

ĐỀ SỐ 19: ĐỀ TỰ LUYỆN BỒI DƯỠNG HSG CẤP HUYỆN LỚP 8
NĂM HỌC: 2023-2024

Thời gian làm bài 120 phút

I. Phần trắc nghiệm (8,0 điểm) Chọn một phương án đúng

Câu 1. Sau khi rút gọn biểu thức $Q = \left(\frac{2x+1}{1-2x} - \frac{1-2x}{1+2x} - \frac{16x^2}{4x^2-1} \right) : \frac{16x^3-4x}{4x^2-4x+1}$ với $x \neq \pm \frac{1}{2}$ là:

- A. $P = \frac{-2}{2x+1}$ B. $P = \frac{2}{2x+1}$ C. $P = \frac{-2}{2x-1}$ D. $P = \frac{2}{2x-1}$

Câu 2. Cho tổng $P_n = 1 - 2 - 3 + 4 - 5 - 6 + \dots$. Tổng gồm n số hạng $n \in N^*$. Tính P_{2014} được:

- A. $P_{2014} = -675125$ B. $P_{2014} = -675225$ C. $P_{2014} = -665025$ D. $P_{2014} = -675025$

Câu 3. Rút gọn biểu thức $A = \frac{1}{2.5} + \frac{1}{5.8} + \frac{1}{8.11} + \dots + \frac{1}{(3n+2)(3n+5)}$ là:

- A. $\frac{n-1}{6n+10}$ B. $\frac{2n+1}{6n+10}$ C. $\frac{2n-1}{6n+10}$ D. $\frac{n+1}{6n+10}$

Câu 4. Xác định đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) đi qua điểm $M(1;3)$ và song song với đường thẳng $y = 2x - 2$.

- A. $y = 2x$ B. $y = 2x + 1$ C. $y = -2x - 3$ D. $y = 2x - 2$

Câu 5. Các nhà khoa học đưa ra công thức dự báo nhiệt độ trung bình trên bề mặt Trái Đất như sau: $T = 0,02t + 15$. Trong đó T là nhiệt độ trung bình của bề mặt Trái Đất tính theo độ C, t là số năm kể từ năm 1950. Nhiệt độ trung bình của bề mặt Trái Đất vào năm 1950 và năm 2022 lần lượt là:

- A. $13^{\circ}\text{C}; 16^{\circ}\text{C}$ B. $12^{\circ}\text{C}; 17^{\circ}\text{C}$ C. $11^{\circ}\text{C}; 16,44^{\circ}\text{C}$ D. $15^{\circ}\text{C}; 16,44^{\circ}\text{C}$

Câu 6. Đa thức $P(x)$ bậc 4 có hệ số bậc cao nhất là 1. Biết $P(1)=0$; $P(3)=0$; $P(5)=0$.

Giá trị của biểu thức: $Q = P(-2) + 7P(6)$ là:

- A. 850 B. 840 C. 830 D. Một số khác

Câu 7. Đa thức $f(x)$ biết rằng $f(x)$ chia cho $x-3$ thì dư 2; $f(x)$ chia cho $x+4$ thì dư 9, còn $f(x)$ chia cho $x^2 + x - 12$ thì được thương là $x^2 + 3$ và còn dư là:

- A. $x^4 - x^3 - 9x^2 + 2x - 31$ C. $x^4 + x^3 - 9x^2 + 2x - 31$
B. $x^4 + x^3 - 9x^2 - 2x - 31$ D. $x^4 + x^3 - 9x^2 + 2x + 31$

Câu 8. Dư của phép chia đa thức $x^{99} + x^{55} + x^{11} + x + 7$ cho $x^2 - 1$ là:

- A. $4x - 7$ B. $2x + 7$ C. $2x - 7$ D. $4x + 7$

Câu 9. Cho tam giác ABC vuông tại A, AD là phân giác góc BAC (D thuộc cạnh BC), cho biết $AB=3$ cm;

$AD = \frac{12\sqrt{2}}{7}$ cm. Độ dài đoạn thẳng BD là:

