-\Delta}{4a} = \frac{25}{12}$.

Đáp án A.

Câu 76. Ta có $\frac{-b}{2a} = \frac{-1}{5} \in [-2; 2], a = 5 > 0$. Do đó $\min_{[-2; 2]} f(x) = \min_{\mathbb{R}} f(x) = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{4}{5}$.

Để dễ hiểu hơn, ta quan sát bảng biến thiên của hàm số

x	$-\infty$	-2	$-\frac{1}{5}$	2	$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{4}{5}$	$\nearrow$	$+\infty$

$$\max_{[-2; 2]} f(x) = \max \{f(-2), f(2)\} = \max \{17, 25\} = 25$$

Lưu ý:

Câu 77. Ta có $-\frac{b}{2a} = \frac{1}{3}$ và $a = -3 < 0$. Suy ra hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$. Mà $[1; 3] \subset \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$. Do đó trên đoạn $[1; 3]$ hàm số đạt giá trị lớn nhất tại điểm $x = 1$, tức là $\max_{[1; 3]} f(x) = f(1) = 0$.

Đáp án B.

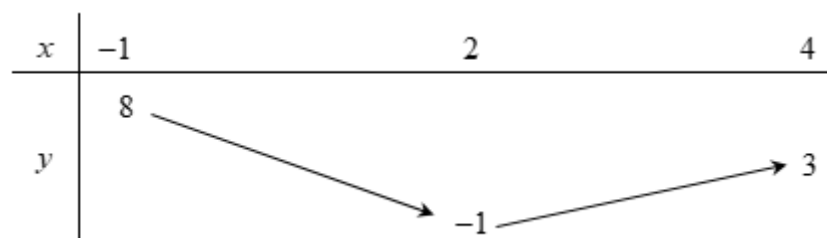
Câu 78. Đáp án D.

Hàm số $y = x^2 - 5x + 9$ có giá trị nhỏ nhất là $\frac{11}{4} > 0$.

Suy ra hàm số $y = \frac{2}{x^2 - 5x + 9}$ có giá trị lớn nhất là $\frac{2}{\frac{11}{4}} = \frac{8}{11}$.

Câu 79. Chọn C

Xét trên miền $[-1; 4]$ thì hàm số có bảng biến thiên là



Từ bảng biến thiên suy ra: Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 8 và giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng -1 nên tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất là $8 + (-1) = 7$.

Câu 80. Đáp án C.

Cách 1: Đặt $t = |x|, t \geq 0$.

Hàm số $f(t) = t^2 - 2t$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng -1 khi $t = 1 > 0$.

Vậy hàm số $y = x^2 - 2|x|$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng -1 khi $|x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Cách 2: Ta có

$$y = x^2 - 2|x| = (|x| - 1)^2 - 1 \geq -1 \quad \forall x; \quad y = -1 \Leftrightarrow |x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số là -1.

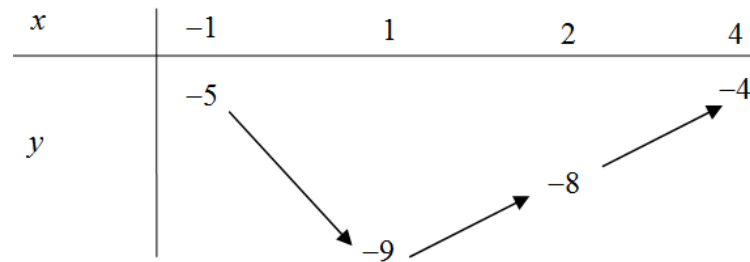
Câu 81. Đáp án D.

Ta có $x^2 \geq 0 \quad \forall x, |x| \geq 0 \quad \forall x$.

Suy ra $x^2 + 4|x| + 3 \geq 3 \quad \forall x$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$. Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho là 3.

Câu 82. Chọn B

BBT



Dựa vào BBT ta có $M = -4, m = -9$.

Vậy $M + m = -4 + (-9) = -13$.

Dạng 4.2 Tìm m thỏa mãn điều kiện cho trước

Câu 83. Chọn B

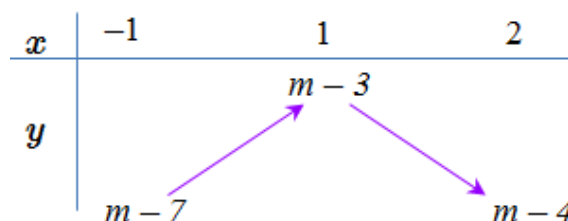
Ta có $x = -\frac{b}{2a} = \frac{2m}{2m} = 1$, suy ra $y = -4m - 2$.

Để hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng -10 khi và chỉ khi

$$\frac{m}{2} > 0 \Leftrightarrow m > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ -4m - 2 = -10 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$$

Câu 84. Chọn C

Xét hàm số $y = -x^2 + 2x + m - 4$ trên đoạn $[-1; 2]$.



Hàm số đạt GTLN trên đoạn $[-1; 2]$ bằng 3 khi và chỉ khi $m - 3 = 3 \Leftrightarrow m = 6$.

Câu 85. Chọn C

Hàm số $y = x^2 + 2mx + 5$ có $a = 1 > 0$ nên hàm số đạt giá trị nhỏ nhất khi $x = -\frac{b}{2a}$.

Theo đề bài ta có $y\left(-\frac{b}{2a}\right) = 1 \Leftrightarrow y(-m) = 1 \Leftrightarrow m^2 - 2m^2 + 5 = 1 \Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2$.

Câu 86. Chọn B

Ta có $y = x^2 - 2mx + m^2 - 3m - 2 = (x - m)^2 - 3m - 2 \geq -3m - 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

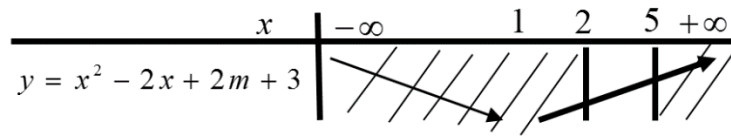
Đẳng thức xảy ra khi $x = m$. Vậy $\min_{\mathbb{R}} y = -3m - 2$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -3m - 2 = -10 \Leftrightarrow m = \frac{8}{3}$

Câu 87. Chọn D

Ta có hàm số $y = x^2 - 2x + 2m + 3$ có hệ số $a = 1 > 0, b = -2$, trục đối xứng là đường thẳng

$x = -\frac{b}{2a} = 1$ nên có bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên đoạn $[2; 5]$ suy ra giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[2; 5]$ bằng $f(2)$. Theo giả thiết $f(2) = -3 \Leftrightarrow 2m + 3 = -3 \Leftrightarrow m = -3$

Câu 88. Chọn A

Vì $y = x^2 - 2x + 2m + 3$ có $a = 1 > 0$ nên hàm số đồng biến trong khoảng $(1; +\infty)$. Như vậy trên đoạn $[2; 5]$ hàm số đồng biến. Do đó giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[2; 5]$ là $y(2) = 2m + 3$

$y(2) = -3 \Leftrightarrow 2m + 3 = -3 \Leftrightarrow m = -3$

Câu 89. Đáp án C.

Ta có $-\frac{b}{2a} = \frac{-(2m+1)}{2}; \Delta = 4m+5$

Vì $a > 0$ nên đồ thị hàm số là một parabol quay bề lõm lên trên và có điểm thấp nhất là đỉnh

$$I\left(\frac{-b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a}\right)$$

Từ đó ta xét các trường hợp sau:

* Trường hợp 1:

$$\frac{-b}{2a} \in (0; 1) \Leftrightarrow 0 < \frac{-(2m+1)}{2} < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{-3}{2} < m < \frac{-1}{2} \quad (1).$$

Khi đó $\min_{[0,1]} f(x) = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(4m+5)}{4}$.

Vậy ta phải có $\frac{-(4m+5)}{4} = 1$

$\Leftrightarrow m = \frac{-9}{4}$ (không thỏa mãn (1)).

* Trường hợp 2:

$\frac{-b}{2a} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-(2m+1)}{2} \leq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{-1}{2}$ (2).

Khi đó $\min_{[0,1]} f(x) = f(0) = m^2 - 1$.

Ta phải có $m^2 - 1 = 1 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{2}$.

Chỉ có $m = -\sqrt{2}$ thỏa mãn (2).

* Trường hợp 3:

$\frac{-b}{2a} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{-(2m+1)}{2} \geq 1 \Leftrightarrow m \leq \frac{-3}{2}$ (3).

Khi đó $\min_{[0,1]} f(x) = f(1) = m^2 + 2m + 1$.

Ta phải có $m^2 + 2m + 1 = 1 \Leftrightarrow m = 0$ hoặc $m = -2$.

Chỉ có $m = -2$ thỏa mãn (3).

Vậy $m \in \{-2; -\sqrt{2}\}$.

Câu 90. Đáp án C.

Đồ thị hàm số là một parabol quay bề lõm lên trên và có đỉnh có hoành độ $x_0 = m + \frac{1}{m}$.

