

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 1. Xét tính đơn điệu của hàm số cho trước

Từ kết quả trên, để xét tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$, ta thực hiện các bước sau:

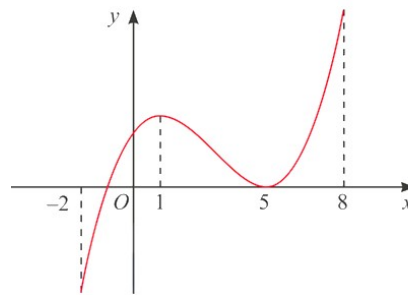
Bước 1. Tìm tập xác định D của hàm số.

Bước 2. Tính đạo hàm $f'(x)$ của hàm số. Tìm các điểm $x_1; x_2; \dots; x_n$ thuộc D mà tại đó đạo hàm $f'(x)$ bằng 0 hoặc không tồn tại.

Bước 3. Sắp xếp các điểm $x_1; x_2; \dots; x_n$ theo thứ tự tăng dần, xét dấu $f'(x)$ và lập bảng biến thiên.

Bước 4. Nêu kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

Câu 1. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = f(x)$ có đồ thị cho ở Hình.



Lời giải

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-2; 1)$ và $(5; 8)$, nghịch biến trên khoảng $(1; 5)$.

Câu 2. Xét dấu y' rồi tìm khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = -2x^2 + 4x + 3$

Lời giải

Hàm số đã cho có tập xác định là $\mathbb{R}$

Ta có $y' = -4x + 4$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Ta có bảng xét dấu của y' như sau:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	+	0	-

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$; nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Câu 3. Chứng minh rằng hàm số $g(x) = \frac{x}{x-1}$ nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Lời giải

Hàm số xác định trên $(1; +\infty)$.

Ta có $g'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} < 0$ với mọi $x \in (1; +\infty)$.

Vậy $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Câu 4. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$.

Lời giải

- Hàm số đã cho có tập xác định là $\mathbb{R}$.

- Ta có: $y' = 3x^2 - 6x - 9$;

$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 3$.

Bảng biến thiên của hàm số như sau:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			6		-26		$+\infty$
	$-\infty$						

Vậy hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$ và $(3; +\infty)$; nghịch biến trên khoảng $(-1; 3)$.

Câu 5. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - x + 5$.

Lời giải

- Hàm số đã cho có tập xác định là $\mathbb{R}$.

- Ta có: $y' = -x^2 + 2x - 1 = -(x-1)^2$; $y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên của hàm số như sau:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$-$
y	$+\infty$		$-\infty$

Vậy hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 6. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = \frac{x^2 + 4}{x}$.

Lời giải

- Hàm số đã cho có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- Ta có: $y' = \frac{x^2 - 4}{x^2}$ với $x \neq 0$;

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ hoặc $x = 2$.

Bảng biến thiên của hàm số như sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	-4	$+\infty$	4	$+\infty$	

Vậy hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -2)$ và $(2; +\infty)$; nghịch biến trên mỗi khoảng $(-2; 0)$ và $(0; 2)$.

Câu 7. Xác định các khoảng đồng biến, nghịch biến và lập bảng biến thiên của hàm số:

a) $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$;

b) $y = f(x) = x + \frac{1}{x}$.

Lời giải

a) Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $y' = f'(x) = 3x^2 - 6x$;

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$

Suy ra hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	1	-3	$+\infty$	

b) Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ta có $y' = f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Vì $x^2 > 0, \forall x \neq 0$ nên dấu của $f'(x)$ là dấu của $x^2 - 1$.

Bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Ghi chú: Khi lập bảng biến thiên tại x_0 mà $f'(x)$ hoặc $f(x)$ không xác định, người ta viết |.

Suy ra hàm số $y = x + \frac{1}{x}$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(0; 1)$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	-2	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Câu 8. Lập bảng biến thiên và xác định các khoảng đơn điệu của hàm số:

$$y = f(x) = 2x^3 + 6x^2 + 6x - 9$$

Lời giải

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } y' = f'(x) = 6x^2 + 12x + 6 = 6(x+1)^2.$$

Do đó $y' \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $y' = 0$ tại $x = -1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$				$+\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 9. Xét tính đơn điệu của các hàm số sau:

a) $f(x) = -x^3 + 3x^2$

b) $g(x) = x + \frac{1}{x}$

c) $h(x) = x^3$

Lời giải

a) Xét hàm số $f(x) = -x^3 + 3x^2$.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } f'(x) = -3x^2 + 6x; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 2.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	0	4		$-\infty$	

Vậy hàm số $f(x) = -x^3 + 3x^2$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$.

b) Xét hàm số $g(x) = x + \frac{1}{x}$.

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ta có $g'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$.

Vì $x^2 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ nên $g'(x)$ cùng dấu với $x^2 - 1$.

Ta có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$g'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$-\infty$	-2	$+\infty$	2	$+\infty$	

Vậy hàm số $g(x) = x + \frac{1}{x}$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(0; 1)$.

c) Xét hàm số $h(x) = x^3$.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $h'(x) = 3x^2; h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	0	$+$
$h(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

Vậy hàm số $h(x) = x^3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Dạng 2. Tìm m để hàm số đơn điệu trên các khoảng xác định của nó

Xét hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

– Đáp án ước 1. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

– Đáp án ước 2. Tính đạo hàm $y' = f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

+ Để $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' = f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{f'(x)} = 3a > 0 \\ \Delta_{f'(x)} = 4b^2 - 12ac \leq 0 \end{cases} \Rightarrow m ?$

$$\mathbb{R} \Leftrightarrow y' = f'(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{f'(x)} = 3a < 0 \\ \Delta_{f'(x)} = 4b^2 - 12ac \leq 0 \end{cases} \Rightarrow m ?$$

+ Đề $f(x)$ nghịch biến trên

Lưu ý: Dấu của tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$.

$$\bullet \text{ Đề } f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}.$$

$$\bullet f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}.$$

$$\text{Xét hàm số nhất biến } y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}.$$

– Đáp án ước 1. Tập xác định:

$$y' = f'(x) = \frac{a.d - b.c}{(cx+d)^2}.$$

– Đáp án ước 2. Tính đạo hàm

$$+ \text{ Đề } f(x) \text{ đồng biến trên } D \Leftrightarrow y' = f'(x) > 0, \forall x \in D \Leftrightarrow a.d - b.c > 0 \Rightarrow m ?$$

$$+ \text{ Đề } f(x) \text{ nghịch biến trên } D \Leftrightarrow y' = f'(x) < 0, \forall x \in D \Leftrightarrow a.d - b.c < 0 \Rightarrow m ?$$

★ **Lưu ý:** Đối với hàm phân thức thì không có dấu "=" xảy ra tại vị trí y' .

Câu 10. (Đề Tham Khảo Lần 2 2020) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + 4x + 3 \text{ đồng biến trên } \mathbb{R}.$$

Lời giải

$$\text{Ta có } f'(x) = x^2 + 2mx + 4.$$

Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (Dấu '=' xảy ra tại hữu hạn điểm).

$$\text{Ta có } f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 4 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2.$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$, vậy có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 11. (Mã 123 - 2017) Cho hàm số $y = -x^3 - mx^2 + (4m+9)x + 5$, với m là tham số. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$

Lời giải

Ta có:

$$+) \text{ TXĐ: } D = \mathbb{R}$$

$$+) y' = -3x^2 - 2mx + 4m + 9.$$

$$\text{Hàm số nghịch biến trên } (-\infty; +\infty) \text{ khi } y' \leq 0, \forall x \in (-\infty; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 < 0 \\ \Delta' = m^2 + 3(4m+9) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m \in [-9; -3] \Rightarrow \text{có 7 giá trị nguyên của } m \text{ thỏa mãn.}$$

Câu 12. Tìm giá trị của m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2mx^2 + (m+3)x - 5 + m$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Lời giải

Ta có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$y' = x^2 - 4mx + (m+3)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4mx + (m+3) = 0$$

Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, đẳng thức chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm

$$\Leftrightarrow \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow (-2m)^2 - 1 \cdot (m+3) \leq 0 \Leftrightarrow 4m^2 - m - 3 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{4} \leq m \leq 1$$

$$\text{Vậy } -\frac{3}{4} \leq m \leq 1$$

Câu 13. (Đề Tham Khảo - 2017) Hỏi có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = (m^2 - 1)x^3 + (m - 1)x^2 - x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Lời giải

TH1: $m = 1$. Ta có: $y = -x + 4$ là phương trình của một đường thẳng có hệ số góc âm nên hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Do đó nhận $m = 1$.

TH2: $m = -1$. Ta có: $y = -2x^2 - x + 4$ là phương trình của một đường Parabol nên hàm số không thể nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Do đó loại $m = -1$.

TH3: $m \neq \pm 1$. Khi đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty) \Leftrightarrow y' \leq 0 \forall x \in \mathbb{R}$, dấu “=” chỉ xảy ra ở hữu hạn điểm trên $\mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow 3(m^2 - 1)x^2 + 2(m - 1)x - 1 \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 < 0 \\ (m - 1)^2 + 3(m^2 - 1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 < 0 \\ (m - 1)(4m + 2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 1 \\ -\frac{1}{2} \leq m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m < 1$$

$\forall m \in \mathbb{Z}$ nên $m = 0$.

Vậy có 2 giá trị m nguyên cần tìm là $m = 0$ hoặc $m = 1$.

Câu 14. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}(m^2 - m)x^3 + 2mx^2 + 3x - 2$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

Lời giải

$$y' = (m^2 - m)x^2 + 4mx + 3$$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty) \Leftrightarrow y' \geq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$.

