HSG9 Tỉnh Bắc Giang 23 24

1. Trắc nghiệm (6 điểm)

Câu 1: Biết $(x_0;y_0)$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}2\sqrt{x+y}+3\sqrt{4x-3y}=13\\7\sqrt{x+y}-4\sqrt{4x-3y}=2\end{cases}$.Giá trị của x_0+3y_0 bằng

A. 6.

B. 1

C.3.

D. 10.

Câu 2: Cho điểm M$(x_0;y_0)$ (với $x_0 < 0$) thuộc đường thẳng y = x + 3 thỏa mãn ${x_0}^2+{y_0}^2$ = 17 Giá trị của biểu thức ${x_0}^2+x_0y_0$) , bằng

A.5.

B. 20.

C.0.

D. 4.

Câu 3: Cho tam giác ABC vuông tại A có AC = 7 . Biết độ dài các đường trung tuyến kẻ từ đỉnh B,C của tam giác ABC bằng nhau. Tính chu vi của tam giác ABC.

A. $14 + 7\sqrt{2}$

B $14+\sqrt{2}$

C 21

D $21+7\sqrt{2}$

Câu 4: Khi hệ phương trình $\begin{cases}mx-y=2m^2\\2x+y=5m\end{cases}$(với m là tham số) có nghiệm duy nhất là $x_0;y_0$.Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $x_0+{y_0}^2$là

A. -9

B 3

C -3

D.-6.

Câu 5: Cho $\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{101}+\sqrt{100}}=a\sqrt{b}-c$ với a,b,c là các số tự nhiên và b là số nguyên tố. Giá trị của a+b+c

A. 100.

B. 101.

C. 104.

D. 103.

Câu 6: Nghiệm x của phương trình $\frac{x}{1}+\frac{x}{1+2}+\frac{x}{1+2+3}+\ldots+\frac{x}{1+2+3+\ldots+2022}=\frac{8088}{2023}$ là

A. x= $\frac{1}{4}$

B.x=$\frac{1}{2}$

C.x=2

D. x=3

Câu 7: Gọi A, B là các số thực sao cho $\frac{2x}{(x-1)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-3}, \forall x\neq 1 \, và \, x\neq 3$. Giá trị của A+2B bằng

A -3

B 3

C 5

D 1

.Câu 8: Cho đường tròn tâm O, có đường kính 10cm và hai điểm AB thuộc đường tròn (O) sao cho độ dài cung nhỏ AB bằng $\frac{1}{6}$ chu vi đường tròn (O). Tính khoảng cách từ 0 đến dây cung AB.

A $\frac{5\sqrt{3}}{2}cm$

B. $4\sqrt{3}$ cm

C $3\sqrt{3}$ cm

D. $5\sqrt{3}$cm

Câu 9: Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác đều ABC. Gọi M là điểm thuộc cung nhỏ BC của đường tròn (O). Biết MA = 6cm, MB = 4cm. Độ dải đoạn MC bằng

A. MC = 10cm

B. MC = 2cm

C MC=3cm

D. MC=5cm.

Câu 10: Số nghiệm của phương trình $(x^2-8x+1)(|x-2|-5)=0$ là

A.3.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

Câu 11 Biết đường thẳng y = 3x + m cắt trục hoành tại điểm A, cắt trục tung tại điểm B. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để diện tích tam giác OAB bằng 6 (O là gốc tọa độ) là:

A. (6)

B. (-6;6).

C. (-36:36).

D. (-6).

Câu 12: Có tất cả bao nhiêu số nguyên tố p sao cho các số p + 2 và p+4 đều là số nguyên tố ?

A. 1

B. 4

C.3.

D. 2.

Câu 13: Cho x,y là các số thực thay đổi. Tìm tất cả các số thực m để giá trị nhỏ nhất của F=$[(9-m)x-y-m]^2+(mx-2y+3)^2$)đạt giá trị lớn nhất.

A.2.

B. 6.

C.1.