Ta có $|x_0| = \left| m + \frac{1}{m} \right| = |m| + \left| \frac{1}{m} \right|$

$\geq 2\sqrt{|m| \cdot \left| \frac{1}{m} \right|} = 2$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $m = \pm 1$

Vậy $x_0 \notin [-1; 1]$.

Ta thấy nếu $x_0 < -1$ thì

$$m = \min_{x \in [-1;1]} f(x) = f(-1)$$

$$M = \max_{x \in [-1;1]} f(x) = f(1)$$

Ngược lại nếu $x_0 > 1$ thì

$$m = \min_{x \in [-1;1]} f(x) = f(1)$$

$$M = \max_{x \in [-1;1]} f(x) = f(-1)$$

$$\text{Vậy } M - m = 8 \Leftrightarrow |f(1) - f(-1)| = 8$$

$$\Leftrightarrow \left| 4 \left(m + \frac{1}{m} \right) \right| = 8 \Leftrightarrow \left| m + \frac{1}{m} \right| = 2$$

$$\Leftrightarrow m = \pm 1$$

Vậy $S = [-1; 1]$. Do đó tổng bình phương các phần tử thuộc S bằng 2.

Câu 91. Chọn A

Hàm số đã cho là hàm số bậc hai (biến x) và có hệ số $a = 2 > 0$ nên giá trị nhỏ nhất của hàm

$$\text{số là } -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-m^2 + 6m - 25}{8}. \text{ Đặt } f(m) = -\frac{1}{8}m^2 + \frac{3}{4}m - \frac{25}{8}.$$

$f(m)$ là hàm số bậc hai (biến m) có hệ số $a = -\frac{1}{8} < 0$ nên đạt giá trị lớn nhất tại

$$m = -\frac{b}{2a} = \frac{\frac{3}{4}}{-\frac{1}{8}} = 3 \in (1; 4)$$

Câu 92. Ta có: tọa độ đỉnh BBT:

x	$-\infty$	$\frac{4a+3}{8}$	$+\infty$
y	$+\infty$	$\frac{23-24a}{16}$	$+\infty$

$$+ \text{ Nếu } \frac{4a+3}{8} \geq 2 \Leftrightarrow a \geq \frac{13}{4}$$

$$\min_{x \in [0; 2]} y = f(2) = a^2 - 8a + 12 = 3 \Leftrightarrow a^2 - 8a + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 + \sqrt{7} \text{ (TM)} \\ a = 4 - \sqrt{7} \text{ (Loại)} \end{cases}$$

$$+ \text{ Nếu } \frac{4a+3}{8} \leq 0 \Leftrightarrow a \leq \frac{-3}{4}$$

$$\min_{x \in [0;2]} y = f(0) = a^2 + 2 = 3 \Leftrightarrow a^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 (\text{Loại}) \\ a = -1 (\text{TM}) \end{cases}$$

$$+ \text{ Nếu } 0 < \frac{4a+3}{8} < 2 \Rightarrow 0 < a < \frac{13}{4} : \min_{x \in [0;2]} y = \frac{23 - 24a}{16} = 3 \Leftrightarrow a = \frac{-25}{24}, \text{ loại.}$$

$$\text{Vậy các giá trị cần tìm của } a \text{ là: } a \in \left\{ 4 + \sqrt{7}; -1 \right\}.$$

Câu 93. Chọn C

Hàm số bậc hai với hệ số $a = 2 > 0$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = -\frac{b}{2a} = \frac{3(m+1)}{4}$ và

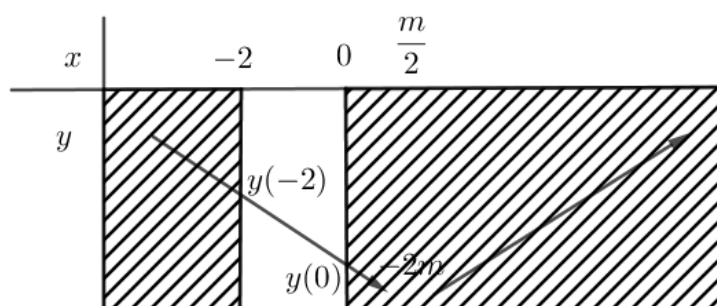
$$y_{\min} = y\left(\frac{3(m+1)}{4}\right) = -\frac{1}{8}m^2 + \frac{3}{4}m - \frac{25}{8} = -\frac{1}{8}(m-3)^2 - 2 \leq -2$$

Dấu bằng xảy ra khi $m = 3$.

Câu 94. Chọn A

$$\text{Ta có đỉnh } I\left(\frac{m}{2}; -2m\right).$$

Do $m > 0$ nên $\frac{m}{2} > 0$. Khi đó đỉnh $I \notin [-2; 0]$.



Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2; 0]$ là $y(0) = 3$ tại $x = 0$.

$$\Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = 3 \\ m_2 = -1 < 0 \end{cases} \Rightarrow S = \{3\}$$

Câu 95.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

$$\text{Điều kiện của } m \text{ là } m^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2 \\ m \leq -2 \end{cases}$$

- Xét $m \leq -2$ ta có $-\frac{b}{2a} = \frac{m + \sqrt{m^2 - 4}}{2} < 0$. Khi đó các số 0; 1 đều nằm bên phải $-\frac{b}{2a}$ nên

$$y_2 = y(0) = 4m + 2\sqrt{m^2 - 4}; \quad y_1 = y(1) = \sqrt{m^2 - 4} + 3m + 1$$

$$y_1 - y_2 = 8 \Leftrightarrow -m - 7 = \sqrt{m^2 - 4} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -7 \\ m = -\frac{53}{14} \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset$$

- Xét $m \geq 2$ ta có $-\frac{b}{2a} = \frac{m + \sqrt{m^2 - 4}}{2} \geq \frac{m}{2} = 1$; khi đó 0;1 đều nằm bên trái $-\frac{b}{2a}$ suy ra

$$y_1 = y(0) = 4m + 2\sqrt{m^2 - 4}; \quad y_2 = y(1) = \sqrt{m^2 - 4} + 3m + 1$$

$$y_1 - y_2 = 8 \Leftrightarrow \sqrt{m^2 - 4} = 9 - m \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq m \leq 9 \\ m = \frac{85}{18} \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{85}{18}$$

Vậy chỉ có duy nhất một giá trị của m thỏa mãn đề bài.

Câu 96. Chọn B

- Hàm số đã cho xác định $\Leftrightarrow (3-x)(x+1) \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3$.

Vậy TXĐ: $D = [-1; 3]$.

- Đặt $t = \sqrt{(3-x)(x+1)}$, với $t \in [0; 2]$.

$$\Rightarrow t^2 = (3-x)(x+1)$$

$$\Leftrightarrow t^2 = -x^2 + 2x + 3$$

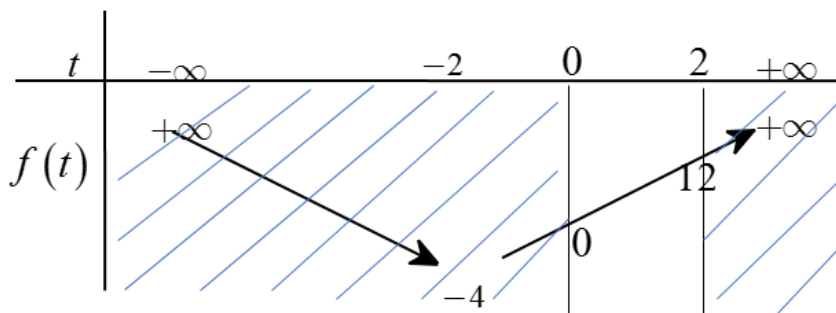
Khi đó hàm số đã cho trở thành: $f(t) = t^2 + 4t$, với $t \in [0; 2]$.

Ta có đỉnh I của Parabol (P) của hàm số $f(t) = t^2 + 4t$ có hoành độ: $t_1 = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2 \cdot 1} = -2$.

Khi đó $f(-2) = (-2)^2 + 4 \cdot (-2) = -4$.

Hay $I(-2; -4)$.

- Ta lập BBT hàm số $f(t) = t^2 + 4t$, với $t \in [0; 2]$.



- Từ BBT ta suy ra tập giá trị của hàm số đã cho là $W = [0; 12]$. Khi đó $K = 0^2 + 12^2 = 144$.

Dạng 5. Sự tương giao giữa parabol với đồ thị các hàm số khác

Dạng 5.1 Sự tương giao đồ thị của các hàm số tường minh số liệu

Câu 97.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^2 - 3x + 2 = x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$x = 1 \Rightarrow y = x - 1 = 0$$

$$x = 3 \Rightarrow y = x - 1 = 2$$

Hai giao điểm là: $(1; 0); (3; 2)$.

Câu 98. Chọn D

Hoành độ giao điểm của (P) và d là nghiệm của phương trình:

$$x^2 - 4x = -x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy tọa độ giao điểm của (P) và d là $M(1; -3)$, $N(2; -4)$.