+ Với $m = 0$ ta có $y' = 3 > 0$ với $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

+ Với $m = 1$ ta có $y' = 4x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{3}{4} \Rightarrow m = 1$ không thỏa mãn.

$$+ \text{ Với } \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 0 \end{cases} \text{ ta có } y' \geq 0 \text{ với } \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m > 0 \\ \Delta' = m^2 + 3m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < 0 \\ -3 \leq m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq m < 0.$$

Tổng hợp các trường hợp ta được $-3 \leq m \leq 0$.

$$m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-3; -2; -1; 0\}.$$

Vậy có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài ra.

Câu 15. (Mã 105 - 2017) Cho hàm số $y = \frac{mx - 2m - 3}{x - m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S .

Lời giải

$$y' = \frac{-m^2 + 2m + 3}{(x - m)^2}$$

hàm số đồng biến trên khoảng xác định khi $-1 < m < 3$ nên có 3 giá trị của m nguyên

Câu 16. (THPT Hà Huy Tập - 2018) Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x + 2 - m}{x + 1}$ nghịch biến trên các khoảng mà nó xác định?

Lời giải

Với $m = 1$ thì hàm số là hàm hằng ($\forall x \neq -1$) nên không nghịch biến.

$$\text{Ta có } y' = \frac{m - 1}{(x + 1)^2}, \forall x \neq -1.$$

Hàm số nghịch biến trên từng khoảng của tập xác định khi và chỉ khi $y' < 0, x \neq -1 \Leftrightarrow m < 1$.

Dạng 3. Tìm m để hàm số nhất biến đơn điệu trên khoảng cho trước

Câu 17. (Đề Tham Khảo Lần 1 2020) Cho hàm số $f(x) = \frac{mx - 4}{x - m}$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$.

$$\text{Đạo hàm } f'(x) = \frac{-m^2 + 4}{(x - m)^2}.$$

Hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi

$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 + 4 > 0 \\ m \notin (0; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m \leq 0$$

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in [-1; 0]$. Vậy có hai giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài.

Câu 18. (Mã 103-2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+1}{x+3m}$ nghịch biến trên khoảng $(6; +\infty)$?

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-3m\}$; $y' = \frac{3m-1}{(x+3m)^2}$

Hàm số $y = \frac{x+1}{x+3m}$ nghịch biến trên khoảng $(6; +\infty)$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} y' < 0 \\ (6; +\infty) \subset D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m-1 < 0 \\ -3m \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{1}{3} \\ m \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq m < \frac{1}{3}$$

$$\forall m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in [-2; -1; 0]$$

Câu 19. (Mã 102 - 2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+6}{x+5m}$ nghịch biến trên khoảng $(10; +\infty)$?

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-5m\}$

$$y' = \frac{5m-6}{(x+5m)^2}$$

Hàm số nghịch biến trên $(10; +\infty)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} y' < 0, \forall x \in D \\ -5m \notin (10; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5m-6 < 0 \\ -5m \leq 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{6}{5} \\ m \geq -2 \end{cases}$

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in [-2; -1; 0; 1]$

Câu 20. (Sở Hà Tĩnh - 2020) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{mx+9}{4x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(0; 4)$?

Lời giải

Điều kiện: $x \neq -\frac{m}{4}$

$$y' = \frac{m^2 - 36}{(4x + m)^2}$$

Ta có:

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0; 4) \Leftrightarrow y' < 0, \forall x \in (0; 4)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 36 < 0 \\ -\frac{m}{4} \notin (0; 4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 < m < 6 \\ -\frac{m}{4} \leq 0 \\ -\frac{m}{4} \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 < m < 6 \\ m \geq 0 \\ m \leq -16 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m < 6$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Vậy có 6 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Dạng 4. Tìm m để hàm số bậc 3 đơn điệu trên khoảng cho trước

Câu 21. (Mã 101 – 2020 -Lần 2) Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (4 - m)x$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$

Lời giải

Ta có.

$$y' = 3x^2 - 6x + 4 - m \text{ ycbt} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (2; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 4 - m \geq 0, \forall x \in (2; +\infty) \Leftrightarrow m \leq 3x^2 - 6x + 4, \forall x \in (2; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow m \leq \min_{(2; +\infty)} g(x) \text{ với } g(x) = 3x^2 - 6x + 4$$

Ta có.

$$g'(x) = 6x - 6$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$g'(x)$		0	+	
$g(x)$				$+\infty$

4.

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra: $m \leq 4$ thỏa yêu cầu bài toán.

Vậy: $m \in (-\infty; 4]$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$

Câu 22. (Mã 102 – 2020 – Lần 2) Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (5 - m)x$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$

Lời giải

$$y' = 3x^2 - 6x + 5 - m$$

Ta có

$$(2; +\infty) \quad y' \geq 0, \forall x \in (2; +\infty)$$

Hàm số đã cho đồng biến trên khi và chỉ khi

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 5 - m \geq 0, \forall x > 2 \Leftrightarrow m \leq 3x^2 - 6x + 5, \forall x > 2$$

$$f(x) = 3x^2 - 6x + 5 \quad (2; +\infty)$$

Xét hàm số trên khoảng

$$f'(x) = 6x - 6 \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (loại)}$$

Có

Bảng biến thiên

x	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	5	$+\infty$

$$m \leq 3x^2 - 6x + 5, \forall x > 2 \Leftrightarrow m \leq 5$$

Từ bảng biến thiên ta có

$$m \in (-\infty; 5]$$

Vậy

Câu 23. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = f(x) = \frac{mx^3}{3} + 7mx^2 + 14x - m + 2$ giảm trên nửa khoảng $[1; +\infty)$?

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbf{R}$, yêu cầu của bài toán đưa đến giải bất phương trình

$$mx^2 + 14mx + 14 \leq 0, \forall x \geq 1, \text{ tương đương với } g(x) = \frac{-14}{x^2 + 14x} \geq m \quad (1)$$

Dễ dàng có được $g(x)$ là hàm tăng $\forall x \in [1; +\infty)$, suy ra $\min_{x \geq 1} g(x) = g(1) = -\frac{14}{15}$

$$\Leftrightarrow \min_{x \geq 1} g(x) \geq m \Leftrightarrow -\frac{14}{15} \geq m$$

Kết luận: (1)

Câu 24. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - 6mx + m$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

Lời giải

Ta có $y' = 6x^2 - 6x - 6m$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$ khi và chỉ khi $y' \leq 0$ với $\forall x \in (-1; 1)$ hay $m \geq x^2 - x$ với $\forall x \in (-1; 1)$

Xét $f(x) = x^2 - x$ trên khoảng $(-1; 1)$ ta có $f'(x) = 2x - 1$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Bảng biến thiên

x	-1	$\frac{1}{2}$	1
y'	-	0	+
y	2	$-\frac{1}{4}$	0

Dựa vào bảng biến thiên ta có $m \geq f(x)$ với $\forall x \in (-1; 1) \Leftrightarrow m \geq 2$.

* Có thể sử dụng $y' \leq 0$ với $\forall x \in (-1; 1) \Leftrightarrow \begin{cases} y'(-1) \leq 0 \\ y'(1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6m \leq 0 \\ 12 - 6m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ m \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 2$.

Câu 25. (THPT Chuyên Hạ Long - 2018) Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = x^3 - 3(2m+1)x^2 + (12m+5)x + 2$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$. Tìm số phần tử của S

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 3x^2 - 6(2m+1)x + 12m + 5$$

Hàm số đồng biến trong khoảng $(2; +\infty)$ khi $y' \geq 0, \forall x \in (2; +\infty)$
 $\Leftrightarrow 3x^2 - 6(2m+1)x + 12m + 5 \geq 0, \forall x \in (2; +\infty)$

$$3x^2 - 6(2m+1)x + 12m + 5 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{3x^2 - 6x + 5}{12(x-1)}$$

Xét hàm số $g(x) = \frac{3x^2 - 6x + 5}{12(x-1)}$ với $x \in (2; +\infty)$

$$g'(x) = \frac{3x^2 - 6x + 1}{12(x-1)^2} > 0 \text{ với } \forall x \in (2; +\infty) \Rightarrow \text{hàm số } g(x) \text{ đồng biến trên khoảng } (2; +\infty)$$

$$\text{Do đó } m \leq g(x), \forall x \in (2; +\infty) \Rightarrow m \leq g(2) \Leftrightarrow m \leq \frac{5}{12}$$

Vậy không có giá trị nguyên dương nào của m thỏa mãn bài toán.

Dạng 5. Tìm m để hàm số (lượng giác, chứa căn, chứa dấu giá trị tuyệt đối...) đơn điệu trên khoảng cho trước

Câu 26. (Đề Minh Họa 2017) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{\tan x - 2}{\tan x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải

Đặt $t = \tan x$, vì $x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow t \in (0; 1)$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t-2}{t-m} \forall t \in (0; 1)$. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$

Ta có $f'(t) = \frac{2-m}{(t-m)^2}$.