- A. $\frac{12}{7}$ B. $\frac{15}{7}$ C. $\frac{17}{7}$ D. $\frac{19}{7}$

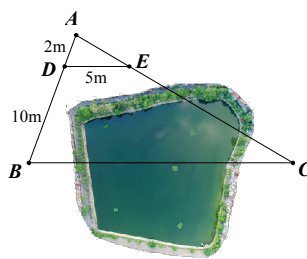
Câu 10. Cho hình thang cân có hai đường chéo vuông góc với nhau, đáy nhỏ dài 7 cm, đáy lớn dài 25 cm. Độ dài cạnh bên:

- A. 6 B. 5 C. 4 D. 3

Câu 11. Cho tam giác ABC có góc $B=45^{\circ}$, góc $A=15^{\circ}$. Kéo dài BC về phía C một đoạn sao cho $CD=2BC$. Số đo góc ADB là:

- A. 45° B. 60° C. 75° D. 90°

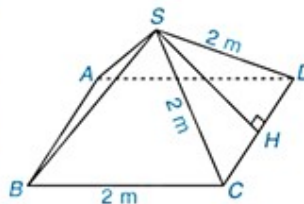
Câu 12: Giữa hai điểm B và C có một cái ao (như hình vẽ). Để đo khoảng cách BC người ta đo được các đoạn thẳng $AD = 2$ m, $BD = 10$ m và $DE = 5$ m. Biết $DE \parallel BC$.



Khi đó, khoảng cách giữa hai điểm B và C là:

- A. 30 m B. $4,8\text{ m}$. C. 25 m D. 10 m

Câu 13: Một mái che giếng trời của một ngôi nhà có dạng hình chóp tứ giác đều, bốn mặt bên làm bằng kính (hình bên dưới). Diện tích kính làm bốn mặt bên của mái che là bao nhiêu? Biết các mặt bên là các tam giác đều cạnh là 2 m , chiều cao của mặt bên xuất phát từ đỉnh của tam giác là $1,73\text{ m}$ và viền không đáng kể.



- A. $10,38\text{ m}^2$; B. $13,84\text{ m}^2$; C. $3,46\text{ m}^2$; D. $6,92\text{ m}^2$

Câu 14: Cho tam giác ABC , điểm M thuộc cạnh BC sao cho $\frac{MB}{MC} = \frac{1}{2}$. Đường thẳng đi qua M và song song với AC cắt AB ở D . Đường thẳng đi qua M và song song với AB cắt AC ở E . Biết chu vi tam giác ABC bằng 30 cm . Chu vi của các tam giác DBM và EMC lần lượt là

- A. $10\text{ cm}; 20\text{ cm}$. B. $12\text{ cm}; 16\text{ cm}$. C. $20\text{ cm}; 10\text{ cm}$. D. $10\text{ cm}; 15\text{ cm}$.

Câu 15. Tứ giác $MNPQ$ có $\widehat{M}=100^\circ; \widehat{N}=90^\circ; \widehat{Q}=70^\circ$ khi đó ta có:

- A. $\widehat{P}=120^\circ$. B. $\widehat{P}=100^\circ$. C. $\widehat{P}=80^\circ$ D. $\widehat{P}=60^\circ$.

Câu 16. Một khối Rubic có dạng hình chóp tam giác đều. Biết chiều cao khoảng $5,88\text{ cm}$, thể tích của khối Rubic là $44,002\text{ cm}^3$. Tính diện tích đáy của khối Rubic là.

- A. $24,25(\text{cm}^2)$ B. $25,25(\text{cm}^2)$ C. $22,54(\text{cm}^2)$ D. $22,45(\text{cm}^2)$

II. Phần tự luận (12,0 điểm)

Câu 1(3,5 điểm):

a) Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn: $x^2 + xy - 2020x - 2021y - 2022 = 0$

b) Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}; n > 0$ thì :

$$A = n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1 \text{ không phải là số chính phương.}$$

Câu 2 (3,0 điểm):

a. Giải các phương trình sau: $(x^2 + x + 4)^2 + 8x(x^2 + x + 4) + 16x^2 = 0$

b. Xác định đa thức $f(x)$ biết $f(x)$ chia cho $x-1$ dư 4 và chia cho x^2+x-2 được thương là $5x^2$.

Câu 3 (4,5 điểm): Cho hình chữ nhật $ABCD$, điểm P thuộc đường chéo BD (P khác B và D), Gọi M là điểm đối xứng của C qua P

a) Chứng minh AM song song với BD

b) Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của M trên AD và AB . Chứng minh ba điểm E, F, P thẳng hàng

c) Chứng minh tỉ số độ dài hai đoạn thẳng MF và FA không phụ thuộc vào vị trí của P .