Câu 99. Chọn D

Parabol đã cho có hệ số $c = 1$ nên sẽ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1.

Câu 100. Chọn D

$$x^2 - 7x + 12 = -x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow y = 2 \\ x = 4 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$

Phương trình hoành độ giao điểm:

Câu 101. Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm

$$1 - x = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Câu 102. **Chọn D**

$$2x - x^2 = 3x - 6 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow y = 0 \\ x = -3 \Rightarrow y = -15 \end{cases}$$

Phương trình hoành độ giao điểm:
 $b + d = -15$

Câu 103. Ta có $f(x-1) = x^2 - 5x + 5 = (x-1)^2 - 3(x-1) + 1$. Suy ra $f(x) = x^2 - 3x + 1$.

Phương trình $x^2 - 3x + 1 = 0$ có $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 5 > 0$ nên có hai nghiệm phân biệt.

Vậy (P) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt.

Đáp án C.

Câu 104. Phương trình hoành độ giao điểm của hai parabol:

$$2x^2 - x - 2 = x^2 + x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

$x = -1 \Rightarrow y = 1; x = 3 \Rightarrow y = 13$, do đó hai giao điểm là $A(-1; 1)$ và $B(3; 13)$.

Từ đó $AB = \sqrt{(3+1)^2 + (13-1)^2} = 4\sqrt{10}$.

Đáp án C.

Dạng 5.2 Biện luận tương giao đồ thị theo tham số m

Câu 105. **Chọn D**

Cho $x^2 + 3x + m = 0$ (1)

Để đồ thị cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow 3^2 - 4m > 0 \Leftrightarrow 9 - 4m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{9}{4}$$

Câu 106. **Chọn D**

$$x^2 + 2x + m = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = -m - 1 \quad (*)$$

Số nghiệm của phương trình $(*)$ chính là số giao điểm của parabol $y = x^2 + 2x + 1$ và đường thẳng $y = -m - 1$.

Ycbt $\Rightarrow m > 1$.

Câu 107. Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) :

$$x^2 + x - 2 = -(m+1)x + m + 2 \Leftrightarrow x^2 + (m+2)x - m - 4 = 0 \quad (*)$$

d cắt (P) tại hai điểm phân biệt nằm về cùng một phía đối với trục tung khi và chỉ khi $(*)$ có hai nghiệm phân biệt cùng dấu

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 8m + 20 > 0 \\ -m - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -4$$

Vậy có 6 giá trị m nguyên trong nửa khoảng $[-10; -4)$ thỏa mãn ycbt.

Đáp án A.

Câu 108. Đáp án A.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) :

$$x^2 - mx = (m+2)x + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x - 1 = 0 \quad (*)$$

$(*)$ có a, c trái dấu nên luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m . Do đó (P) và (d) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt với mọi m . Khi đó x_M, x_N là hai nghiệm phân biệt của $(*)$.

Theo Viet ta có $x_M + x_N = 2(m+1)$

$$\text{Ta có } x_I = \frac{x_M + x_N}{2} = m+1$$

$$\text{Suy ra } y_I = (m+2)(m+1) + 1$$

$$= (m+1)^2 + (m+1) + 1 = x_I^2 + x_I + 1$$

Vậy I luôn thuộc parabol $y = x^2 + x + 1$ với mọi m .

Chú ý: Cho hai điểm $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$. Trung điểm của đoạn thẳng AB là

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

Câu 109. Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là: $x^2 + 3x = x + m^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x - m^2 = 0 \quad (1)$.

Đề d cắt (P) tại 2 điểm phân biệt $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 1 + m^2 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$.

Gọi $x_1; x_2$ là 2 nghiệm của phương trình (1), khi đó $A(x_1; x_1 + m^2), B(x_2; x_2 + m^2)$

$$\Rightarrow I\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1 + x_2 + 2m^2}{2}\right)$$

Theo Vi-ét ta có $x_1 + x_2 = -2$; $x_1 \cdot x_2 = -m^2$ nên $I(-1; m^2 - 1)$.

Vì I thuộc d' nên $m^2 - 1 = 1 \Leftrightarrow m^2 = 2 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{2}$.

Câu 110. Chọn A

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số (1) và đường thẳng (d) là nghiệm của phương trình

$$x^2 - 3mx + m^2 + 1 = mx + m^2 \Leftrightarrow x^2 - 4mx + 1 = 0 \quad (*)$$

Đồ thị hàm số (1) cắt đường thẳng (d) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| = 1$ khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt không âm thỏa mãn $x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_1 x_2} = 1$.

Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt không âm $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S \geq 0 \\ P \geq 0 \end{cases} \quad (**)$

Theo định lý Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4m \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases}$, suy ra $(**) \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - 1 > 0 \\ 4m \geq 0 \\ 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\frac{1}{2} \\ m > \frac{1}{2} \\ m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$.

Lại có, $x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_1 x_2} = 1 \Leftrightarrow 4m - 2 = 1 \Leftrightarrow m = \frac{3}{4}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy $m = \frac{3}{4}$.

Câu 111. Chọn A

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $2x^2 - 3x - 5 = 4x + m \Leftrightarrow 2x^2 - 7x - 5 - m = 0 \quad (*)$

Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5 - m) > 0$

$$\Leftrightarrow 8m + 89 > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{89}{8}$$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của $(*)$ nên theo Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{7}{2} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{-5 - m}{2} \end{cases}$.

$$2x_1^2 + 2x_2^2 = 3x_1x_2 + 7 \Leftrightarrow 2(x_1 + x_2)^2 - 7x_1x_2 - 7 = 0 \Leftrightarrow 2\left(\frac{7}{2}\right)^2 - 7\left(\frac{-5-m}{2}\right) - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow 70 + 7m = 0 \Leftrightarrow m = -10 \text{ (thỏa mãn đk } m > -\frac{89}{8} \text{)}.$$

Vậy $m = -10$ là giá trị cần tìm.

Câu 112. Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 + 1 = mx - 3 \Leftrightarrow x^2 - mx + 4 = 0$ (*)

Đường thẳng $y = mx - 3$ không có điểm chung với Parabol $y = x^2 + 1 \Leftrightarrow$ Phương trình (*) vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta < 0 \Leftrightarrow m^2 - 16 < 0 \Leftrightarrow -4 < m < 4$.

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$.

Câu 113. Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 - 3x - 5 = mx + 3 - 2m \Leftrightarrow x^2 - (m+3)x + 2m - 8 = 0$ (*)

Đường thẳng cắt parabol tại hai điểm phân biệt có hoành độ trái dấu khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow a.c < 0 \Leftrightarrow 2m - 8 < 0 \Leftrightarrow m < 4$.

Câu 114. Chọn A.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) với trục hoành: $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 3 = 0$ (1)

Parabol (P) cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1 \cdot x_2 = 1$

$\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $x_1 \cdot x_2 = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (m+1)^2 - (m^2 - 3) > 0 \\ m^2 - 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -2 \\ m = \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$$

Câu 115. Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là

$$x^2 + 2x - 5 = 2mx + 2 - 3m \Leftrightarrow x^2 + 2(1-m)x - 7 + 3m = 0 \quad (*)$$

(P) cắt d tại hai điểm phân biệt nằm về phía bên phải của trục tung khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ \frac{-b}{a} > 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-m)^2 + 7 - 3m > 0 \\ -2(1-m) > 0 \\ -7 + 3m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 5m + 8 > 0 \\ 1-m < 0 \\ 3m - 7 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m > \frac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{7}{3}$$

Vậy $m > \frac{7}{3}$.

Câu 116. Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và trục Ox là: $x^2 - 4x + m = 0$ (1).

(P) cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn $OA = 3OB \Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1| = 3|x_2|$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ \begin{cases} x_1 = 3x_2 \\ x_1 = -3x_2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - m > 0 \\ \begin{cases} x_1 = 3x_2 \\ x_1 = -3x_2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 \\ \begin{cases} x_1 = 3x_2 \\ x_1 = -3x_2 \end{cases} \end{cases}$$

Mặt khác, theo định lý Viet cho phương trình (1) thì: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 \cdot x_2 = m \end{cases}$.

Với $x_1 = 3x_2 \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = 1 \Rightarrow m = 3$ thỏa mãn.

Với $x_1 = -3x_2 \Rightarrow x_1 = 6, x_2 = -2 \Rightarrow m = -12$ thỏa mãn.

Có hai giá trị của m là $m = 3$ và $m = -12$.

Vậy $T = -9$. Chọn đáp án A.

Câu 117. Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) với trục hoành: $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 3 = 0$ (1).

Parabol (P) cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1 \cdot x_2 = 1$

$\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $x_1 \cdot x_2 = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (m+1)^2 - (m^2 - 3) > 0 \\ m^2 - 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -2 \\ m = \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$$

Câu 118. Đáp án D.