Ta thấy hàm số $t(x) = \tan x$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$. Nên để hàm số $y = \frac{\tan x - 2}{\tan x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ khi và chỉ khi: $f'(t) > 0 \forall t \in (0; 1)$

$$\Leftrightarrow \frac{2-m}{(t-m)^2} > 0 \forall t \in (0; 1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2-m > 0 \\ m \notin (0; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m \leq 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; 0] \cup [1; 2) \\ m \geq 1 \end{cases}$$

Câu 27. (Đề Tham Khảo 2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y = x^3 + mx - \frac{1}{5x^5}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$

Lời giải

$$y' = 3x^2 + m + \frac{1}{x^6}$$

Hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi $y' = 3x^2 + m + \frac{1}{x^6} \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$

$$\Leftrightarrow -3x^2 - \frac{1}{x^6} \leq m, \forall x \in (0; +\infty). \text{ Xét hàm số } g(x) = -3x^2 - \frac{1}{x^6}, x \in (0; +\infty)$$

$$g'(x) = -6x + \frac{6}{x^7} = \frac{-6(x^8 - 1)}{x^7}, g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 (\text{loại}) \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		0	
$g(x)$	$-\infty$	-4	$-\infty$

Dựa vào BBT ta có $m \geq -4$, suy ra các giá trị nguyên âm của tham số m là $-4; -3; -2; -1$

Câu 28. (THPT Bạch Đằng Quảng Ninh 2019) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = \frac{1}{5}m^2x^5 - \frac{1}{3}mx^3 + 10x^2 - (m^2 - m - 20)x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Tính tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S

Lời giải

$$\text{Ta có } f'(x) = m^2x^4 - mx^2 + 20x - (m^2 - m - 20) = m^2(x^4 - 1) - m(x^2 - 1) + 20(x + 1)$$

$$= m^2(x-1)(x+1)(x^2+1) - m(x-1)(x+1) + 20(x+1)$$

$$= (x+1) \left[m^2(x-1)(x^2+1) - m(x-1) + 20 \right]$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ m^2(x-1)(x^2+1) - m(x-1) + 20 = 0 (*) \end{cases}$$

Ta có $f'(x) = 0$ có một nghiệm đơn là $x = -1$, do đó nếu (*) không nhận $x = -1$ là nghiệm thì $f'(x)$ đổi dấu qua $x = -1$. Do đó để $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ hay (*) nhận $x = -1$ làm nghiệm (bậc lẻ).

$$\text{Suy ra } m^2(-1-1)(1+1) - m(-1-1) + 20 = 0 \Leftrightarrow -4m^2 + 2m + 20 = 0$$

Tổng các giá trị của m là $\frac{1}{2}$.

Câu 29. (THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019) Tìm tập hợp các giá trị thực của tham số m để hàm số

$$y = x + 1 + \frac{m}{x-2}$$

đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó?

Lời giải

• Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Hàm số đã cho đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó khi và chỉ khi:

$$\begin{aligned} y' \geq 0, \forall x \in D &\Leftrightarrow 1 - \frac{m}{(x-2)^2} \geq 0, \forall x \in D \\ &\Leftrightarrow m \leq (x-2)^2, \forall x \in D \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(x) = (x-2)^2$ ta có:

$$f'(x) = 2x - 4 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

Vậy, để hàm số đã cho đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó thì $m \leq 0$.

Câu 30. (THPT Minh Khai Hà Tĩnh 2019) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số để hàm số

$$y = \frac{\cos x - 3}{\cos x - m}$$

nghiệch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$

Lời giải

$$y' = \frac{(-m+3)}{(\cos x - m)^2} \cdot (-\sin x) = \frac{(m-3)}{(\cos x - m)^2} \cdot \sin x$$

Điều kiện: $\cos x \neq m$. Ta có:

$$x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \Rightarrow \sin x > 0, (\cos x - m)^2 > 0, \forall x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) : \cos x \neq m$$

Vì

$$\text{Để hàm số nghịch biến trên khoảng } \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \Leftrightarrow y' < 0 \quad \forall x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m - 3 < 0 \\ \cos x \neq m \quad \forall x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 3 < 0 \\ m \notin (-1; 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 \\ m \leq -1 \\ m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq m < 3 \\ m \leq -1 \end{cases}$$

Chú ý : Tập giá trị của hàm số $y = \cos x, \quad \forall x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ là $(-1; 0)$.

Câu 31. (Hoàng Hoa Thám 2019) Cho hàm số $y = \frac{(4-m)\sqrt{6-x}+3}{\sqrt{6-x}+m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trong khoảng $(-10; 10)$ sao cho hàm số đồng biến trên $(-8; 5)$?

Lời giải

Đặt $t = -\sqrt{6-x}$ vì $x \in (-8; 5) \Rightarrow t \in (-\sqrt{14}; -1)$ và $t = -\sqrt{6-x}$ đồng biến trên $(-8; 5)$.

Hàm số trở thành $y = \frac{-(4-m)t+3}{-t+m}$ tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{m\} \Rightarrow y' = \frac{m^2 - 4m + 3}{(-t+m)^2}$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\sqrt{14}; -1)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4m + 3 > 0 \\ m \leq -\sqrt{14} \\ m \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -\sqrt{14} \\ -1 \leq m < 1 \\ m > 3 \end{cases}$

$\Rightarrow m = \{-9, -8, -7, -6, -5, -4, -1, 0, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ có 14 giá trị.

Câu 32. (Chuyên Bắc Giang 2019) Cho hàm số $y = \frac{\ln x - 4}{\ln x - 2m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(1; e)$. Tìm số phần tử của S .

Lời giải

$$y = f(x) = \frac{\ln x - 4}{\ln x - 2m}$$

Đặt $t = \ln x$, điều kiện $t \in (0; 1)$

$$g(t) = \frac{t-4}{t-2m}; \quad g'(t) = \frac{-2m+4}{(t-2m)^2}$$

Để hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(1; e)$ thì hàm số $g(t)$ đồng biến trên $(0; 1) \Leftrightarrow g'(t) > 0, t \in (0; 1)$

$$\Leftrightarrow \frac{-2m+4}{(t-2m)^2} > 0, t \in (0; 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2m+4 > 0 \\ 2m \notin (0; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} < m < 2 \\ m < 0 \end{cases}$$

S là tập hợp các giá trị nguyên dương $\Rightarrow S = \{1\}$.

Vậy số phần tử của tập S là 1.

Câu 33. (Chuyên Ngữ - Hà Nội - 2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của m để hàm số $y = x + 5 + \frac{1-m}{x-2}$ đồng biến trên $[5; +\infty)$?

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Đạo hàm: $y' = 1 + \frac{m-1}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x + m + 3}{(x-2)^2}$.

Xét hàm số $f(x) = x^2 - 4x + 3$ trên $[5; +\infty)$.

Đạo hàm: $f'(x) = 2x - 4$. Xét $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = -1$. Ta có: $f(5) = 8$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
y'		-	0	+	0	+	
y	$+\infty$						

Do $(x-2)^2 > 0$ với mọi $x \in [5; +\infty)$ nên $y' \geq 0, \forall x \in [5; +\infty)$ khi và chỉ khi $f(x) \geq -m, \forall x \in [5; +\infty)$. Dựa vào bảng biến thiên ta có: $-m \leq 8 \Leftrightarrow m \geq -8$.

Mà m nguyên âm nên ta có: $m \in \{-8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1\}$.

Vậy có 8 giá trị nguyên âm của m để hàm số $y = x + 5 + \frac{1-m}{x-2}$ đồng biến trên $[5; +\infty)$.

Câu 34. (Chuyên Thái Bình - 2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2018; 2018]$ để hàm số $y = \sqrt{x^2 + 1} - mx - 1$ đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - m$$

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \leq \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}, \forall x \in \mathbb{R} \quad (1)$.

Xét $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ trên $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

$f'(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	-1	1

Ta có: $m \leq \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \leq -1$.

Mặt khác $m \in [-2018; 2018] \Rightarrow m \in [-2018; -1]$.

Vậy có 2018 số nguyên m thỏa điều kiện.

Câu 35. (Chuyên Thái Bình - Lần 3 - 2020) Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y = 2^{x^3 - x^2 + mx + 1}$ đồng biến trên $(1; 2)$.

Lời giải

Ta có: $y' = (3x^2 - 2x + m) \cdot 2^{x^3 - x^2 + mx + 1} \cdot \ln 2$

Hàm số đồng biến trên $(1; 2) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (1; 2)$

$\Leftrightarrow (3x^2 - 2x + m) \cdot 2^{x^3 - x^2 + mx + 1} \cdot \ln 2 \geq 0, \forall x \in (1; 2)$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 2x + m \geq 0, \forall x \in (1; 2)$

$\Leftrightarrow m \geq -3x^2 + 2x, \forall x \in (1; 2)$

$\Leftrightarrow m \geq \max_{(1; 2)} (-3x^2 + 2x)$

Xét hàm số $f(x) = -3x^2 + 2x$, với $x \in (1; 2)$.

Ta có: $f'(x) = -6x + 2$.

Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -6x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$.

Bảng biến thiên:

x	1	2
$f'(x)$	-	
$f(x)$	-1	-8

Vậy $m \geq -1$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 36. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = |mx^3 - mx^2 + 16x - 32|$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$.

Lời giải

Xét $f(x) = mx^3 - mx^2 + 16x - 32$ ta có $f'(x) = m(3x^2 - 2x) + 16$ và hàm số

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & (f(x) \geq 0) \\ -f(x) & (f(x) < 0) \end{cases} \Rightarrow y' = \begin{cases} f'(x) & (f(x) > 0) \\ -f'(x) & (f(x) < 0) \end{cases}$$

$$\text{TH1: } \begin{cases} f'(x) \leq 0, \forall x \in (1; 2) \\ f(x) > 0, \forall x \in (1; 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) \leq 0, \forall x \in (1; 2) \\ f(2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m(3x^2 - 2x) + 16 \leq 0, \forall x \in (1; 2) \\ 4m \geq 0 \end{cases}$$

Hệ này vô nghiệm vì $m \geq 0 \Rightarrow m(3x^2 - 2x) + 16 > 0, \forall x \in (1; 2)$

TH2:

$$\begin{cases} -f'(x) \leq 0, \forall x \in (1; 2) \\ f(x) < 0, \forall x \in (1; 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) \geq 0, \forall x \in (1; 2) \\ f(2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m(3x^2 - 2x) + 16 \geq 0, \forall x \in (1; 2) \\ 4m \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq g(x) = -\frac{16}{3x^2 - 2x}, \forall x \in (1; 2) \\ m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \max_{[1; 2]} g(x) = g(2) = -2 \\ m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 0.$$

Vậy có 3 số nguyên thỏa mãn.