D. 0

Câu 14: Cho biểu thức f(x) = $(x^3+12x-6)^{2022}$Biết a = $\sqrt[3]{4+\sqrt{80}}-\sqrt[3]{\sqrt{80}-4}$,giá trị của f(a) là mộtsố tự nhiên có chữ số tận cùng là

A.0.
B.1
C.4.
D. 6.
Câu 15: Cho đường tròn tâm O, bán kính R = 8cm tiếp xúc ngoài với đường tròn tâm I, bánkính r = 2cm . Đường thẳng tiếp xúc với đường tròn (O) và (I) ở trên lần lượt tại hai điểm phân biệt A, B. Tính độ dài đoạn AB.
A. AB = 4cm .
B. AB = 5cm
C. AB = 6cm
D. AB = 8cm .
Câu 16: Cho tam giác ABC có góc $\widehat{BAC}=40°$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Tính số đo góc BIC.
A. $\widehat{BIC}=135°$
B $\widehat{BIC}=90°$
C $\widehat{BIC}=120°$
D $\widehat{BIC}=110°$
Câu 17 Cho tam giác nhọn ABC, có BK(K ϵAC),CE(EϵAB) là các đường cao. Đường tròn đường kính AB cắt đoạn CE tại P, đường tròn đường kính AC cắt đoạn BK tại Q. Biết $\widehat{PAQ}=60°$ và AP=5cm. Tính độ dài đoạn thẳng PQ
A PQ=7,5cm
B PQ=2,5cm
C PQ= 5 cm
D PQ=10cm
Câu 18: Cho đường thẳng (d): y = 2x - m parabol (P): y = x^2.Tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt là
A. m > 1
B. m ≥1
C. m ≤1
D. m < 1
Câu 19: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để tích các hệ số góc của hai đường thẳng y = (m - 1) x + 2021 và y = mx + 2022 (với m#1 và m≠0) bằng 6. Tính tổng các phần tử của S.
A.-6.
B. 6.
C. 1
D. -1.
Câu 20: Biết m_0, là giá trị của tham số m để hệ phương trình $\begin{cases} mx+y=1 \\ x+my=2m \end{cases}$ vô nghiệm. Khi đó giá trị của -3m_0+1 bằng
A. -1
B. 4
C.1.
D. -2
II. Tự luận (14 điểm)
Câu 1. (5,5 điểm)

1. Cho biểu thức P = $\left(\frac{\sqrt{x}}{4}-\frac{1}{4\sqrt{x}}\right)^2\left(\frac{x+\sqrt{x}-2}{x+3\sqrt{x}+2}-\frac{x+3\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}-2}\right)$ x > 0 và x + 1 .

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm các giá trị của x để $4P+3\sqrt{x}=\frac{19}{3}$

2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình (x - 3)[$x^2+2(m+1)x-m^2$] = 0 có 3 nghiệm phân biệt $x_1.x_2.x_3$, thỏa mãn ${x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2$= 91 .

Câu 2. (3,5 điểm)

1. Giải phương trình (2x^2- 21x + 55)($\sqrt{3x-8}-\sqrt{x+1}$ = 5(x - 5) .

2. Cho x, y là các số nguyên khác -1 thỏa mãn $\frac{x^4-1}{y+1}+\frac{y^4-1}{x+1}$là một số nguyên. Chứng minh rằng $x^4y^{12}-1$ chia hết cho y + 1 .

Câu 3. (4,0 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A (AB < AC) có đường cao AH (H$\in$ BC). Đường tròn tâm A, bán kính A H(kí hiệu là (A)) cắt đường thẳng AH tại điểm thứ hai là E (E không trùng với H) và cắt đoạn thẳng AB tại D. Qua điểm B kẻ tiếp tuyến với đường tròn (A) tại F (F không trùng với H), tiếp tuyến này cắt tia CA tại điểm G. Trên cung nhỏ DH của đường tròn(A) lấy điểm M (M không trùng với H và D), tiếp tuyến với đường tròn (A) tại M cắt các đường thẳng BC, BG lần lượt tại P và Q. Tia BM cắt đường tròn (A) tại N (N không trùng với M).