Vì đường thẳng $y = -2,5$ có một điểm chung duy nhất với (P) và đường thẳng $y = 2$ cắt (P) tại hai điểm có hoành độ là -1 và 5 nên suy ra tọa độ đỉnh của (P) là:

$$\left(\frac{-1+5}{2}; 2,5 \right) = (2; 2,5)$$

Vậy (P) đi qua ba điểm $(2; 2,5)$, $(-1; 2)$ và $(5; 2)$.

Từ đó ta có hệ

$$\begin{cases} a - b + c = 2 \\ 25a + 5b + c = 2 \\ 4a + 2b + c = 2,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{10} \\ b = -\frac{4}{10} \\ c = \frac{15}{10} \end{cases}$$

Vậy $a - b - c = -1$.

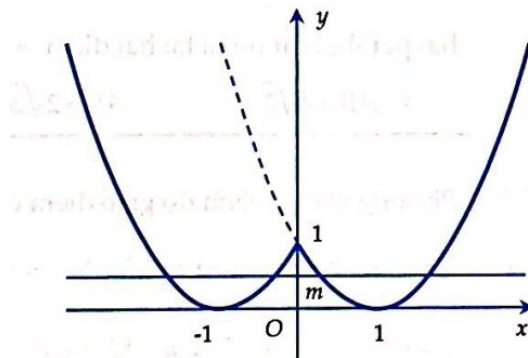
Dạng 5.3 Bài toán tương giao đồ thị hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối

Câu 119. Cách 1: $x^2 - 2|x| + 1 - m = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2|x| + 1 = m$ (*). Số nghiệm của (*) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^2 - 2|x| + 1$ và đường thẳng $y = m$.

Để thấy hàm số $y = x^2 - 2|x| + 1$ là một hàm số chẵn, do đó có đồ thị đối xứng qua trục Oy . Mặt khác ta có $y = x^2 - 2|x| + 1 = x^2 - 2x + 1$ với $x \geq 0$.

Từ đó ta có cách vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 - 2|x| + 1$ như sau:

- Bước 1: Vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x + 1$;
- Bước 2: Xóa phần nằm bên trái trục tung (ứng với $x < 0$) của đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x + 1$;
- Bước 3: Lấy đối xứng phần nằm bên phải trục tung (ứng với $x \geq 0$) của đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x + 1$ qua trục tung.



Quan sát trên đồ thị ta thấy đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = x^2 - 2|x| + 1$ tại bốn điểm phân biệt khi và chỉ khi $0 < m < 1$. Suy ra không có giá trị nguyên nào của m để phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt.

Cách 2: Đặt $t = |x|, t \geq 0$. Phương trình đã cho trở thành $t^2 - 2t + 1 - m = 0$ (**).

Ta thấy với $t = 0$ thì $x = 0$, với $t > 0$ thì $x = \pm t$.

Do đó để phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt thì (**) phải có hai nghiệm dương phân

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - (1 - m) > 0 \\ 2 > 0 \\ 1 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 1$$

biệt

Do đó không có giá trị nguyên nào của m để phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt.

Đáp án A.

$$y = |x^2 - 4x + 3| = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{khi } x^2 - 4x + 3 \geq 0 \\ -(x^2 - 4x + 3) & \text{khi } x^2 - 4x + 3 < 0 \end{cases}$$

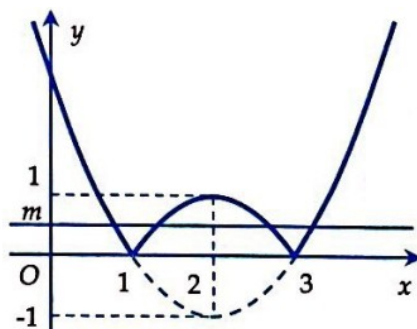
Câu 120. Ta có

Từ đó ta có cách vẽ đồ thị hàm số $y = |x^2 - 4x + 3|$:

- Bước 1: Vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 3$;

- Bước 2: Giữ nguyên phần nằm trên trục Ox của đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 3$;

- Bước 3: Lấy đối xứng phần nằm dưới trục Ox của đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 3$.



Quan sát đồ thị ta thấy đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = |x^2 - 4x + 3|$ tại bốn điểm phân biệt khi và chỉ khi $0 < m < 1$. Vậy $S = (0; 1)$. Suy ra $a + b = 1$.

Đáp án A.

Câu 121. Đáp án C.

$$\text{Ta có } |x|\sqrt{x^2 - 4|x| + 4} = m$$

$$\Leftrightarrow |x|\sqrt{(|x| - 2)^2} = m$$

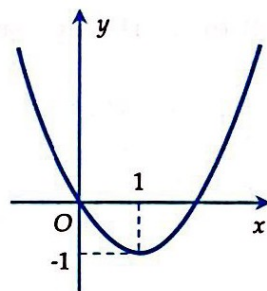
$$\Leftrightarrow |x|(|x| - 2) = m$$

Phương trình $|x|(|x| - 2) = m$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số

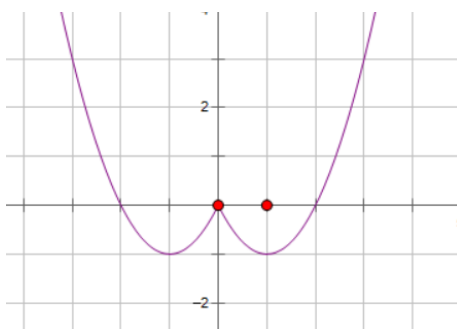
$y = |x|(|x| - 2)$ và đường thẳng $y = m$.

Vẽ đồ thị hàm số $y = |x|(|x| - 2)$:

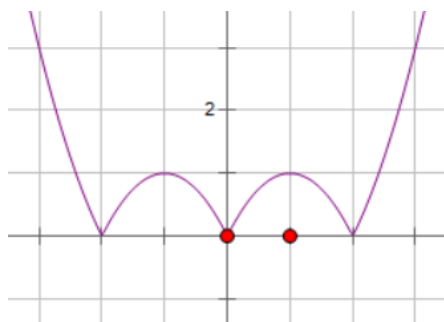
- Bước 1: Vẽ đồ thị hàm số $y = x(x - 2)$.



- Bước 2: Từ đồ thị hàm số $y = x(x - 2)$ suy ra đồ thị hàm số $y = |x|(|x| - 2)$.



- Bước 3: Từ đồ thị hàm số $y = |x|(|x| - 2)$ suy ra đồ thị hàm số $y = ||x|(|x| - 2)|$.

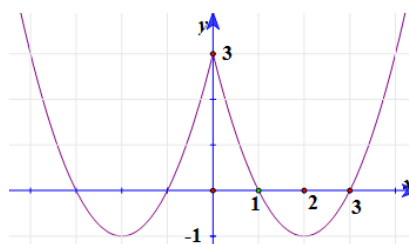


Quan sát đồ thị ta thấy phương trình $|x|\sqrt{x^2 - 4|x| + 4} = m$ có 6 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m \in (0; 1)$.

Vậy $a + b = 1$.

Câu 122. Chọn E

Từ đồ thị (C) suy ra đồ thị (C') của hàm số $y = f(|x|)$ gồm 2 phần: Phần 1 giữ nguyên phần (C) bên phải trục Oy ; phần 2 lấy đối xứng phần 1 qua trục Oy .



$$f^2(|x|) + (m-2)f(|x|) + m-3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(|x|) = -1 & (1) \\ f(|x|) = 3-m & (2) \end{cases}$$

Ta có:

Từ đồ thị (C') $\Rightarrow$ phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt.

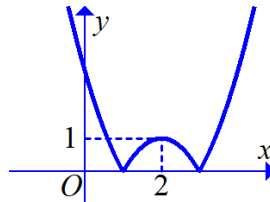
Vậy để phương trình đã cho có 6 nghiệm phân biệt thì phương trình (2) có 4 nghiệm phân biệt, khác hai 2 nghiệm của phương trình (1) (*).

Từ đồ thị (C') , ta có (*) $\Leftrightarrow -1 < 3-m < 3 \Leftrightarrow 0 < m < 4$.

Do đó có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

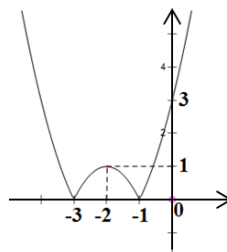
Câu 123. Chọn A

Số nghiệm của phương trình $|f(x)| = m$ là số giao điểm của đồ thị $y = |f(x)|$ và đường thẳng $y = m$. Ta có đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ như hình vẽ dưới đây.



Do đó phương trình $|f(x)| = m$ có đúng 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $0 < m < 1$.

Câu 124. Chọn D



Đồ thị (C_1) của hàm số $y = ax^2 - bx + c = a(-x)^2 + b(-x) + c$ đối xứng với đồ thị (C) của hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ qua trục tung.

Từ đó suy ra đồ thị (C_2) của hàm số $y = |ax^2 - bx + c|$ gồm phần đồ thị (C_1) ở phía trên Ox (kể cả các điểm thuộc Ox) và phần đối xứng qua Ox của phần (C_1) nằm phía dưới trục hoành (như hình vẽ).