Câu 37. (Chuyên Lê Khiết – Quảng Ngãi 2023) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $a \in [-10; 10]$ để hàm số $y = |3x^4 - 4(a+2)x^3 + 12ax^2 - 30a|$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$?

Lời giải

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(-\infty; b)$.

Xét hàm số

$$f(x) = 3x^4 - 4(a+2)x^3 + 12ax^2 - 30a \Rightarrow f(-2) = 48 + 32a + 64 + 48a - 30a = 50a + 112.$$

$$f'(x) = 12x[x^2 - (a+2)x + 2a] = 12x(x-2)(x-a).$$

$$+ \text{ TH1: } \begin{cases} f'(x) \geq 0, \forall x \in (-\infty; -2) \\ f(-2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq a, \forall x \in (-\infty; -2) \\ 50a + 112 \leq 0 \end{cases} \quad (\text{KHÔNG THỎA MÃN})$$

$$+ \text{ TH2: } \begin{cases} f'(x) \leq 0, \forall x \in (-\infty; -2) \\ f(-2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq a, \forall x \in (-\infty; -2) \\ 50a + 112 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq -2 \\ a \geq -\frac{56}{25} \end{cases} \Leftrightarrow a \geq -2.$$

Vậy $a \in \{-2; -1; \dots; 10\}$.

Câu 38. (Cụm trường Ninh Thuận - Ninh Thuận 2023) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-2022; 2023)$ để hàm số $y = |2x^3 - (m-3)x + 16 - m^2|$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$?

Lời giải

Xét hàm số $g(x) = 2x^3 - (m-3)x + 16 - m^2 \rightarrow g'(x) = 6x^2 - m + 3$.

Điều kiện bài toán

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g'(x) \geq 0, \forall x \in (0; 2) \\ g(0) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 6x^2 + 3, \forall x \in (0; 2) \\ -m + 3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g'(x) \leq 0, \forall x \in (0; 2) \\ g(0) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \underbrace{6x^2 + 3}_{f(x)}, \forall x \in (0; 2) \\ -m + 3 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m \leq f(0) = 3 \\ m \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 3 \\ m \geq f(2) = 27 \\ m \geq 3 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in (-2022; 2023)$, ta được: $m \in \underbrace{[-2022; 3]}_{2025} \cup \underbrace{[27; 2023]}_{1996}$.

Vậy có $2025 + 1996 = 4021$ giá trị $m \in \mathbb{Z}$.

Dạng 6. Tìm khoảng đơn điệu của hàm số $g(x)=f[u(x)]$ khi biết đồ thị hàm số $f'(x)$

Cách 1:

Bước 1: Tính đạo hàm của hàm số $g(x)$, $g'(x) = u'(x) \cdot f'[u(x)]$.

Bước 2: Sử dụng đồ thị của $f'(x)$, lập bảng xét dấu của $g'(x)$.

Bước 3: Dựa vào bảng dấu kết luận khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

Cách 2:

Bước 1: Tính đạo hàm của hàm số $g(x)$, $g'(x) = u'(x) \cdot f'[u(x)]$.

Bước 2: Hàm số $g(x)$ đồng biến $\Leftrightarrow g'(x) \geq 0$; (Hàm số $g(x)$ nghịch biến $\Leftrightarrow g'(x) \leq 0$) (*)

Bước 3: Giải bất phương trình (*) (dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$) từ đó kết luận khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

Câu 39. (Mã đề 104 - 2019) Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = f(5 - 2x)$

Lời giải

Ta có $y' = f'(5 - 2x) = -2f'(5 - 2x)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow -2f'(5-2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5-2x = -3 \\ 5-2x = -1 \\ 5-2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 3 \\ x = 2 \end{cases}$$

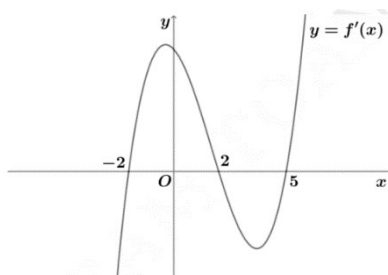
$$f'(5-2x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5-2x < -3 \\ -1 < 5-2x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ 2 < x < 3 \end{cases};$$

$$f'(5-2x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5-2x > 1 \\ -3 < 5-2x < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ 3 < x < 4 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	2	3	4	$+\infty$			
y'		-	0	+	-	0	+	
y								

Câu 40. (THPT Việt Đức Hà Nội 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên.



Xác định tính đơn điệu của hàm số $g(x) = f(3-2x)$

Lời giải

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \\ x = 5 \end{cases}$$

Ta có

Khi đó $g'(x) = -2f'(3-2x)$

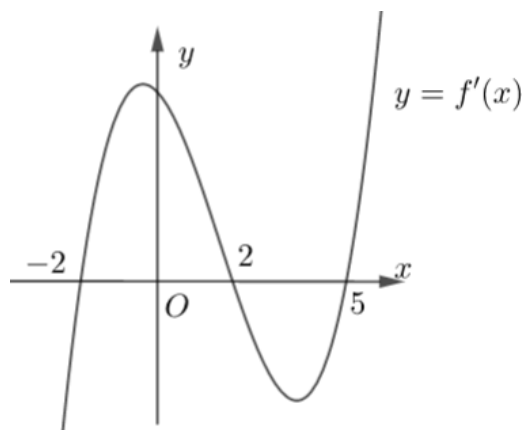
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(3-2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3-2x = -2 \\ 3-2x = 2 \\ 3-2x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ x = \frac{1}{2} \\ x = -1 \end{cases}$$

Với

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1			$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$			$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$g(-1)$			$g\left(\frac{1}{2}\right)$	$g\left(\frac{5}{2}\right)$			$+\infty$

Câu 41. (Sở Ninh Bình) Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Xác định tính đơn điệu của hàm số $y = f(x^2 + 2)$



Lời giải

Đặt $g(x) = f(x^2 + 2)$, hàm số có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

$g'(x) = 2xf'(x^2 + 2)$, kết hợp với đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta được:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 + 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 2 = -2 \\ x^2 + 2 = 2 \\ x^2 + 2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \end{cases}$$

Từ đồ thị đã cho ta có $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 2 \\ x > 5 \end{cases}$

Suy ra $f'(x^2 + 2) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x^2 + 2 < 2 \\ x^2 + 2 > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < x^2 < 0 \\ x^2 > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \sqrt{3} \\ x < -\sqrt{3} \end{cases}$

Và lập luận tương tự $f'(x^2 + 2) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x^2 + 2 < 5 \\ x^2 + 2 < -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x^2 < 3 \\ \end{cases} \Leftrightarrow -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$

Bảng biến thiên (Dấu của $g'(x)$ phụ thuộc vào dấu của $2x$ và $f'(x^2 + 2)$ trên từng khoảng)

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$							

Câu 42. (Sở Vĩnh Phúc 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu như hình sau. Xác định tính đơn điệu của hàm số $g(x) = f(x^2 + 3x + 1)$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Lời giải

$$g'(x) = (2x + 3)f'(x^2 + 3x + 1)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow (2x + 3)f'(x^2 + 3x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ x^2 + 3x + 1 = -1 \\ x^2 + 3x + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ x = -1 \\ x = -2 \\ x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$$

Bảng xét dấu $g'(x) = (2x + 3)f'(x^2 + 3x + 1)$

x	$-\infty$	-3	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Từ bảng xét dấu suy ra hàm số $g(x) = f(x^2 + 3x + 1)$ suy ra các khoảng đơn điệu của hàm số.

Dạng 7. Tìm khoảng đơn điệu của hàm số $g(x) = f[u(x)] + v(x)$ khi biết đồ thị, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$

Cách 1:

Bước 1: Tính đạo hàm của hàm số $g(x)$, $g'(x) = u'(x) \cdot f'[u(x)] + v'(x)$.

Bước 2: Sử dụng đồ thị của $f'(x)$, lập bảng xét dấu của $g'(x)$.

Bước 3: Dựa vào bảng dấu kết luận khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

Cách 2:

Bước 1: Tính đạo hàm của hàm số $g(x)$, $g'(x) = u'(x) \cdot f'[u(x)] + v'(x)$.

Bước 2: Hàm số $g(x)$ đồng biến $\Leftrightarrow g'(x) \geq 0$; (Hàm số $g(x)$ nghịch biến $\Leftrightarrow g'(x) \leq 0$) (*)

Bước 3: Giải bất phương trình (*) (dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$) từ đó kết luận khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

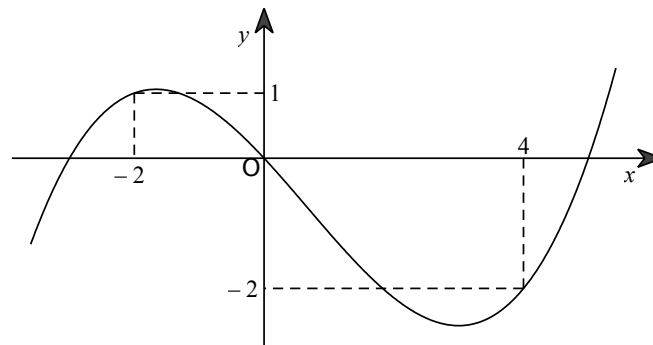
Cách 3: (Trắc nghiệm)

Bước 1: Tính đạo hàm của hàm số $g(x)$, $g'(x) = u'(x) \cdot f'[u(x)] + v'(x)$.

Bước 3: Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $K \Leftrightarrow g'(x) \geq 0, \forall x \in K$; (Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $K \Leftrightarrow g'(x) \leq 0, \forall x \in K$) (*)

Bước 3: Lần lượt chọn thay giá trị từ các phương án vào $g'(x)$ để loại các phương án sai.

Câu 43. (Đề Tham Khảo 2020 – Lần 1) Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g(x) = f(1 - 2x) + x^2 - x$ nghịch biến trên khoảng nào?