Câu 4 (1,0 điểm): Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{x^2 - 2x + 2012}{x^2}$ với $x \neq 0$

---Hết---

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM

I. Phần trắc nghiệm (8,0 điểm) Mỗi câu đúng 0,5 điểm

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án	A	D	D	B	D	B	C	D	B	B
Câu	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Đáp án	C	A	D	A	B	D				

HƯỚNG DẪN

Câu 1. Cho biểu thức $A = \left(\frac{2x+1}{1-2x} - \frac{1-2x}{1+2x} - \frac{16x^2}{4x^2-1} \right) : \frac{16x^3-4x}{4x^2-4x+1}$.

Điều kiện: $x \neq \pm \frac{1}{2}$.

$$A = \left(\frac{2x+1}{1-2x} - \frac{1-2x}{1+2x} - \frac{16x^2}{4x^2-1} \right) : \frac{16x^3-4x}{4x^2-4x+1}$$

$$= \left(\frac{2x+1}{1-2x} - \frac{1-2x}{1+2x} + \frac{16x^2}{(1-2x)(1+2x)} \right) : \frac{4x(4x^2-1)}{(2x-1)^2}$$

$$A = \left(\frac{(2x+1)^2 - (1-2x)^2 + 16x^2}{(1-2x)(1+2x)} \right) : \frac{4x(2x-1)(2x+1)}{(2x-1)^2} = \frac{16x^2+8x}{(1-2x)(1+2x)} : \frac{4x(2x+1)}{2x-1}$$

$$= \frac{8x}{1-2x} \cdot \frac{2x-1}{4x(2x-1)} = \frac{-2}{2x+1}$$

Câu 2. Cho tổng $P_n = 1 - 2 - 3 + 4 - 5 - 6 + \dots$. Tổng gồm n số hạng $n \in \mathbb{N}^*$. Tính P_{2014} .

$$P_n = 1 - 2 - 3 + 4 - 5 - 6 + \dots$$

$$P_{2014} = (1-2-3) + (4-5-6) + \dots + (2011-2012-2013) + 2014$$

$$P_{2014} = -(4+7+\dots+2011)$$

$$P_{2014} = \frac{-(4+2011)670}{2} = -675025$$

Câu 3. Rút gọn biểu thức : $A = \frac{1}{2.5} + \frac{1}{5.8} + \frac{1}{8.11} + \dots + \frac{1}{(3n+2)(3n+5)}$

$$A = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{3n+2} - \frac{1}{3n+5} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n+5} \right) = \frac{n+1}{6n+10}$$

Câu 4. Giải phương trình $|x+1| = |x(x+1)|$

$$|x+1| = |x(x+1)| \Leftrightarrow |x(x+1)| - |x+1| = 0 \Leftrightarrow |x| \cdot |x+1| - |x+1| = 0 \Leftrightarrow |x+1|(|x|-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x+1| = 0 \\ |x|-1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x+1| = 0 \\ |x| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Câu 5. Tập nghiệm của bất phương trình là $\frac{x-241}{17} + \frac{x-220}{19} + \frac{x-195}{21} + \frac{x-166}{23} > 10$

$$\frac{x-241}{17} + \frac{x-220}{19} + \frac{x-195}{21} + \frac{x-166}{23} > 10$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-241}{17} - 1 + \frac{x-220}{19} - 2 + \frac{x-195}{21} - 3 + \frac{x-166}{23} - 4 > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-258}{17} + \frac{x-258}{19} + \frac{x-258}{21} + \frac{x-258}{23} > 0$$

$$\Leftrightarrow (x-258) \left(\frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} + \frac{1}{23} \right) > 0$$

$$\Leftrightarrow x > 258$$

Câu 6. Đa thức P(x) bậc 4 có hệ số bậc cao nhất là 1. Biết P(1)=0 ; P(3)=0 ; P(5)=0.