Dựa vào đồ thị suy ra đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị (C_2) tại 4 điểm phân biệt khi $0 < m < 1$, hay phương trình $|ax^2 - bx + c| = m$ có đúng 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $0 < m < 1$.

Không có số nguyên m nào thuộc khoảng $(0; 1)$.

Câu 125. Chọn A

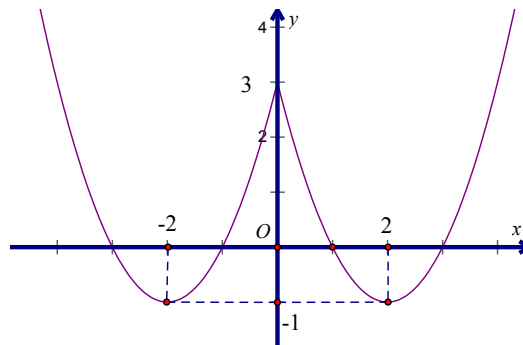
Đồ thị hàm số cắt Oy tại $(0;3)$ $\Rightarrow c = 3$

Đồ thị hàm số nhận $(2;-1)$ làm đỉnh nên ta có
$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 2 \\ 4a + 2b + c = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = -4a \\ 4a + 2b = -4 \end{cases} \hat{=} \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \end{cases}$$

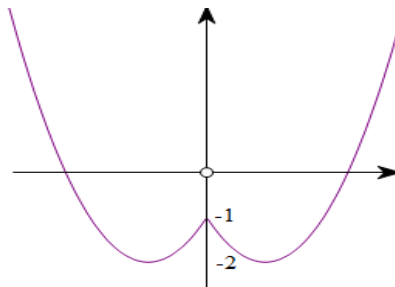
Ta có $f(|x|) + 1 = m \hat{=} y = f(|x|) = m - 1$

Ta có đồ thị hàm $y = f(|x|)$ (C) như hình vẽ.



Số nghiệm của phương trình $f(|x|) + 1 = m$ là số giao điểm của đồ thị hàm số (C) với đường thẳng $y = m - 1 \hat{=} m - 1 = 3 \hat{=} m = 4$

Câu 126. Chọn B



Hàm số $y = x^2 - 2|x| - 1$ có đồ thị được suy ra từ đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x - 1$ bằng cách bỏ phần đồ thị phía trái trục tung và lấy thêm phần đối xứng của phần phía phải trục tung qua trục tung (như hình vẽ)

Đồ thị hàm số $y = x^2 - 2|x| - 1$ cắt đường thẳng $y = m - 3$ tại 4 điểm phân biệt khi và chỉ khi $-2 < m - 3 < -1 \Leftrightarrow 1 < m < 2$.

Câu 127. Chọn C

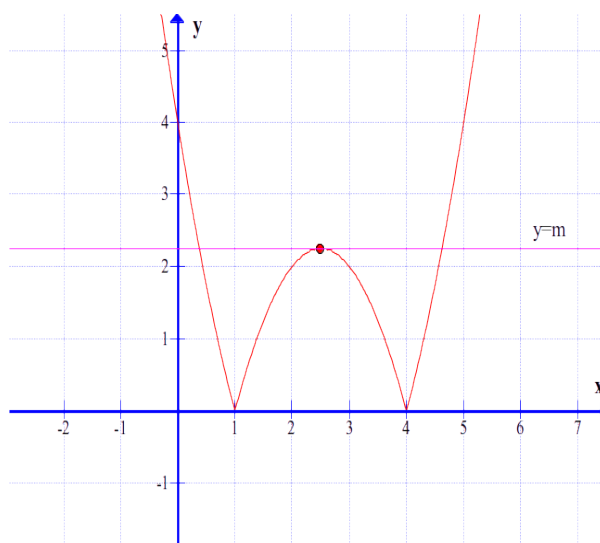
Ta có:

$$y = |x^2 - 5x + 4| = \begin{cases} x^2 - 5x + 4 & \text{khi } x^2 - 5x + 4 \geq 0 \\ -(x^2 - 5x + 4) & \text{khi } x^2 - 5x + 4 < 0 \end{cases} \quad (C)$$

Giữ nguyên đồ thị (P) ứng với $y \geq 0$ ta được đồ thị (C₁)

Lấy đối xứng phần đồ thị (P) ứng với $y < 0$ ta được đồ thị (C_2)

Vậy $(C) = (C_1) \cup (C_2)$



Số nghiệm của phương trình chính là số giao điểm nếu có của đồ thị hàm số $y = |x^2 - 5x + 4|$ (C) và đường thẳng $y = m$ (d)

Yêu cầu bài ra $\Leftrightarrow (d)$ cắt (P) tại 3 điểm phân biệt

$-d$ là đường thẳng song song hoặc trùng với trục hoành

Từ đồ thị hàm số ta suy ra (d) cắt (P) tại 3 điểm phân biệt khi $m = \frac{9}{4}$

Câu 128. Chọn D

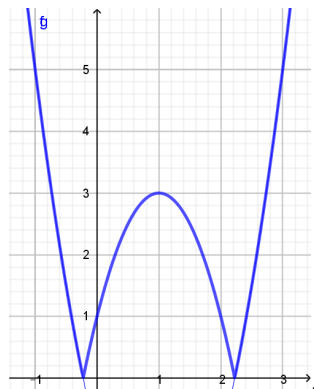
Từ đồ thị của hàm số $y = f(x)$, ta suy ra cách vẽ đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ như sau:

-Giữ nguyên phần đồ thị hàm số $y = f(x)$ ở phía trên trục hoành.

-Lấy đối xứng phần đồ thị dưới trục hoành qua trục hoành.

-Xóa phần đồ thị phía dưới trục hoành.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ ta có đường thẳng $y = mx + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow 0 < m + 1 < 3 \Leftrightarrow -1 < m < 2$.



Câu 129. **Chọn C**

Cách 1:

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 - 9|x| = m \Leftrightarrow x^2 - 9|x| - m = 0$ (1)

Đặt $t = |x|$, $t \geq 0$.

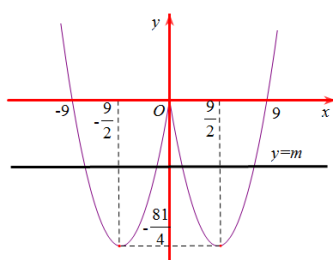
$$(1) \Rightarrow t^2 - 9t - m = 0 \quad (2)$$

Đồ thị hàm số $y = x^2 - 9|x|$ cắt đường thẳng $y = m$ tại 4 điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (2) có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 81 + 4m > 0 \\ 9 > 0 \\ -m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{81}{4} < m < 0$$

Cách 2:

Vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 - 9|x|$



Dựa vào đồ thị suy ra đồ thị hàm số $y = x^2 - 9|x|$ cắt đường thẳng $y = m$ tại 4 điểm phân biệt

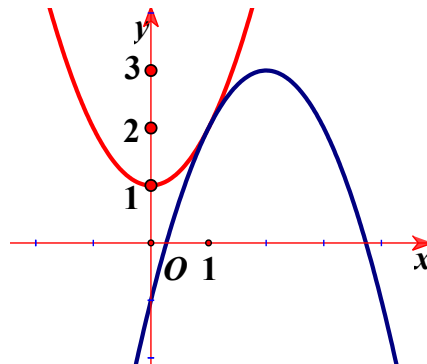
khi và chỉ khi $-\frac{81}{4} < m < 0$.

Câu 130. **Chọn C**

$$pt \Leftrightarrow (x-1)^2 = 2|x-m| \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = 2(x-m) \\ (x-1)^2 = -2(x-m) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 4x - 1 = 2m \\ x^2 + 1 = 2m \end{cases}$$

Vẽ đồ thị hàm số $y = -x^2 + 4x - 1$ và $y = x^2 + 1$ trên cùng 1 hệ trục tọa độ:

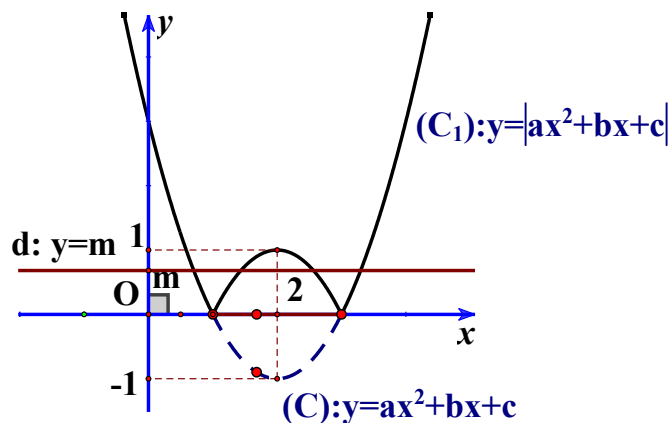


$$\begin{cases} 2m = 1 \\ 2m = 2 \\ 2m = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ m = 1 \\ m = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Từ đồ thị suy ra để phương trình có 3 nghiệm thì

Câu 131. Chọn D

Từ đồ thị hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ ta suy ra đồ thị hàm $y = |f(x)| = |ax^2 + bx + c|$.