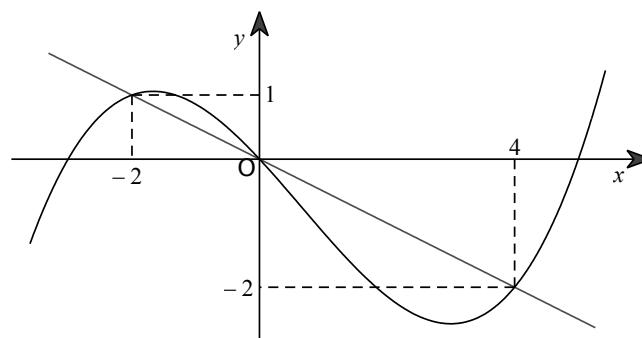
Lời giải

Ta có: $g(x) = f(1 - 2x) + x^2 - x \Rightarrow g'(x) = -2f'(1 - 2x) + 2x - 1$

Đặt $t = 1 - 2x \Rightarrow g'(x) = -2f'(t) - t$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow f'(t) = -\frac{t}{2}$$

Vẽ đường thẳng $y = -\frac{x}{2}$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ trên cùng một hệ trục



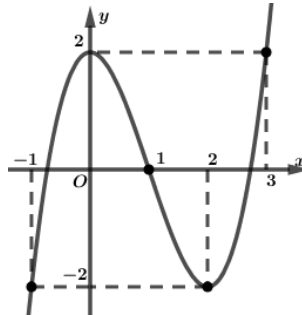
Hàm số $g(x)$ nghịch biến $\Rightarrow g'(x) \leq 0 \Rightarrow f'(t) \geq -\frac{t}{2} \Rightarrow \begin{cases} -2 \leq t \leq 0 \\ t \geq 4 \end{cases}$

$$f'(1-2x) \geq \frac{1-2x}{-2} \Rightarrow \begin{cases} -2 \leq 1-2x \leq 0 \\ 4 \leq 1-2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \\ x \leq -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Như vậy

Vậy hàm số $g(x) = f(1-2x) + x^2 - x$ nghịch biến trên các khoảng $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ và $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$.

Câu 44. (Chuyên Lào Cai - 2020) Cho hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g(x) = f(3x+1) + 9x^3 + \frac{9}{2}x^2$ đồng biến trên khoảng nào?



Lời giải

$$g(x) = f(3x+1) + 9x^3 + \frac{9}{2}x^2 \Rightarrow g'(x) = 3f'(3x+1) + 27x^2 + 9x$$

Xét hàm số

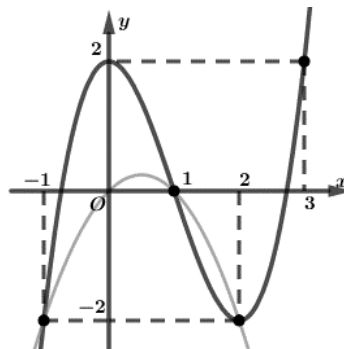
$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow 3f'(3x+1) + 27x^2 + 9x > 0$$

Hàm số đồng biến tương đương

$$\Leftrightarrow f'(3x+1) + 3x(3x+1) > 0 (*)$$

Đặt $t = 3x+1 (*) \Leftrightarrow f'(t) + (t-1)t > 0 \Leftrightarrow f'(t) > -t^2 + t$

Vẽ parabol $y = -x^2 + x$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ trên cùng một hệ trục



$$f'(t) > -t^2 + t \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < t < 1 \\ t > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < 3x+1 < 1 \\ 3x+1 > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{2}{3} < x < 0 \\ x > \frac{1}{3} \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị ta thấy

Câu 45. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị nằm trên trục hoành và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, bảng xét dấu của biểu thức $f'(x)$ như bảng dưới đây.

x	$-\infty$		-2		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = g(x) = \frac{f(x^2 - 2x)}{f(x^2 - 2x) + 1}$ nghịch biến trên khoảng nào?

Lời giải

$$g'(x) = \frac{(x^2 - 2x)' \cdot f'(x^2 - 2x)}{(f(x^2 - 2x) + 1)^2} = \frac{(2x - 2) \cdot f'(x^2 - 2x)}{(f(x^2 - 2x) + 1)^2}$$

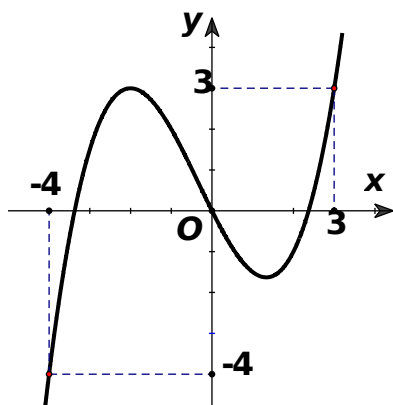
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ f'(x^2 - 2x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x = -2 \\ x^2 - 2x = -1 \\ x^2 - 2x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Ta có bảng xét dấu của $g'(x)$:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu ta có hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; 3)$.

Câu 46. (THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020) Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Xác định tính đơn điệu của hàm số $g(x) = f(3x^2 - 1) - \frac{9}{2}x^4 + 3x^2$

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

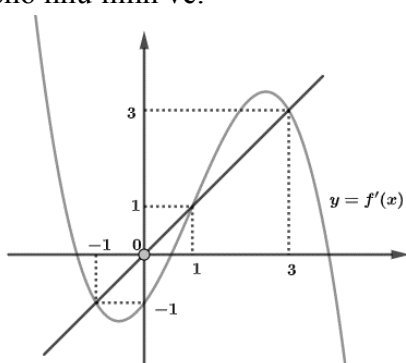
Ta có: $g'(x) = 6xf'(3x^2 - 1) - 18x^3 + 6x = 6x[f'(3x^2 - 1) - 3x^2 + 1]$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(3x^2 - 1) = 3x^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x^2 - 1 = -4(VN) \\ 3x^2 - 1 = 0 \\ 3x^2 - 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \\ x = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Câu 47. (Chuyên Thái Bình - Lần 3 - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho như hình vẽ.



Hàm số $g(x) = 2f(|x-1|) - x^2 + 2x + 2020$ đồng biến trên khoảng nào?

Lời giải

+Với $x > 1$, ta có $g(x) = 2f(x-1) - (x-1)^2 + 2021 \Rightarrow g'(x) = 2f'(x-1) - 2(x-1)$

Hàm số đồng biến $\Leftrightarrow 2f'(x-1) - 2(x-1) > 0 \Leftrightarrow f'(x-1) > x-1$ (*)

Đặt $t = x-1$, khi đó $(*) \Leftrightarrow f'(t) > t \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < t < 3 \\ t < -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 < x < 4 \\ x < 0 \end{cases} \text{ (loại)}$

+Với $x < 1$, ta có $g(x) = 2f(1-x) - (1-x)^2 + 2021 \Rightarrow g'(x) = -2f'(1-x) + 2(1-x)$

Hàm số đồng biến $\Leftrightarrow -2f'(1-x) + 2(1-x) > 0 \Leftrightarrow f'(1-x) < 1-x$ (**)

Đặt $t = 1-x$, khi đó $(**) \Leftrightarrow f'(t) < t \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < t < 1 \\ t > 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < x < 2 \\ x < -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x < -2 \end{cases}$

Vậy hàm số $g(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$, $(0; 1)$, $(2; 4)$.

Câu 48. (THPT Anh Sơn - Nghệ An - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau.

x	$-\infty$	-2		-1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số $y = -2f(x) + 2019$ nghịch biến trên khoảng nào?

Lời giải

Ta có $y' = -2f'(x)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow -2f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -1 \\ x = 2 \\ x = 4 \end{cases}$$

Từ bảng xét dấu của $f'(x)$ ta có

x	$-\infty$	-2	-1	2	4	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0

Từ bảng xét dấu ta có hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$, $(-1; 2)$ và $(4; +\infty)$

Câu 49. (THPT Anh Sơn - Nghệ An - 2020) Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn $f'(x) = (1-x)(x+2)g(x) + 2019$ với $g(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f(1-x) + 2019x + 2020$ nghịch biến trên khoảng nào?

Lời giải

Đặt $h(x) = f(1-x) + 2019x + 2020$.

Vì hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ nên hàm số $h(x)$ cũng xác định trên $\mathbb{R}$.

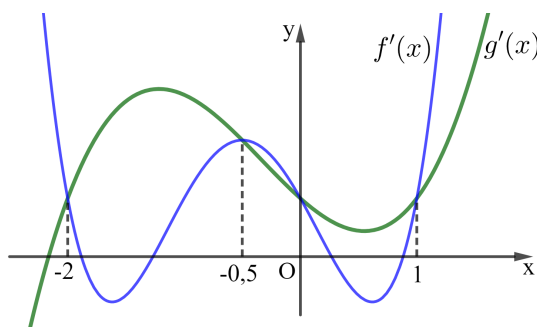
Ta có $h'(x) = -f'(1-x) + 2019$.

Do $h'(x) = 0$ tại hữu hạn điểm nên để tìm khoảng nghịch biến của hàm số $h(x)$, ta tìm các giá trị của x sao cho $h'(x) < 0 \Leftrightarrow -f'(1-x) + 2019 < 0 \Leftrightarrow f'(1-x) - 2019 > 0$

$$\Leftrightarrow x(3-x)g(1-x) > 0 \Leftrightarrow x(3-x) < 0 \quad (\text{Do } g(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x > 3 \end{cases}$$

Vậy hàm số $y = f(1-x) + 2019x + 2020$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(3; +\infty)$.

Câu 50. (Liên trường huyện Quảng Xương - Thanh Hóa - 2021) Cho các hàm số $y = f(x)$; $y = g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị các đạo hàm $f'(x)$; $g'(x)$ (đồ thị hàm số $y = g'(x)$ là đường đậm hơn) như hình vẽ.