Hãy tính giá trị của biểu thức: Q= P(-2)+7P(6)

Ta có: P(x): (x-1), (x-3), (x-5)

Nên P(x) có dạng: P(x) = (x-1)(x-3)(x-5) (x+a)

Khi đó: P(-2) + 7P(6) = (-3).(-5).(-7).(-2+a) + 7.5.3.1.(6+a)

$$= -105.(-2+a) + 105.(6+a)$$

$$= 105.(2-a+6+a) = 840$$

Câu 7. Tìm đa thức f(x) biết rằng f(x) chia cho x-3 thì dư 2; f(x) chia cho x + 4 thì dư 9, còn f(x) chia cho $x^2 + x - 12$ thì được thương là $x^2 + 3$ và còn dư

Gọi thương của phép chia đa thức f(x) cho x - 3, cho x + 4 lần lượt là p(x); q(x) ta có:

$$\text{Do đó ta có } 3a + b = 2$$

$$\text{Và } -4a + b = 9$$

$$\text{Giải ra ta được } a = -1; b = 5$$

$$\text{Vậy } f(x) = (x-3)(x+4)(x^2+3) - x + 5$$

$$= x^4 + x^3 - 9x^2 + 2x - 31$$

Câu 8. Tìm dư của phép chia đa thức $x^{99} + x^{55} + x^{11} + x + 7$ cho $x^2 - 1$

Gọi Q(x) là thương của phép chia $x^{99} + x^{55} + x^{11} + x + 7$ cho $x^2 - 1$ ta có:

$$x^{99} + x^{55} + x^{11} + x + 7 = (x-1)(x+1)Q(x) + ax + b (*)$$

$$\text{Với } x = 1 \text{ thì } (*) \Rightarrow 11 = a + b$$

$$\text{Với } x = -1 \text{ thì } (*) \Rightarrow 3 = -a + b$$

$$\text{Giải ra ta được } a = 4; b = 7$$

Vậy dư của phép chia $x^{99} + x^{55} + x^{11} + x + 7$ cho x^2-1

$$\text{là } 4x + 7$$

Câu 9. Cho tam giác ABC vuông tại A, AD là phân giác góc BAC (D thuộc cạnh BC), cho biết AB=3 cm;

$$AD = \frac{12\sqrt{2}}{7} \text{ cm. Độ dài đoạn thẳng BD}$$

Trình bày vắn tắt:

Cách tính: Vẽ $DE \perp AB \Rightarrow \widehat{AEB} = \widehat{BED} = 90^\circ$,

$$\widehat{EAD} = \frac{1}{2} \widehat{BAC} = 45^\circ \Rightarrow \Delta AED \text{ vuông cân tại E} \Rightarrow EA = ED$$

ΔAED vuông tại E

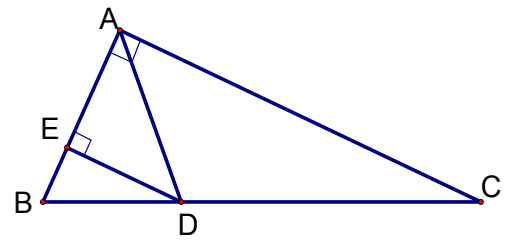
$$\Rightarrow 2ED^2 = AD^2 = \left(\frac{12\sqrt{2}}{7}\right)^2 \Rightarrow ED = EA = \frac{12}{7}$$

$$BE = AB - EA = \frac{9}{7}$$

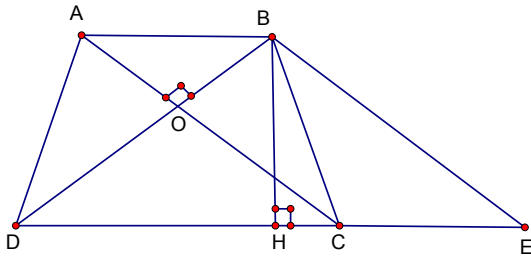
ΔBED vuông tại E

$$\Rightarrow BD^2 = BE^2 + ED^2 \Rightarrow BD^2 = \left(\frac{15}{7}\right)^2 \Rightarrow BD = \frac{15}{7}$$

BD \approx 2,14286 cm



Câu 10. Cho hình thang cân có hai đường chéo vuông góc với nhau, đáy nhỏ dài 7 cm, đáy lớn dài 25 cm. Tính độ dài cạnh bên chính xác tới 3 chữ số thập phân.