Phương trình $|f(x)| = m$ có đúng 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ Đường thẳng $d: y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = |ax^2 + bx + c|$ tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow 0 < m < 1$.

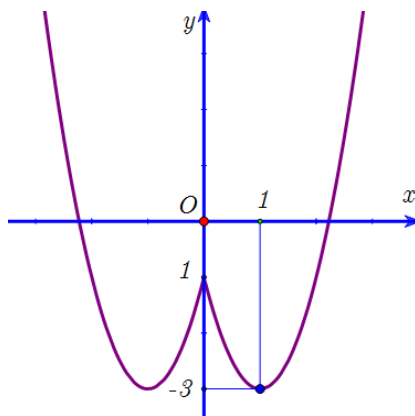
Câu 132. Chọn A

Gọi $(C): y = ax^2 + bx + c$; $(C_1): y = ax^2 + b|x| + c$; $(C_2): y = |ax^2 + b|x| + c|$

Từ (C) suy ra (C_1) như sau:

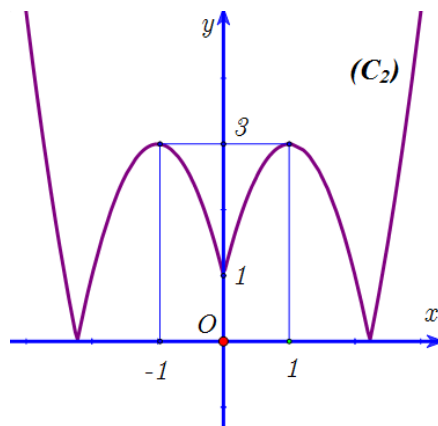
- Giữ nguyên phần đồ thị của (C) bên phải trục tung.

- Lấy đối xứng phần đồ thị (C) bên phải trục tung qua trục tung.



Từ (C_1) suy ra (C_2) như sau:

- Giữ nguyên phần đồ thị (C_1) phía trên trục hoành.
- Lấy đối xứng phần đồ thị (C_1) phía dưới trục hoành qua trục hoành.



$$|ax^2 + b|x| + c| - m = 0 \Leftrightarrow |ax^2 + b|x| + c| = m \quad (*)$$

Ta có phương trình

Khi đó số nghiệm của phương trình $(*)$ bằng số giao điểm giữa (C_2) và đường thẳng $y = m$.

Vì vậy để phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m > 3 \end{cases}$.

$$\text{Mà } \begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [0; 2018] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m = 0 \vee m \in (3; 2018] \end{cases} \Rightarrow m \in \{0; 4; 5; 6; \dots; 2018\}$$

Vậy có 2016 giá trị của m .

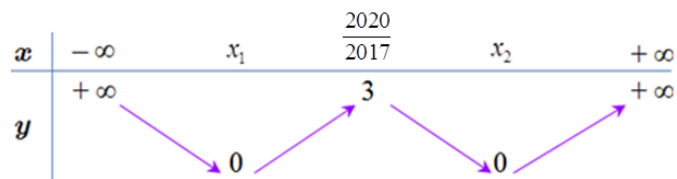
Câu 133. **Chọn E**

Dựa vào BBT ta thấy hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ đạt GTNN bằng -1 tại $x = 2$ và có hệ số $a > 0$. Ta biểu diễn được: $f(x) = a(x - 2)^2 - 1 = ax^2 - 4ax + 4a - 1$

Do đó $f(2017x - 2018) = a(2017x - 2020)^2 - 1$
 $\Rightarrow f(2017x - 2018) - 2 = a(2017x - 2020)^2 - 3$

Vậy GTNN của $y = f(2017x - 2018) - 2$ bằng -3 tại $x = \frac{2020}{2017}$.

BBT của hàm số $y = |f(2017x - 2018) - 2|$ có dạng:



Số nghiệm của phương trình $|f(2017x - 2018) - 2| = m$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = |f(2017x - 2018) - 2|$ và đường thẳng $y = m$.

Dựa vào BBT ta thấy phương trình $|f(2017x - 2018) - 2| = m$ có đúng ba nghiệm khi $m = 3$.

Câu 134. Chọn C

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ đạt GTLN bằng 2 tại $x = 1$ và có hệ số $a < 0$. Ta biểu diễn được: $f(x) = a(x - 1)^2 + 2 = ax^2 - 2ax + a + 2$

$\Rightarrow f(-x) = a(x + 1)^2 + 2$

Vậy GTLN của $y = f(-x)$ bằng 2 tại $x = -1$. (vì hệ số $a < 0$).

Số nghiệm của phương trình $f(-x) + m - 2019 = 0 \Leftrightarrow f(-x) = 2019 - m$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(-x)$ và đường thẳng $y = 2019 - m$

Do đó phương trình có nghiệm duy nhất khi $2019 - m = \max f(x) \Leftrightarrow 2019 - m = 2$
 $\Leftrightarrow m = 2017$

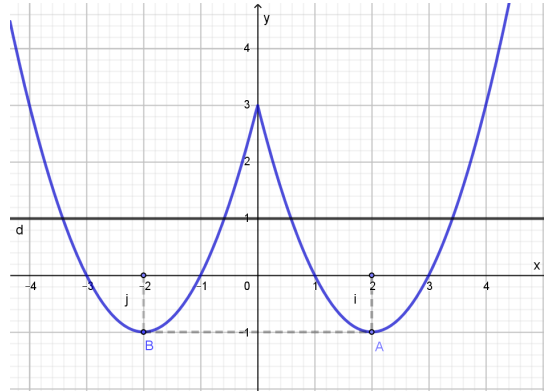
Câu 135. Chọn A

$x^2 - 4|x| - m = 0 \quad (1) \Leftrightarrow x^2 - 4|x| = m \Leftrightarrow x^2 - 4|x| + 2 = m + 2 \quad (2)$

Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y = x^2 - 4|x| + 2$ cắt đường thẳng $y = m + 2$ tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow -2 < m + 2 < 2$
 $\Leftrightarrow -4 < m < 0$

Câu 136. Chọn C

* Vẽ đồ thị hàm số (C') của hàm số $y = f(|x|)$: Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm phía bên phải trục Oy , bỏ đi phần đồ thị (C) bên trái trục Oy và lấy đối xứng phần đồ thị (C) phía bên phải trục Oy qua trục Oy .



* Ta có $f^2(|x|) + (m - 2)f(|x|) + m - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(|x|) = -1 \\ f(|x|) = 3 - m \end{cases}$.

* Từ đồ thị (C') , ta có:

- Phương trình $f(|x|) = -1$ có hai nghiệm là $x = 2, x = -2$.

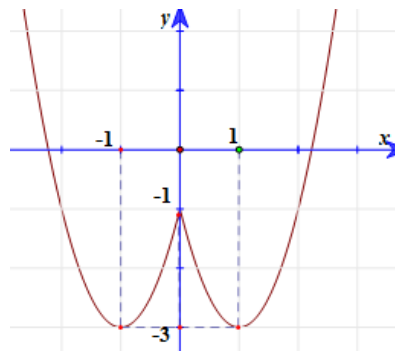
- Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình $f(|x|) = 3 - m$ có bốn nghiệm phân biệt khác ± 2 suy ra

Đường thẳng $d: y = 3 - m$ cắt đồ thị (C') tại bốn điểm phân biệt khác A, B

$\Leftrightarrow -1 < 3 - m < 3 \Leftrightarrow 0 < m < 4$. Suy ra $m \in \{1, 2, 3\}$.

Câu 137. Chọn B

+) Vẽ đồ thị hàm số $y = f(|x|)$



$f^2(|x|) + f(|x|) - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(|x|) = 1 \quad (1) \\ f(|x|) = -2 \quad (2) \end{cases}$

Số nghiệm của ⁽¹⁾ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ và đường thẳng $y = 1$, từ đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ ta suy ra ⁽¹⁾ có 2 nghiệm phân biệt.

Số nghiệm của ⁽²⁾ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ và đường thẳng $y = -2$, từ đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ ta suy ra ⁽²⁾ có 4 nghiệm phân biệt (khác 2 nghiệm của ⁽¹⁾).

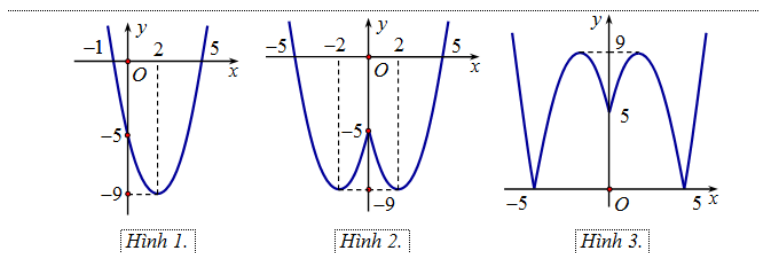
Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm phân biệt.