Hàm số $h(x) = f(x-1) - g(x-1)$ nghịch biến trên khoảng nào?

Lời giải

Ta có: $h'(x) = f'(x-1) - g'(x-1)$

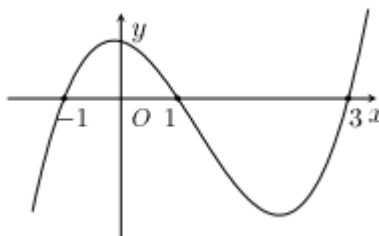
Dựa vào hình vẽ ta có hàm số $h(x)$ nghịch biến $\Leftrightarrow h'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x-1) < g'(x-1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x-1 < -\frac{1}{2} \\ 0 < x-1 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < \frac{1}{2} \\ 1 < x < 2 \end{cases}$$

Do đó hàm số $h(x)$ nghịch biến trên các khoảng $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$ và $(1; 2)$.

Dạng 8. Bài toán hàm ẩn, hàm hợp liên quan đến tham số và một số bài toán khác

Câu 51. (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbf{R}$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên $m \in [-5; 5]$ để hàm số $g(x) = f(x+m)$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?



Lời giải

Ta có $g'(x) = f'(x+m)$. Vì $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbf{R}$ nên $g'(x) = f'(x+m)$ cũng liên tục trên $\mathbf{R}$. Căn cứ vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta thấy

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x+m) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+m < -1 \\ 1 < x+m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1-m \\ 1-m < x < 3-m \end{cases}$$

Hàm số $g(x) = f(x+m)$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq -1-m \\ 3-m \geq 2 \\ 1-m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -3 \\ 0 \leq m \leq 1 \end{cases}$$

Mà m là số nguyên thuộc đoạn $[-5; 5]$ nên ta có $S = \{-5; -4; -3; 0; 1\}$.

Vậy S có 5 phần tử.

Câu 52. (Chuyên Nguyễn Bình Khiêm - Quảng Nam - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ sau:

x	$-\infty$		-10		-2		3		8		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	+	0	-	0	-	0	+	

Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = f(x^3 + 4x + m)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$?

Lời giải

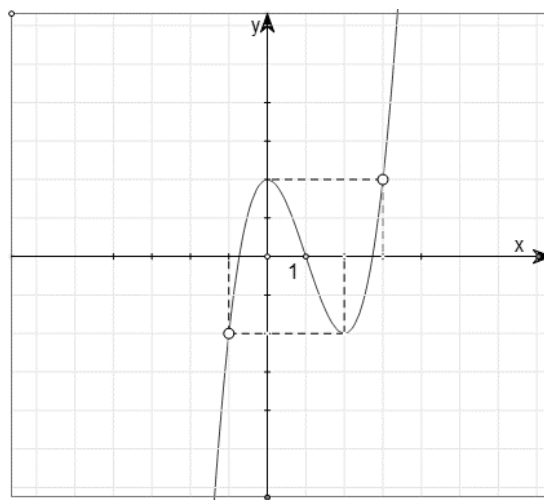
Đặt $t = x^3 + 4x + m \Rightarrow t' = 3x^2 + 4$ nên t đồng biến trên $(-1; 1)$ và $t \in (m-5; m+5)$

Yêu cầu bài toán trở thành tìm m để hàm số $f(t)$ nghịch biến trên khoảng $(m-5; m+5)$.

Dựa vào bảng biến thiên ta được
$$\begin{cases} m-5 \geq -2 \\ m+5 \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 3 \\ m \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3$$

Câu 53. (Chuyên Quang Trung - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ

thị $y = f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $g(x) = f(x-m) - \frac{1}{2}(x-m-1)^2 + 2019$, với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5; 6)$. Tính tổng tất cả các phần tử trong S ?



Lời giải

Xét hàm số $g(x) = f(x-m) - \frac{1}{2}(x-m-1)^2 + 2019$

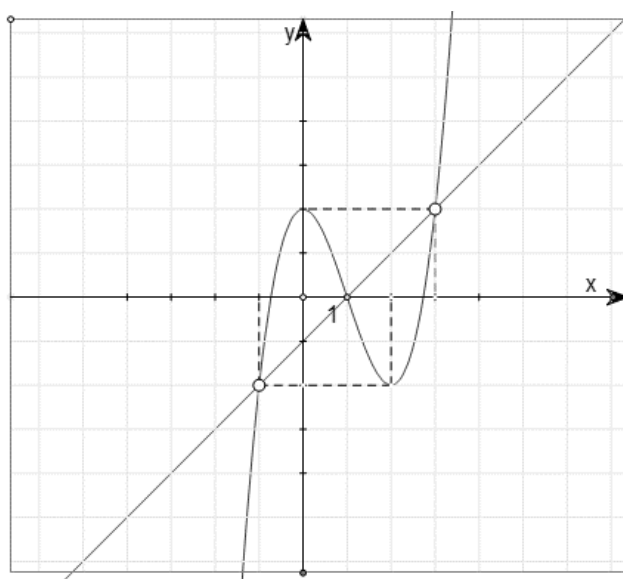
$$g'(x) = f'(x-m) - (x-m-1)$$

Xét phương trình $g'(x) = 0$ (1)

Đặt $x-m=t$, phương trình (1) trở thành $f'(t) - (t-1) = 0 \Leftrightarrow f'(t) = t-1$ (2)

Nghiệm của phương trình (2) là hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = f'(t)$ và $y = t - 1$

Ta có đồ thị các hàm số $y = f'(t)$ và $y = t - 1$ như sau:



Căn cứ đồ thị các hàm số ta có phương trình (2) có nghiệm là:

$$\begin{cases} t = -1 \\ t = 1 \\ t = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = m - 1 \\ x = m + 1 \\ x = m + 3 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên của $y = g(x)$

x	$-\infty$	$m - 1$	$m + 1$	$m + 3$	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$				$+\infty$

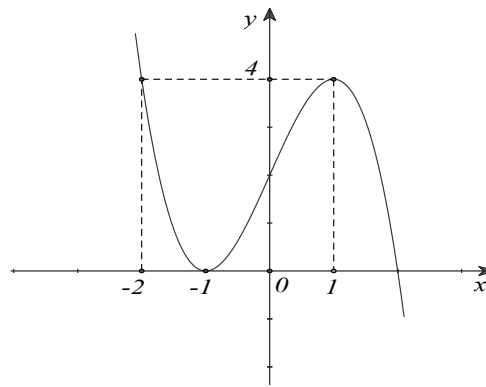
Để hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5; 6)$ cần

$$\begin{cases} m - 1 \leq 5 \\ m + 1 \geq 6 \\ m + 3 \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \leq m \leq 6 \\ m \leq 2 \end{cases}$$

Vì $m \in \mathbb{N}^* \Rightarrow m$ nhận các giá trị $1; 2; 5; 6 \Rightarrow S = 14$.

Câu 54. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên

$m \in (-2020; 2020)$ để hàm số $g(x) = f(2x - 3) - \ln(1 + x^2) - 2mx$ đồng biến trên $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$?



Lời giải

+ Ta có $g'(x) = 2f'(2x-3) - \frac{2x}{1+x^2} - 2m$.

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ khi và chỉ khi $g'(x) \geq 0, \forall x \in \left(\frac{1}{2}; 2\right) \Leftrightarrow m \leq f'(2x-3) - \frac{x}{1+x^2}, \forall x \in \left(\frac{1}{2}; 2\right)$

$$\Leftrightarrow m \leq \min_{x \in \left(\frac{1}{2}; 2\right)} \left[f'(2x-3) - \frac{x}{1+x^2} \right] \quad (1)$$

+ Đặt $t = 2x - 3$, khi đó $x \in \left(\frac{1}{2}; 2\right) \Leftrightarrow t \in (-2; 1)$.

Từ đồ thị hàm $f'(x)$ suy ra $f'(t) \geq 0, \forall t \in (-2; 1)$ và $f'(t) = 0$ khi $t = -1$.

Tức là $f'(2x-3) \geq 0, \forall x \in \left(\frac{1}{2}; 2\right) \Rightarrow \min_{x \in \left(\frac{1}{2}; 2\right)} f'(2x-3) = 0$ khi $x = 1$. (2)

+ Xét hàm số $h(x) = -\frac{x}{1+x^2}$ trên khoảng $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$. Ta có $h'(x) = \frac{x^2-1}{(1+x^2)^2}$ và

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Bảng biến thiên của hàm số $h(x)$ trên $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ như sau:

x	$\frac{1}{2}$	1	2
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	↘ $-\frac{1}{2}$ ↗		

Từ bảng biến thiên suy ra $h(x) \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow \min_{x \in \left(\frac{1}{2}; 2\right)} h(x) = -\frac{1}{2}$ khi $x=1$. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $m \leq -\frac{1}{2}$.

Kết hợp với $m \in \mathbb{Z}$, $m \in (-2020; 2020)$ thì $m \in \{-2019; -2018; \dots; -2; -1\}$.

Vậy có tất cả 2019 giá trị m cần tìm.

Câu 55. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-2)(x^2-6x+m)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2020; 2020]$ để hàm số $g(x) = f(1-x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$?

Lời giải

Ta có: $g'(x) = f'(1-x) = -(1-x)^2(-x-1)[(1-x)^2 - 6(1-x) + m]$
 $= (x-1)^2(x+1)(x^2 + 4x + m - 5)$

Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$

$\Leftrightarrow g'(x) \leq 0, \forall x < -1$ (*), (dấu "=" xảy ra tại hữu hạn điểm).

Với $x < -1$ thì $(x-1)^2 > 0$ và $x+1 < 0$ nên (*) $\Leftrightarrow x^2 + 4x + m - 5 \geq 0, \forall x < -1$

$\Leftrightarrow m \geq -x^2 - 4x + 5, \forall x < -1$.

