CHỦ ĐỀ 5. HÌNH CHỮ NHẬT.

TÍNH CHẤT CỦA CÁC ĐIỂM CÁCH ĐỀU  
 MỘT ĐƯỜNG THẲNG CHO TRƯỚC.

A. LÝ THUYẾT.

**1. Định nghĩa**

Hình chữ nhật là tứ giác có bốn góc vuông (h.5.1)

Description: 5 Description: 5

*Hình 5.1 Hình 5.2*

**2. Tính chất**

Trong hình chữ nhật, hai đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường (h.5.2).

**3. *Dấu hiệu nhận biết***

• Tứ giác có ba góc vuông là hình chữ nhật;

• Hình thang cân có một góc vuông là hình chữ nhật;

• Hình bình hành có một góc vuông là hình chữ nhật;

Description: 5• Hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau là hình chữ nhật.

**4. *Áp dụng vào tam giác*** (h.5.3)

ΔABC: MB = MC

*Hình 5.3*



Description: 5**5. *Tính chất các điểm cách đều một đường thẳng cho trước*** (h.5.4)

Tập hợp các điểm cách một đường thẳng cố định một khoảng bằng h không đổi là hai đường thẳng song song với đường thẳng đó và cách đường thẳng đó một khoảng bằng h.

*Hình 5.4*

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG.

I. MỘT SỐ VÍ DỤ

***Ví dụ 1.*** Cho hình chữ nhật ABCD. Trên đường chéo BD lấy một điểm M. Trên tia AM lấy điểm N sao cho M là trung điểm của AN. Gọi E và F lần lượt là hình chiếu của N trên đường thẳng BC và CD. Chứng minh rằng ba điểm M, E, F thẳng hàng.

*Giải*

\* *Tìm cách giải*

Description: 5Xét ΔCAN, đường thẳng EF đi qua trung điểm của CN, muốn cho EF đi qua trung điểm M của AN ta cần chứng minh EF // AC.

\* *Trình bày lời giải*

Tứ giác ENFC có ba góc vuông nên là hình chữ nhật.

Gọi O là giao điểm của AC và BD và K là giao điểm của EF và CN.

Theo tính chất hình chữ nhật ta có:

OA = OB = OC = OD; KC = KN = KE = FF.

Xét ΔCAN có OM là đường trung bình nên OM // CN, đo đó BD // CN.

ΔOCD, ΔKCF cân, suy ra  

Mặt khác,  (cặp góc đồng vị) nên 

Suy ra AC // EF.

Xét ΔCAN có đường thẳng EF đi qua trung điểm K của CN và EF // AC nên EF đi qua trung điểm của AN, tức là đi qua M. Vậy ba điểm M, E, F thẳng hàng.

***Ví dụ 2.*** Cho tam giác ABC cân tại A. Từ một điểm trên đáy BC, vẽ đường thẳng vuông góc với BC cắt các đường thẳng AC, AB lần lượt tại M và N. Gọi H và K lần lượt là trung điểm của BC và MN. Chứng minh rằng tứ giác AKDH là hình chữ nhật.

*Giải*

\* *Tìm cách giải*

Dễ thấy tứ giác AKDH có hai góc vuông là  nên chỉ cần chứng minh tứ giác này có một góc vuông nữa là thành hình chữ nhật.

\* *Trình bày lời giải*

Description: 5ΔABC cân tại A, AH là đường trung tuyến nên cũng là đường cao, đường phân giác.

Do đó  và 

Ta có AH // DN (vì cùng vuông góc với BC)

 (cặp góc đồng vị);  (cặp góc so le trong).

Do đó  (vì 

Vậy ΔAMN cân tại A mà AK là đường trung tuyến nên AK cũng là đường cao, 

Tứ giác AKDH có  nên nó là hình chữ nhật.

***Ví dụ 3.*** Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Trên cạnh huyền BC lấy điểm D. Vẽ DH ⊥ AB, DK ⊥ AC. Biết AB = a, tính giá trị lớn nhất của tích DH . DK.

*Giải*

\* *Tìm cách giải*

Ta thấy DH + DK = AB (không đổi). Dựa vào các hằng đẳng thức ta có thể tìm được mối quan hệ giữa tích DH . DK với tổng DH + DK. Mối quan hệ này được biểu diễn như sau:

Ta có (x – y)2 ≥ 0 ⇔ x2 + y2 ≥ 2xy ⇔ x2 + y2 + 2xy ≥ 4xy ⇔ (x + y)2 ≥ 4xy



\* *Trình bày lời giải*

Tứ giác AHDK có ba góc vuông nên là hình chữ nhật.

Description: 5Tam giác HBD có   nên là tam giác vuông cân. Ta đặt DH = x, DK = y thì HB = x, AH = y và x + y = a.

Ta có  (không đổi).

Dấu "=" xảy ra ⇔ x = y ⇔ D là trung điểm của BC.

Vậy giá trị lớn nhất của tích DH . DK là  khi D là trung điểm của BC.