Câu 138. Chọn B

PT: $|x^2 - 4|x| - 5| - m = 0 \Leftrightarrow |x^2 - 4|x| - 5| = m \quad (1)$

Số nghiệm phương trình ⁽¹⁾ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = |x^2 - 4|x| - 5| \quad (P)$ và đường thẳng $y = m$ (cùng phương Ox).

Xét hàm số $y = x^2 - 4|x| - 5 \quad (P_1)$ có đồ thị như hình 1.



Xét hàm số $y = x^2 - 4|x| - 5 \quad (P_2)$ là hàm số chẵn nên có đồ thị nhận Oy làm trục đối xứng. Mà $y = x^2 - 4|x| - 5 = x^2 - 4x - 5$ nếu $x \geq 0$. Suy ra đồ thị hàm số ^(P₂) gồm hai phần:

- ⊛ Phần 1: Giữ nguyên đồ thị hàm số ^(P₁) phần bên phải Oy .
- ⊛ Phần 2: Lấy đối xứng phần 1 qua trục Oy .

Ta được đồ thị ^(P₂) như hình 2.

Xét hàm số $y = |x^2 - 4|x| - 5| \quad (P)$, ta có:

$$y = \begin{cases} x^2 - 4|x| - 5 & (y \geq 0) \\ -(x^2 - 4|x| - 5) & (y < 0) \end{cases}$$

Suy ra đồ thị hàm số ^(P) gồm hai phần:

- ⊛ Phần 1: Giữ nguyên đồ thị hàm số ^(P₂) phần trên Ox .
- ⊛ Phần 2: Lấy đối xứng đồ thị hàm số ^(P₂) phần dưới Ox qua trục Ox .

Ta được đồ thị ^(P) như hình 3.

Quan sát đồ thị hàm số (P) ta có: Để $|x^2 - 4|x| - 5| = m$ (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m > 9 \\ m = 0 \end{cases}$.

Mà $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in (0; 2017] \end{cases} \Rightarrow m \in \{10; 11; 12; \dots; 2017\}$.

Câu 139. Chọn A

Số nghiệm của phương trình $|f(x)| = m$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = g(x) = |f(x)|$ và đường thẳng $y = m$.

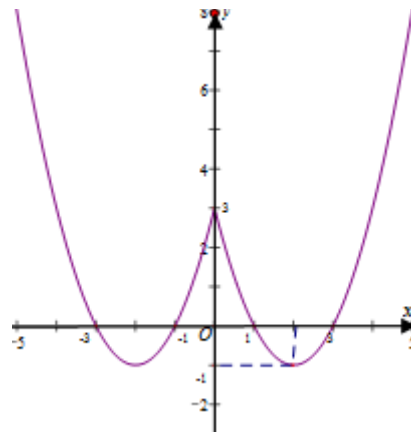
Xét $(P_2): y = f(x) = x^2 - 4|x| + 3$; có $y = f(x)$ là hàm số chẵn; nên (P_2) nhận trục Oy làm trục đối xứng.

Từ đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ (P_1) ; ta vẽ đồ thị hàm số $y = f(x) = x^2 - 4|x| + 3$ (P_2) như sau:

+) Giữ nguyên phần đồ thị (P_1) bên phải trục Oy .

+) Lấy đối xứng phần đồ thị (P_1) bên phải trục Oy qua trục Oy .

(Bỏ phần đồ thị (P_1) bên trái trục Oy)

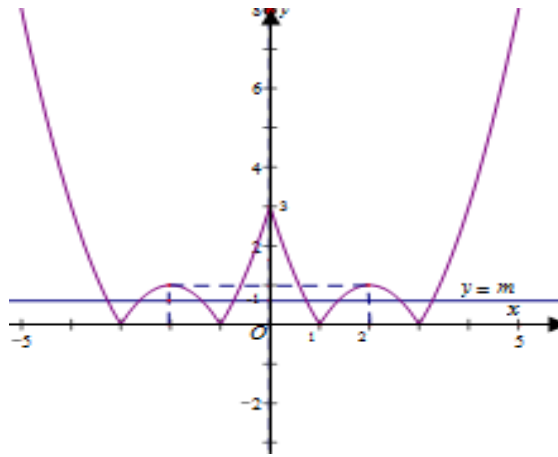


Từ đồ thị hàm số $y = f(x) = x^2 - 4|x| + 3$ (P_2) ta vẽ đồ thị hàm số $y = g(x) = |x^2 - 4|x| + 3|$ (P_3) như sau

+) Giữ nguyên phần đồ thị (P_2) nằm trên trục Ox .

+) Lấy đối xứng phần đồ thị (P_2) nằm trên trục Ox qua trục Ox .

(Bỏ phần đồ thị (P_2) nằm phía dưới trục Ox)



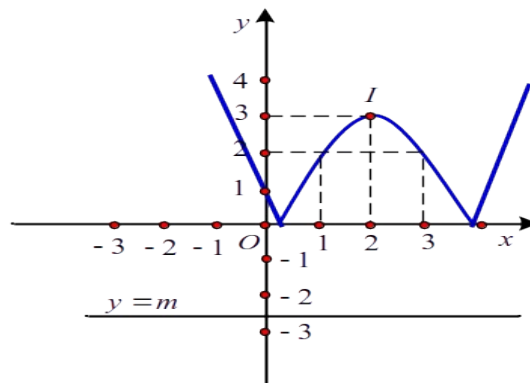
Dựa vào đồ thị hàm số $y = g(x) = |x^2 - 4|x| + 3|$ (P_3) ta có phương trình $|f(x)| = m$ có 8 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $0 < m < 1$. Vậy không có giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Câu 140. Chọn E

Quan sát đồ thị ta có đỉnh của parabol là $I(2;3)$ nên
$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 2 \\ 3 = 4a + 2b + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ 4a + 2b + c = 3 \end{cases}$$

Mặt khác (P) cắt trục tung tại $(0; -1)$ nên $c = -1$. Suy ra
$$\begin{cases} b = -4a \\ 4a + 2b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \end{cases}$$

$(P): y = -x^2 + 4x - 1$ suy ra hàm số $y = |-x^2 + 4x - 1|$ có đồ thị là phần đồ thị phía trên trục hoành của (P) và phần có được do lấy đối xứng phần phía dưới trục hoành của (P) , như hình vẽ sau:

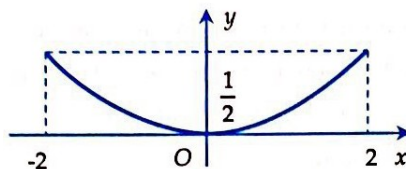


Phương trình $|ax^2 + bx + c| = m$ hay $|-x^2 + 4x - 1| = m$ có bốn nghiệm phân biệt khi đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = |-x^2 + 4x - 1|$ tại bốn điểm phân biệt. Suy ra $0 < m < 3$.

Dạng 6. Một số câu hỏi thực tế liên quan đến hàm số bậc hai

Câu 141. Đáp án B.

Từ giả thiết suy ra parabol $y = ax^2$ đi qua điểm $I\left(2; \frac{1}{2}\right)$.

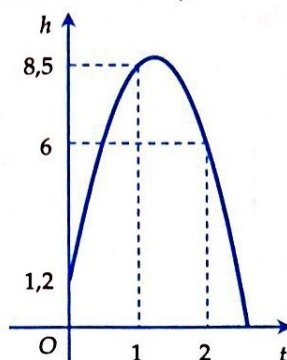


Từ đó ta có $\frac{1}{2} = a \cdot 2^2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{8}$.

Vậy $m - n = 1 - 8 = -7$.

Câu 142. Đáp án C.

Gọi phương trình của parabol quỹ đạo là $h = at^2 + bt + c$. Từ giả thiết suy ra parabol đi qua các điểm $(0; 1,2)$, $(1; 8,5)$ và $(2; 6)$.



Từ đó ta có

$$\begin{cases} c = 1,2 \\ a + b + c = 8,5 \\ 4a + 2b + c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4,9 \\ b = 12,2 \\ c = 1,2 \end{cases}$$

Vậy phương trình của parabol quỹ đạo là $h = -4,9t^2 + 12,2t + 1,2$.

Giải phương trình

$h = 0 \Leftrightarrow -4,9t^2 + 12,2t + 1,2 = 0$ ta tìm được một nghiệm dương là $t \approx 2,58$.

Câu 143. Chọn C

$$\begin{cases} c=1,2 \\ a+b+c=8,5 \\ 4a+2b+c=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{49}{10} \\ b=\frac{61}{5} \\ c=1,2 \end{cases}$$

Từ giả thiết của bài toán ta có hệ phương trình

$$\Rightarrow a+b+c=\frac{17}{2}$$

Câu 144. Chọn A.