Xét hàm số $y = -x^2 - 4x + 5$ trên khoảng $(-\infty; -1)$, ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	-1
y	$-\infty$	9	8

Từ bảng biến thiên suy ra $m \geq 9$.

Kết hợp với m thuộc đoạn $[-2020; 2020]$ và m nguyên nên $m \in \{9; 10; 11; \dots; 2020\}$.

Vậy có 2012 số nguyên m thỏa mãn đề bài.

Câu 56. (THPT Yên Phong 1 - Bắc Ninh - 2022) Cho hàm số $f(x) = -x^4 - (4-m^2)x + 2020$ và $g(x) = -x^3 + 5x^2 - 2020x + 2021$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để $h(x) = g[f(x)]$ đồng biến trên $(2; +\infty)$?

Lời giải

$$+) h'(x) = f'(x)g'[f(x)]$$

$$\text{Xét hàm } g(t) = -t^3 + 5t^2 - 2020t + 2021 \Rightarrow g'(t) = -3t^2 + 10t - 2020 < 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\text{Suy ra } g'[f(x)] < 0, \quad \forall f(x) \in \mathbb{R}$$

$$h(x) = g[f(x)] \text{ đồng biến trên } (2; +\infty) \Leftrightarrow h'(x) \geq 0 \text{ với } \forall x \in (2; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow f'(x) \cdot g'[f(x)] \geq 0, \quad \forall x \in (2; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow f'(x)g'[f(x)] \geq 0, \quad \forall x \in (2; +\infty) \quad (\text{vì } g'[f(x)] < 0 \quad \forall f(x) \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow f'(x) \leq 0, \quad \forall x \in (2; +\infty) \Leftrightarrow -4x^3 - 4 + m^2 \leq 0, \quad \forall x \in (2; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow m^2 \leq 4x^3 + 4, \quad \forall x \in (2; +\infty) \Rightarrow m^2 \leq \min_{(2; +\infty)} f(x)$$

$$+) \text{ Xét hàm số } k(x) = 4x^3 + 4, \quad \forall x \in (2; +\infty)$$

$$\text{Bảng biến thiên của hàm số } k(x) = 4x^3 + 4 \Rightarrow k'(x) = 12x^2 \geq 0 \text{ trên } (2; +\infty)$$

x	2	$+\infty$
$k'(x)$		+
$k(x)$	36	$+\infty$

$$\text{Từ BBT suy ra } m^2 \leq 36 \Leftrightarrow -6 \leq m \leq 6 \text{ thì hàm số đồng biến trên } (2; +\infty)$$

$$\text{Do } m \text{ nguyên dương nên } m = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} \text{ suy ra có 6 giá trị nguyên của tham số } m.$$

Câu 57. (Chuyên Bắc Ninh 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2(x^2 + mx + 9)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $g(x) = f(3-x)$ đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$?

Lời giải

$$\text{Ta có } g'(x) = -f'(3-x) = (x-3)(x-2)^2((3-x)^2 + m(3-x) + 9)$$

$$g(x) \text{ đồng biến trên } (3; +\infty) \Leftrightarrow g'(x) \geq 0, \quad \forall x \in (3; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow (3-x)^2 + m(3-x) + 9 \geq 0, \quad \forall x \in (3; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow t^2 + mt + 9 \geq 0, \forall t \in (-\infty; 0) \text{ (với } t = 3 - x; x \in (3; +\infty) \text{ ta có } t \in (-\infty; 0)).$$

$$\Leftrightarrow m \leq -t - \frac{9}{t}, \forall t \in (-\infty; 0)$$

Ta có trên $(-\infty; 0)$ ta có $-t$ và $-\frac{9}{t}$ đều là các số dương nên có $-t - \frac{9}{t} \geq 6$.

$$\text{Vậy } m \leq -t - \frac{9}{t}, \forall t \in (-\infty; 0) \Leftrightarrow m \leq 6$$

Câu 58. (Chuyên Bắc Ninh 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Tìm tổng tất cả các giá

trị nguyên của m để hàm số $y = f\left(\frac{m}{3}x^3 + (m-4)x^2 + 9x + 2021\right)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Ta có:

$$y' = (mx^2 - 2(m-4)x + 9) \cdot f'\left(\frac{m}{3}x^3 + (m-4)x^2 + 9x + 2021\right)$$

Để hàm số: $y = f\left(\frac{m}{3}x^3 + (m-4)x^2 + 9x + 2021\right)$ nghịch biến trên $\mathbf{R}$ thì $y' \leq 0 \forall x \in \mathbf{R}$

$$\Leftrightarrow y' = (mx^2 - 2(m-4)x + 9) \cdot f'\left(\frac{m}{3}x^3 + (m-4)x^2 + 9x + 2021\right) \leq 0 \forall x \in \mathbf{R}$$

Lại có: $y = f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ suy ra $f'(x) \leq 0 \forall x \in \mathbf{R}$

Nên để hàm số: $y = f\left(\frac{m}{3}x^3 + (m-4)x^2 + 9x + 2021\right)$ nghịch biến trên $\mathbf{R}$ thì:

$$mx^2 - 2(m-4)x + 9 \geq 0 \forall x \in \mathbf{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ (m-4)^2 - 9m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m^2 - 17m + 16 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m^2 - 17m + 16 \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } m \in \{1, 2, 3, \dots, 15, 16\}$$

Tổng các giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài là: $1 + 2 + 3 + \dots + 15 + 16 = 136$

Câu 59. (Cụm trường Bắc Ninh 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên dưới đây

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow 1$	4	$\searrow 0$	$\nearrow +\infty$

Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của số thực m sao cho hàm số

$$g(x) = f(x+1) + \frac{2020}{m} \ln \frac{2-x}{2+x} + \frac{x^2}{2} + 3x + 4 \ln(2-x)$$

nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$. Tìm

Tổng tất cả các phần tử thuộc S ?

Lời giải

Ta có: Ycbt $\Leftrightarrow g'(x) \leq 0, \forall x \in (-1; 1)$

$$\Leftrightarrow f'(x+1) + \frac{2020}{m} \cdot \frac{-4}{4-x^2} + x + 3 + \frac{-4}{2-x} \leq 0, \forall x \in (-1; 1)$$

$$\Leftrightarrow (4-x^2)f'(x+1) - \frac{8080}{m} + (x+3)(4-x^2) - 4(2+x) \leq 0, \forall x \in (-1; 1)$$

$$\Leftrightarrow (4-x^2)f'(x+1) + (x+3)(4-x^2) - 4(2+x) \leq \frac{8080}{m}, \forall x \in (-1; 1)$$

$$\Leftrightarrow (4-x^2)f'(x+1) - x^3 - 3x^2 + 4 \leq \frac{8080}{m}, \forall x \in (-1; 1)$$

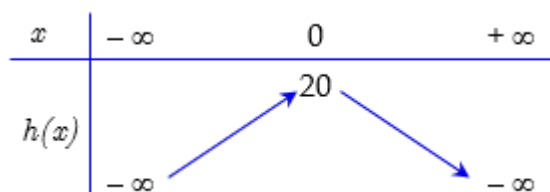
Đặt $h(x) \Rightarrow (4-x^2)f'(x+1) - x^3 - 3x^2 + 4, \forall x \in (-1; 1)$

$$\Rightarrow h'(x) = -2x \cdot f'(x+1) + (4-x^2)f''(x+1) - 3x^2 - 6x$$

Nhận xét: $h(0) = 0$

$$-1 < x < 0 \Rightarrow h'(x) > 0$$

$$0 < x < 1 \Rightarrow h'(x) < 0$$



MTCT suy ra giá trị lớn nhất của vế trái là 16 nên có $20 \leq \frac{8080}{m} \Leftrightarrow 0 < m \leq 404$

Tổng các giá trị của S bằng $\sum_{x=1}^{404} x = 81810$.

Câu 60. Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x) = x^3 + ax^2 + bx - 3, \forall x \in \mathbb{R}$. Biết hàm số $g(x) = f(x) - 3(x-1)^2$

đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ và hàm số $h(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^4 + 2x$ nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$. Tính giá trị của $f'(3)$

Lời giải

Theo giả thiết ta có $\begin{cases} g'(x) \geq 0, \forall x > 0 \\ h'(x) \leq 0, \forall x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) - 6(x-1) \geq 0, \forall x > 0 \\ f'(x) - 2x^3 + 2 \leq 0, \forall x > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + ax^2 + bx - 3 - 6x + 6 \geq 0, \forall x > 0 \\ x^3 + ax^2 + bx - 3 - 2x^3 + 2 \leq 0, \forall x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax^2 + bx \geq -x^3 + 6x - 3, \forall x > 0 \quad (1) \\ ax^2 + bx \leq x^3 + 1, \forall x > 0 \quad (2) \end{cases} (*)$$

Thay $x=1$ vào (*) ta được: $x=1 \Rightarrow \begin{cases} a+b \geq 2 \\ a+b \leq 2 \end{cases} \Rightarrow a+b=2 \Leftrightarrow b=2-a$

Thay ngược lại (2) ta được:

$$\begin{aligned} x^3 + 1 - ax^2 - (2-a)x &\geq 0, \forall x > 0 \Leftrightarrow (x^3 - 2x + 1) - a(x^2 - x) \geq 0, \forall x > 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x - 1) - ax(x-1) &\geq 0, \forall x > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x - 1 - ax) \geq 0, \forall x > 0 (**). \end{aligned}$$

để (**) đúng điều kiện cần là phương trình $x^2 + x - 1 - ax = 0$ phải có nghiệm $x=1 \Rightarrow 1+1-1-a=0 \Leftrightarrow a=1 \Rightarrow b=1$. Điều kiện đủ ta bỏ qua nhé vì tìm được duy nhất a, b .