Trên tia đối của tia CD lấy E sao cho CE=AB

$\Rightarrow ABEC$ là hình bình hành $\Rightarrow BE \perp BD \Rightarrow BED$ vuông cân tại B

$$BH = HD = \frac{1}{2} DE = 16 \text{ cm}; HC = DC - DH = 9 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{BH^2 + HC^2} = 5 \text{ cm}$$

Câu 11. Cho tam giác ABC có góc B=45°, góc A=15°. Kéo dài BC về phía C một đoạn sao cho CD=2BC. Số đo góc ADB là: 75° (Bồi dưỡng HSG toán Hình học 8 Trang 127)

Câu 12. Cho $\Delta A'B'C'$ đồng dạng với ΔABC theo tỉ số đồng dạng 3/14; $\Delta A''B''C''$ đồng dạng với ΔABC theo tỉ số đồng dạng 5/7. Tam giác $A'B'C'$ đồng dạng với tam giác $A''B''C''$ theo tỉ số nào?

Giải:

$\Delta A'B'C'$ đồng dạng với ΔABC theo tỉ số đồng dạng 3/14, ta có: $\frac{A'B'}{AB} = \frac{3}{14}$

$\Delta A''B''C''$ đồng dạng với ΔABC theo tỉ số đồng dạng 5/7, ta có: $\frac{A''B''}{AB} = \frac{5}{7}$

Suy ra $\frac{A'B'}{AB} : \frac{A''B''}{AB} = \frac{A'B'}{A''B''} = \frac{3}{14} : \frac{5}{7} = \frac{3}{10}$. Vậy, tam giác $A'B'C'$ đồng dạng với tam giác $A''B''C''$ theo

tỉ số đồng dạng k = 3/10

Câu 13. Cho ΔABC có AB=8cm, AC=16cm,. Gọi D và E là hai điểm lần lượt trên các cạnh AB, AC sao cho BD=2cm, CE=13cm. Chứng minh :

a) ΔAEB đồng dạng với ΔADC .

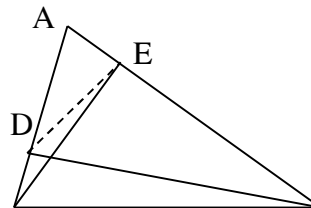
b) Góc AED bằng góc ABC

c) AE.AC=AD.AB

Giải:

a) Xét tam giác AEB và tam giác ADC có

$$\frac{AB}{AC} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}; \frac{AE}{AD} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD}$$



Mặt khác lại có góc A chung

B

C

\Rightarrow tam giác AEB và tam giác ADC đồng dạng với nhau.

b) Chứng minh tương tự câu a) ta có ΔAED đồng dạng với tam giác ABC

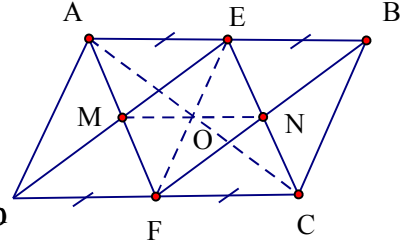
$\Rightarrow \widehat{AED} = \widehat{ABC}$ (hai góc tương ứng)

c) Theo câu b) ta có ΔAED đồng dạng với tam giác ABC $\Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AE.AC = AB.AD$

Câu 14. Cho hình bình hành ABCD. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AB, CD. Gọi M là giao điểm của AF và DE, N là giao điểm của BF và CE. Chứng minh rằng :

a) Tứ giác EMFN là hình bình hành

b) Các đường thẳng AC, EF và MN đồng qui



a) Tứ giác AECF có $AE \parallel CF$, $AE = CF$ nên AECF là hình bình hành

$\Rightarrow AF \parallel CE$

Tương tự : $BF \parallel DE$

Tứ giác EMFN có $EM \parallel FN$, $EN \parallel FM$ nên EMFN là hình bình hành

b) Gọi O là giao điểm của AC và EF. Ta sẽ chứng minh MN cũng đi qua O

AECF là hình bình hành, O là trung điểm của AC nên O là trung điểm của EF

EMFN là hình bình hành nên đường chéo MN đi qua trung điểm O của EF

Vậy AC, EF, MN đồng qui tại O

Câu 15. Tứ giác MNPQ có $\widehat{M}=100^\circ$; $\widehat{N}=90^\circ$; $\widehat{Q}=70^\circ$ khi đó ta có:

A. $\widehat{P}=120^\circ$.

B. $\widehat{P}=100^\circ$.

C. $\widehat{P}=80^\circ$

D. $\widehat{P}=60^\circ$.

Câu 16. Thăng đồ Long biết được số học sinh của trường Thăng cuối năm học vừa rồi có bao nhiêu học sinh được nhận thưởng ? Biết rằng số học sinh được nhận thưởng là số có ba chữ số và rất thú vị là chữ số hàng trăm, chữ số hàng đơn vị giống nhau. Nếu nhân số này với 6 thì được tích là số cũng có ba chữ số và trong tích đó có một chữ số 2.

Bài giải : Gọi số phi tìm là aba (a khác b ; a ; b nhỏ hơn hoặc bằng 9). Theo đầu bài ta có:

$aba \times 6 = \text{deg}$ (d khác 0 ; d ; e ; g nhỏ hơn hoặc bằng 9).

Nếu a lớn hơn hoặc bằng 2 thì tích nhiều hơn 3 chữ số. Vậy $a = 1$. Ta có $1b1 \times 6 = \text{deg}$ (deg có một chữ số 2).

Do đó : $g = 1 \times 6 = 6$ và d lớn hơn hoặc bằng 6. Vì thế : $e = 2$

Vì $b \times 6 = \text{deg}$ nên $b = 2$ hoặc $b = 7$.

Nếu $b = 2$ thì $121 \times 6 = 726$ (Đúng)

Nếu $b = 7$ thì $171 \times 6 = 1026$ (Loại)

Vậy số học sinh nhận thưởng là 121 bạn.

II. Phần tự luận (12,0 điểm)

Câu 1(3,5 điểm): a) Tìm các cặp số nguyên (x, y) thoả mãn: $x^2 + xy - 2020x - 2021y - 2022 = 0$

Lời giải

Ta có $x^2 + xy - 2020x - 2021y - 2022 = 0 \Leftrightarrow x^2 + xy + x - 2021x - 2021y - 2021 = 1$

$\Leftrightarrow x(x + y + 1) - 2021(x + y + 1) = 1 \Leftrightarrow (x - 2021)(x + y + 1) = 1$

Vì $x; y \in \mathbb{Z}$ nên $(x - 2021); (x + y + 1) \in \mathbb{Z}$ ta xét các trường hợp sau:

$$\text{TH1: } \begin{cases} x - 2021 = -1 \\ x + y + 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2020 \\ y = -2022 \end{cases}$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} x - 2021 = 1 \\ x + y + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2022 \\ y = -2022 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (2020; -2022); (2022; -2022)$.

b) Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}; n > 0$ thì :

$A = n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1$ không phải là số chính phương.

CMR với mọi $n \in \mathbb{N}; n > 0$ thì : $A = n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1$ không là số chính phương

Ta có : $A = n^2(n^2 + 2n + 1) + (n^2 + 2n + 1) = (n^2 + 1).(n + 1)^2$

Vì $n^2 + 1$ không phải là số chính phương nên A không phải là số chính phương.

Câu 2 (3,0 điểm): a. Giải các phương trình sau: $(x^2 + x + 4)^2 + 8x(x^2 + x + 4) + 16x^2 = 0$

Giải các phương trình

$$(x^2 + x + 4)^2 + 8x(x^2 + x + 4) + 16x^2 = 0$$

Đặt $x^2 + x + 4 = t$ ta có

$$(x^2 + x + 4)^2 + 8x(x^2 + x + 4) + 16x^2 = 0 \Rightarrow t^2 + 8xt + 16x^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (t + 4x)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + x + 4 + 4x)^2 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 5x + 4)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow [(x+1)(x+4)]^2 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2(x+4)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1; x = -4$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \{-1; -4\}$

b. Xác định đa thức $f(x)$ biết $f(x)$ chia cho $x-1$ dư 4 và chia cho x^2+x-2 được thương là $5x^2$.