***Ví dụ 4.*** Cho hình thang ABCD,  Trên cạnh AD có một điểm H mà AH < DH và  Chứng minh rằng trên cạnh AD còn một điểm K sao cho 

*Giải*

\* *Tìm cách giải*

Giả sử đã chứng minh được  thì ΔBHC và Δ BKC là hai tam giác vuông chung cạnh huyền BC nên hai đường trung tuyến ứng với BC phải bằng nhau. Do đó cần chứng minh hai đường trung tuyến này bằng nhau.

\* *Trình bày lời giải*

Description: 5Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Khi đó MN là đường trung bình của hình thang ABCD, suy ra MN // AB

⇒ MN ⊥ AD (vì AB ⊥ AD).

Trên cạnh AD lấy điểm K sao cho DK = AH ⇒ MK = MH.

ΔNHK có NM vừa là đường cao, vừa là đường trung tuyến nên là tam giác cân ⇒ KN = HN.

Xét ΔHBC vuông tại H có  (tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền).

Suy ra  (vì KN = HN).

Do đó ΔKBC vuông tại K 

***Ví dụ 5.*** Cho đường thẳng xy. Một điểm A cố định nằm ngoài xy và một điểm B di động trên xy. Gọi O là trung điểm của AB. Hỏi điểm O di động trên đường nào?

Description: 5*Giải*

Vẽ AH ⊥ xy, OK ⊥ xy.

Ta có AH là một đoạn thẳng cố định.

Xét ΔABH có OK // AH và OA = OB nên KH = KB.

Vậy OK là đường trung bình suy ra  (không đổi).

Điểm O cách đường thẳng xy cho trước một khoảng không đổi là  nên điểm O di động trên đường thẳng a // xy và cách xy là  (đường thẳng a và điểm A cùng nằm trên một nửa mặt phẳng bờ xy).

**II. LUYỆN TẬP.**

**• Tính chất và dấu hiệu nhận biết của hình chữ nhật**

* 1. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, đường cao AD. Gọi M là một điểm bất kì trên cạnh BC. Vẽ ME ⊥ AB, MF ⊥ AC. Tính số đo các góc của tam giác DEF.
  2. Cho hình bình hành ABCD. Biết  và  Chứng minh rằng hình bình hành ABCD là hình chữ nhật.
  3. Cho hình chữ nhật ABCD, AB = 8, BC = 6. Điểm M nằm trong hình chữ nhật. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng S = MA2 + MB2 + MC2 + MD2.
  4. Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi O là một điểm bất kì ở trong tam giác. Vẽ OD ⊥ AB, OE ⊥ BC và OF ⊥ CA. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng: S = OD2 + OE2 + OF2.
  5. Cho hình chữ nhật ABCD, đường chéo AC = d. Trên các cạnh AB, BC, CD và DA lần lượt lấy các điểm M, N, P, Q. Tính giá trị nhỏ nhất của tổng: S = MN2 + NP2 + PQ2 + QM2.
  6. Cho tam giác đều ABC cạnh a. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm D và E sao cho AD = CE. Tìm giá trị nhỏ nhất của độ dài DE.

**• Tính chất đường trung tuyến của tam giác vuông**

* 1. Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên cạnh huyền BC lấy một điểm M. Vẽ MD ⊥ AB, ME ⊥ AC và AH ⊥ BC. Tính số đo của góc DHE.
  2. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, đường trung tuyến AD. Vẽ HE ⊥ AB, HF ⊥ AC. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của HB và HC.

1. Chứng minh rằng EM // FN // AD;
2. Tam giác ABC phải có thêm điều kiện gì thì ba đường thẳng EM, FN, AD là ba đường thẳng song song cách đều.
   1. Cho tam giác ABC vuông tại A (AB < AC), đường cao AH. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho AD = AB. Gọi M là trung điểm của BD. Chứng minh rằng tia HM là tia phân giác của góc AHC.
   2. Cho hình chữ nhật ABCD, AB = 15, BC = 8. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt lấy các điểm E, F, G, H. Tính giá trị nhỏ nhất của chu vi tứ giác EFGH.

**• Đường thẳng song song với một đường thẳng cho trước**

* 1. Cho góc xOy có số đo bằng 30o. Điểm A cố định trên tia Ox sao cho OA = 2cm. Lấy điểm B bất kì trên tia Oy. Trên tia đối của tia BA lấy điểm C sao cho BC = 2BA. Hỏi khi điểm B di động trên tia Oy thì điểm C di động trên đường nào?
  2. Cho góc xOy có số đo bằng 45o. Điểm A cố định trên tia Ox sao cho cm. Lấy điểm B bất kì trên tia Oy. Gọi G là trọng tâm của tam giác OAB. Hỏi khi điểm B di động trên tia Oy thì điểm G di động trên đường nào?
  3. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên các cạnh AB và AC lần lượt lấy các điểm M và N sao cho AM = CN. Gọi O là trung điểm của MN. Hỏi điểm O di động trên đường nào?
  4. Bên trong hình chữ nhật kích thước 3 × 6 cho 10 điểm. Chứng minh rằng tồn tại hai điểm trong số 10 điểm đó có khoảng cách nhỏ hơn 2,3.
  5. Bên trong hình chữ nhật kích thước 3 × 6 cho 8 điểm. Chứng minh rằng tồn tại hai trong số 8 điểm đó có khoảng cách nhỏ hơn 2,3.