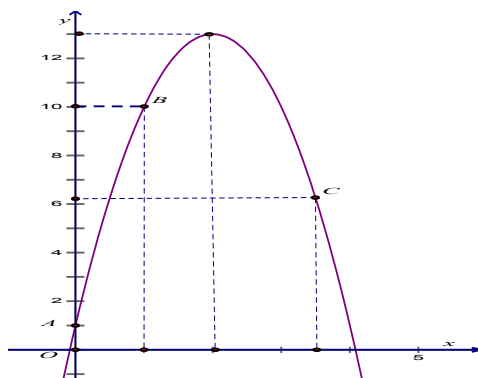
Gọi y là số tiền lãi của cửa hàng bán giày.

$$\text{Ta có } y=(120-x)(x-40)=-x^2+160x-4800=-(x-80)^2+1600 \leq 1600$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=80$.

Vậy cửa hàng lãi nhiều nhất khi bán đôi giày với giá 80 USD.

Câu 145. Chọn C



Biết rằng quỹ đạo của quả bóng là một cung parabol nên phương trình có dạng $y=ax^2+bx+c$

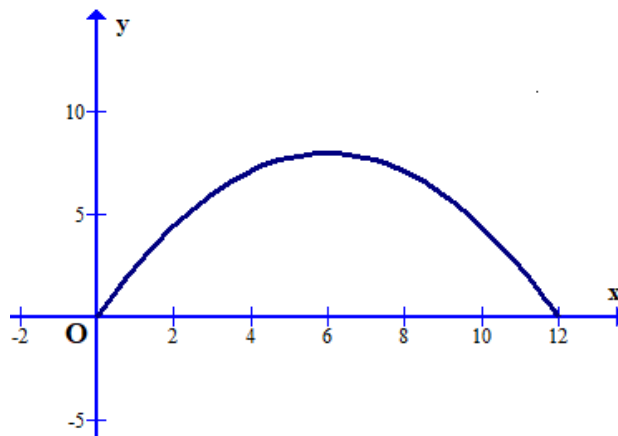
Theo bài ra gắn vào hệ tọa độ và sẽ tương ứng các điểm A, B, C nên ta có

$$\begin{cases} c=1 \\ a+b+c=10 \\ 12,25a+3,5b+c=6,25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=12 \\ c=1 \end{cases}$$

Suy ra phương trình parabol là $y=-3x^2+12x+1$.

Parabol có đỉnh $I(2;13)$. Khi đó quả bóng đạt vị trí cao nhất tại đỉnh tức $h=13$ m.

Câu 146. Chọn D



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Parabol có phương trình dạng $y = ax^2 + bx$.

Vì chiếc cổng hình parabol có chiều rộng 12 m và chiều cao, theo hình vẽ ta có parabol đi qua các điểm $(12;0)$ và $(6;8)$, suy ra:

$$\begin{cases} 144a + 12b = 0 \\ 36a + 6b = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{9} \\ b = \frac{8}{3} \end{cases}$$

Suy ra parabol có phương trình $y = -\frac{2}{9}x^2 + \frac{8}{3}$.

Do chiếc xe tải có chiều ngang 6 m đi vào vị trí chính giữa cổng nên xe sẽ chạm tường tại điểm $A(3; 6)$ khi đó chiều cao của xe là 6.

Vậy điều kiện để xe tải có thể đi vào cổng mà không chạm tường là $0 < h < 6$.

Câu 147. Chọn C

Gọi x là chiều dài của hình chữ nhật.

Khi đó chiều rộng là $8 - x$.

Diện tích hình chữ nhật là $x(8 - x)$.

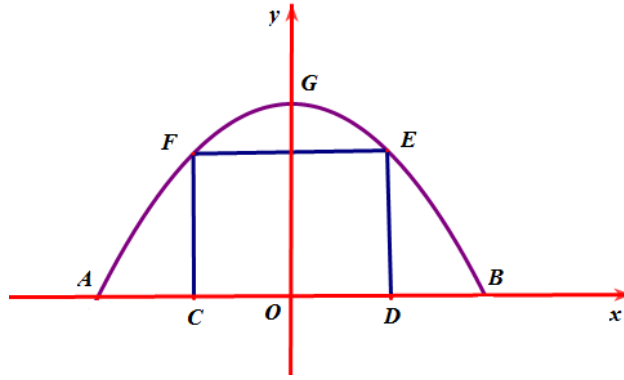
Lập bảng biến thiên của hàm số bậc hai $f(x) = -x^2 + 8x$ trên khoảng $(0; 8)$ ta được

$$\max_{(0;8)} f(x) = f(4) = 16$$

Vậy hình chữ nhật có diện tích lớn nhất bằng 16 khi chiều dài bằng chiều rộng bằng

4.

Câu 148. Chọn D



Gắn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ, chiếc cổng là 1 phần của parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ với $a < 0$.

Do parabol (P) đối xứng qua trục tung nên có trục đối xứng $x = 0 \Rightarrow -\frac{b}{2a} = 0 \Leftrightarrow b = 0$.

Chiều cao của cổng parabol là 4m nên $G(0; 4) \Rightarrow c = 4$.

$$\Rightarrow (P): y = ax^2 + 4$$

Lại có, kích thước cửa ở giữa là 3m x 4m nên $E(2; 3), F(-2; 3) \Rightarrow 3 = 4a + 4 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{4}$.

$$\text{Vậy } (P): y = -\frac{1}{4}x^2 + 4$$

$$\text{Ta có } -\frac{1}{4}x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -4 \end{cases} \text{ nên } A(-4; 0), B(4; 0) \text{ hay } AB = 8(\text{m}).$$

Câu 149. Chọn C

$$(P): y = -\frac{1}{2}x^2, \text{ có } d = 8. \text{ Suy ra } \frac{d}{2} = 4.$$

$$\text{Thay } x = 4 \text{ vào } y = -\frac{1}{2}x^2. \text{ Suy ra } y = -8. \text{ Suy ra } h = 8(\text{cm}).$$

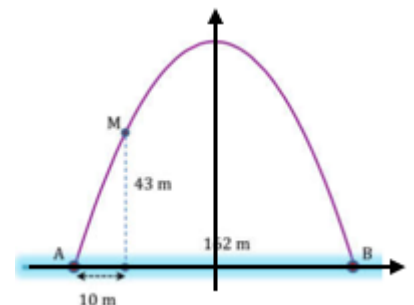
Câu 150. Chọn D

Gắn hệ tọa độ Oxy sao cho gốc tọa độ trùng với trung điểm của AB , tia AB là chiều dương của trục hoành (hình vẽ).

Parabol có phương trình $y = ax^2 + c$, đi qua các điểm:

$$B(81; 0) \text{ và } M(-71; 43) \text{ nên ta có hệ}$$

$$\begin{cases} 81^2 a + c = 0 \\ 71^2 a + c = 43 \end{cases} \Rightarrow c = \frac{81^2 \cdot 43}{81^2 - 71^2} \approx 185.6$$



Suy ra chiều cao của cống là $c \approx 185,6$ m.

Câu 151. Chọn E

Theo giả thiết ta có:

Từ khi bắt đầu rót chất B thì đã có chất A trong ống nghiệm, nên nồng độ chất A ban đầu lớn hơn chất B . Tức là ban đầu, đồ thị nồng độ chất A nằm “phía trên” đồ thị nồng độ chất B (1).

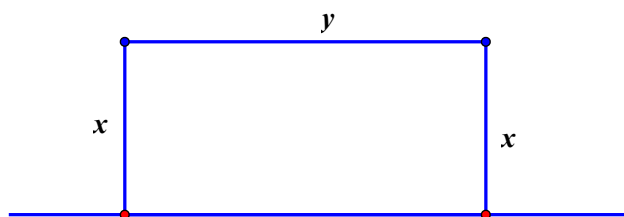
Khi chất B đạt đến một giá trị nhất định thì hai chất mới phản ứng với nhau. Điều này chứng tỏ có một khoảng thời gian từ khi rót chất B đến khi bắt đầu phản ứng xảy ra thì nồng độ chất A là một hằng số. Tức trong khoảng thời gian đó đồ thị nồng độ chất A là đồ thị của một hàm số hằng (2).

Khi phản ứng xảy ra, nồng độ hai chất đều giảm đến khi chất B được tiêu thụ hoàn toàn. Điều này chứng tỏ sau khi kết thúc phản ứng thì chất B được tiêu thụ hết và chất A có thể còn dư (hoặc cũng có thể hết), kể từ khi ngừng phản ứng thì nồng độ chất A trong ống nghiệm không thay đổi nữa, nên đồ thị nồng độ chất A sau phản ứng phải là đồ thị của một hàm số hằng (3).

Từ sự phân tích trên ta thấy chỉ có đồ thị của đáp án

B. phù hợp.

Câu 152. Chọn B



Gọi hai cạnh của hình chữ nhật có độ dài là x, y (như hình vẽ); $0 < x, y < 60$.

Ta có $2x + y = 60 \Rightarrow y = 60 - 2x$.

Diện tích hình chữ nhật là
$$S = xy = x(60 - 2x) = \frac{1}{2} \cdot 2x(60 - 2x) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2x + 60 - 2x}{x} \right) = 450$$

Vậy diện tích hình chữ nhật lớn nhất là $450(m^2)$, đạt được khi $x = 15, y = 30$.