Lời giải

Gọi $A(x), B(x)$ là các đa thức sao cho

$$f(x) = (x-1)A(x) + 4$$

$$f(x) = (x+2)B(x) + 1$$

$$\text{Khi đó, } \begin{cases} (x+2)f(x) = (x+2)(x-1)A(x) + 4(x+2) \\ (x-1)f(x) = (x-1)(x+2)B(x) + 1(x-1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x+2)f(x) = (x+2)(x-1)[A(x) - B(x)] + 3x + 9$$

$$\Leftrightarrow 3f(x) = (x+2)(x-1)[A(x) - B(x)] + 3x + 9 \Leftrightarrow f(x) = (x-1)(x+2) \frac{A(x) - B(x)}{3} + (x+3) \quad (*)$$

Theo bài ra khi chia $f(x)$ cho $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$ ta được thương là $5x^2$ nên

$$\frac{A(x) - B(x)}{3} = 5x$$

Khi đó (*) trở thành: $f(x) = (x-1)(x+2).5x^2 + x + 3$

Vậy $f(x) = 5x^2(x-1)(x+2) + x + 3$

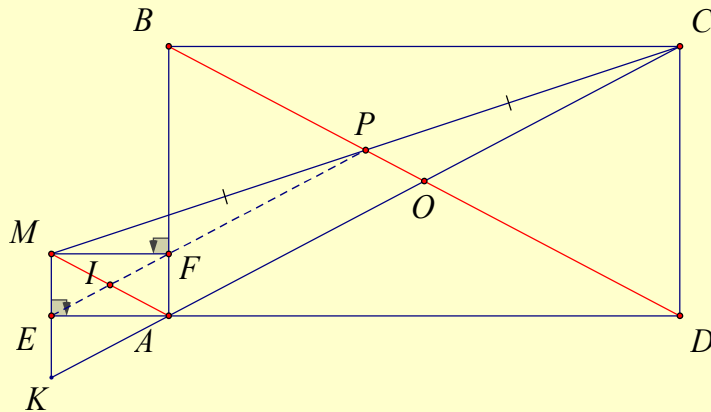
Câu 3 (4,5 điểm):

Cho hình chữ nhật $ABCD$, điểm P thuộc đường chéo BD (P khác B và D), Gọi M là điểm đối xứng của C qua P

a) Chứng minh AM song song với BD

b) Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của M trên AD và AB . Chứng minh ba điểm E, F, P thẳng hàng

c) Chứng minh tỉ số độ dài hai đoạn thẳng MF và FA không phụ thuộc vào vị trí của P .



Lời giải

a) Ta có: O là trung điểm của AC ($ABCD$ là hình chữ nhật)

P là trung điểm của CM (Vì M đối xứng với C qua P)

Nên OP là đường trung bình của $\triangle ACM$, do đó $OP \parallel AM \Rightarrow AM \parallel BD$

b) Vì OP là đường trung bình của $\triangle ACM$ nên $OP \parallel AM$ và $OP = \frac{1}{2}AM$

Do đó $OP \parallel AI; OP = AI \Rightarrow$ tứ giác $AIPO$ là hình bình hành $\Rightarrow PI \parallel AC$ (1)

Kẻ $ME \parallel AB$ cắt AC tại K , ta có $\widehat{KAE} = \widehat{EAM} (= \widehat{KDA})$

Nên AE là phân giác \widehat{KAM} , mặt khác $AE \perp KM \Rightarrow \triangle AKM$ cân

E là trung điểm của MK , do đó EI là đường trung bình của $\triangle AMK \Rightarrow EI \parallel OA \Rightarrow EI \parallel AC$ (2)

Ta lại có E, I, F thẳng hàng (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có E, F, P thẳng hàng.

Câu 4 (1,0 điểm): Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{x^2 - 2x + 2012}{x^2}$ với $x \neq 0$

$$\text{Ta có: } P = \frac{2012x^2 - 2x \cdot 2012 + 2012^2}{2012x^2} = \frac{2011x^2 + x^2 - 2x \cdot 2012 + 2012^2}{2012x^2} = \frac{2011}{2012} + \frac{(x-2011)^2}{2012x^2}$$

Do $x \neq 0$ và $(x - 2011)^2 \geq 0$ với mọi x , nên ta có:

$$P = \frac{2011}{2012} + \frac{(x-2011)^2}{2012x^2} \geq \frac{2011}{2012} \Rightarrow P_{\min} = \frac{2011}{2012} \Leftrightarrow x = 2012 \text{ (TMĐK)}$$

Hết