Khi đó $f'(x) = x^3 + x^2 + x - 3 \Rightarrow f'(3) = 36$

Câu 61. (Liên trường Nghệ An - Quỳnh Lưu - Hoàng Mai - Thái Hòa 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

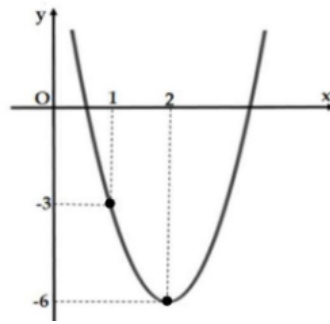
x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		-	
$f(x)$	$+\infty$		$-\infty$

Biết rằng $f(0)=1; f(2)=-2$. Hỏi có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-10; 10]$ để hàm số $y = \frac{(m+1)f(x) - 20}{f(x) - m}$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$?

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } y' &= \frac{-m(m+1)+20}{(f(x)-m)^2} \cdot f'(x) < 0, \forall x \in (0; 2) \Leftrightarrow \begin{cases} -m(m+1)+20 > 0 \\ m \neq f(x), \forall x \in (0; 2) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -5 < m < 4 \\ m \notin (-2; 1) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq m < 4 \\ -5 < m \leq -2 \end{cases} \Rightarrow m \in \{1, 2, 3, -4, -3, -2\}. \end{aligned}$$

Câu 62. (Sở Phú Thọ 2023) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$. Biết hàm số $y = f'(5-2x)$ có đồ thị là một Parabol (P) như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f(2x^2 + 2x + m)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

Lời giải

Từ đồ thị ta xác định được $y = f'(5 - 2x) = 3x^2 - 12x + 6$.

Đặt $5 - 2x = t \Rightarrow x = \frac{5-t}{2}$. Khi đó:

$$3x^2 - 12x + 6 = \frac{3}{4}(5-t)^2 - 6(5-t) + 6 = \frac{3}{4}t^2 - \frac{3}{2}t - \frac{21}{4} = f'(t).$$

$$f'(t) < 0 \Leftrightarrow 1 - 2\sqrt{2} < t < 1 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 1 - 2\sqrt{2} < 5 - 2x < 1 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 2 - \sqrt{2} < x < 2 + \sqrt{2}.$$

Hàm số $y = g(x) = f(2x^2 + 2x + m)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

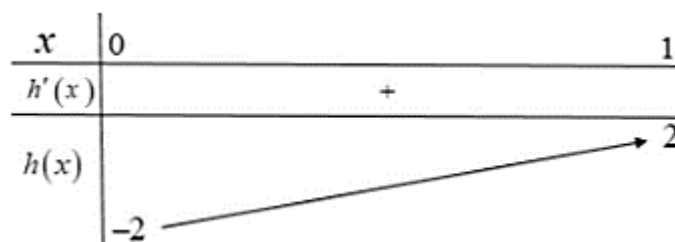
$$\Rightarrow g'(x) = (4x+2)f'(2x^2 + 2x + m) < 0, \forall x \in (0;1) \Leftrightarrow f'(2x^2 + 2x + m) < 0, \forall x \in (0;1)$$

(do $4x+2 > 0, \forall x \in (0;1)$)

$$\Leftrightarrow 2 - \sqrt{2} < 2x^2 + 2x + m < 2 + \sqrt{2}, \forall x \in (0;1) \Leftrightarrow -m - \sqrt{2} < 2x^2 + 2x - 2 < -m + \sqrt{2}, \forall x \in (0;1).$$

$$\text{Đặt } h(x) = 2x^2 + 2x - 2 \Rightarrow h'(x) = 4x + 2 > 0, \forall x \in (0;1).$$

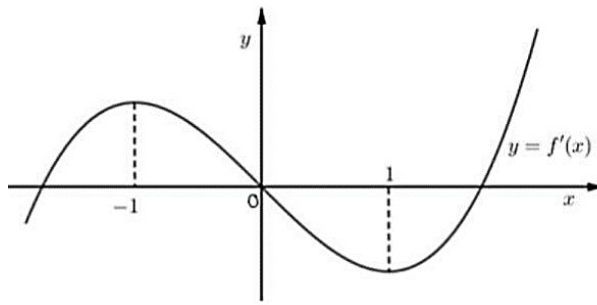
BBT:



$$\text{Điều kiện bài toán } \Leftrightarrow -m - \sqrt{2} < 0 < 1 < -m + \sqrt{2} \Leftrightarrow -\sqrt{2} < m < \sqrt{2} - 1 - \frac{m \in \mathbb{Z}}{\longrightarrow} m \in \{-1; 0\}.$$

Vậy có 2 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Câu 63. (Sở Hải Phòng 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(1) = 2$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị là đường cong như hình dưới đây.



Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $y = 4f(\sin x) + \cos 2x - m$ nghịch biến trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$?

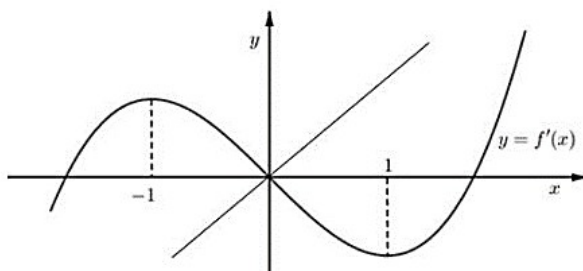
Lời giải

Xét hàm số $y = 4f(\sin x) + \cos 2x - m$

Có $y' = \cos x [4f'(\sin x) - 4 \sin x]$

Ta thấy, $\cos x > 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ và $y = x$ vẽ trên cùng hệ trục tọa độ như sau:



Từ đồ thị ta có $f'(x) < x, \forall x \in (0; 1) \Rightarrow f'(\sin x) < \sin x, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Suy ra $y' < 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

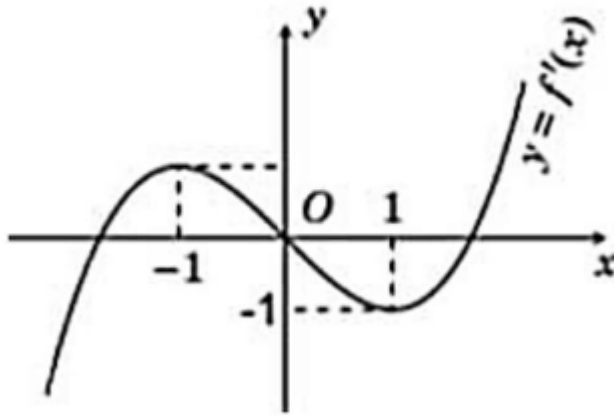
Ta có bảng biến thiên

x	0	$\frac{\pi}{2}$
y'	-	
y	$4f(0) + 1 - m$	$4f(1) - 1 - m$

Dựa vào bảng biến thiên thì ycbt $\Leftrightarrow 4f(1) - 1 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 4f(1) - 1 = 7$.

Vì m là số nguyên dương nên $m \in \{1; 2; 3; \dots; 7\}$.

Câu 64. (Chuyên Quang Trung – Bình Phước 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}, f(0) = 3$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên m để hàm số $g(x) = |2f(x) + x^2 - 2mx + 2m|$ đồng biến trên $(0;1)$?

Lời giải

Đặt $h(x) = 2f(x) + x^2 - 2mx + 2m \Rightarrow h'(x) = 2f'(x) + 2x - 2m$.

Hàm số $g(x) = |2f(x) + x^2 - 2mx + 2m|$ đồng biến trên $(0;1)$ khi và chỉ khi:

$$\text{TH1: } \begin{cases} h(0) = 6 + 2m \geq 0 \\ h'(x) \geq 0, \forall x \in (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -3 \\ m \leq f'(x) + x, \forall x \in (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -3 \\ m \leq -1 \end{cases}$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} h(0) = 6 + 2m \leq 0 \\ h'(x) \leq 0, \forall x \in (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -3 \\ m \geq f'(x) + x, \forall x \in (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -3 \\ m \geq 0 \text{ (L)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow m \in \{-3; -2; -1\}$$

Câu 65. (Sở Vũng Tàu 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2(x^2 + mx + 9)$ với mọi $x \in \mathbb{R}, m$ là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để hàm số $g(x) = f(3-x)$ đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$?

Lời giải

$$\text{TXĐ: } x \in (3; +\infty)$$

$$g'(x) = -f'(3-x)$$

Để hàm $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$ thì $g'(x) \geq 0, \forall x \in (3; +\infty)$

$$\Leftrightarrow -f'(3-x) \geq 0 \quad \forall x \in (3; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow f'(3-x) \leq 0 \quad \forall x \in (3; +\infty) \quad (*)$$

Đặt $t = 3-x \quad t \in (-\infty; 0)$ thì $(*) \Leftrightarrow f'(t) \leq 0 \quad \forall t < 0$

$$\Leftrightarrow f'(t) = t(t-1)^2(t^2 + mt + 9) \leq 0, \quad \forall t < 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 + mt + 9 \geq 0 \quad \forall t < 0$$

$$\Leftrightarrow mt \geq -9 - t^2 \quad \forall t < 0$$

$$\Leftrightarrow m \leq -\frac{9}{t} - t = h(t) \quad \forall t < 0$$

Xét hàm số $h(t) = -\frac{9}{t} - t$

$$h'(t) = \frac{9}{t^2} - 1$$

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{9}{t^2} - 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3(L) \\ t = -3(N) \end{cases}$$

BBT:

t	$-\infty$	-3	0
$h'(t)$	$-$	0	$+$
$h(t)$	$+\infty$	6	$+\infty$

Dựa vào BBT: thì $m \leq \min h(t) = 6$. Vậy $m = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.