1. Gọi I là hình chiếu vuông góc của điểm H lên đường thẳng AB. Chứng minh bốn điểmA, I, M, N cùng thuộc một đường tròn và tia IH là tia phân giác của góc $\widehat{MIN}$

2. Gọi K, L lần lượt là giao điểm của đường thẳng AB với các đường thẳng E,M,E,N. Chứng minh đường thẳng HL song song với đường thẳng EK và GQ.CP=GF.BC.

Câu 4. (10 điểm)

Cho các số dương a, b, c thay đổi thỏa mãn điều kiện ab+bc+ca ≤3abc. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

P = $\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}-\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2a+2b}}+\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2b+2c}}+\sqrt{\frac{c^2+a^2}{2c+2a}}\right)$

--HẾT--

HƯỚNG DẪN GIẢI

I Trắc nghiệm

Câu 1: Biết $(x_0;y_0)$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}2\sqrt{x+y}+3\sqrt{4x-3y}=13\\7\sqrt{x+y}-4\sqrt{4x-3y}=2\end{cases}$. Giá trị của x_0+3y_0 bằng

A. 6.
B. 1
C.3.
D. 10.

Câu 2: Cho điểm M$(x_0;y_0)$ (với $x_0<0$) thuộc đường thẳng y = x + 3 thỏa mãn ${x_0}^2+{y_0}^2=17$ Giá trị của biểu thức ${x_0}^2+x_0y_0)$, bằng

A.5.
B. 20.
C.0.
D. 4.

Câu 3: Cho tam giác ABC vuông tại A có AC = 7 . Biết độ dài các đường trung tuyến kẻ từ đỉnh B,C của tam giác ABC bằng nhau. Tính chu vi của tam giác ABC.

A. $14+7\sqrt{2}$
B $14+\sqrt{2}$
C 21
D $21+7\sqrt{2}$

Câu 4: Khi hệ phương trình $\begin{cases}mx-y=2m^2\\2x+y=5m\end{cases}$ (với m là tham số) có nghiệm duy nhất là $x_0;y_0$.Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $x_0+{y_0}^2$là

A. -9
B 3
C -3
D.-6.

Câu 5: Cho $\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{101}+\sqrt{100}}=a\sqrt{b}-c$ với a,b,c là các số tự nhiên và b là số nguyên tố. Giá trị của a+b+c

A. 100.
B. 101.
C. 104.
D. 103.

Câu 6: Nghiệm x của phương trình $\frac{x}{1}+\frac{x}{1+2}+\frac{x}{1+2+3}+\ldots+\frac{x}{1+2+3+\ldots+2022}=\frac{8088}{2023}$ là

A. x= $\frac{1}{4}$
B.x=$\frac{1}{2}$
C.x=2
D. x=3

Câu 7: Gọi A, B là các số thực sao cho $\frac{2x}{(x-1)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-3}, \forall x\neq 1 \text{ và } x\neq 3$. Giá trị của

A+2B bằng
A -3
B 3
C 5
D 1
.Câu 8: Cho đường tròn tâm O, có đường kính 10cm và hai điểm AB thuộc đường tròn (O) sao cho độ dài cung nhỏ AB bằng $\frac{1}{6}$ chu vi đường tròn (O). Tính khoảng cách từ 0 đến dây cung AB.
A $\frac{5\sqrt{3}}{2}cm$
B. $4\sqrt{3}$ cm
C $3\sqrt{3}$ cm
D. $5\sqrt{3}$cm
Câu 9: Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác đều ABC. Gọi M là điểm thuộc cung nhỏ BC của đường tròn (O). Biết MA = 6cm, MB = 4cm. Độ dải đoạn MC bằng
.
A. MC = 10cm
B. MC = 2cm
C MC=3cm
D. MC=5cm.
Câu 10: Số nghiệm của phương trình $(x^2-8x+1)(|x-2|-5)=0$ là
A.3.
B. 1.
C. 2.
D. 4.
Câu 11 Biết đường thẳng y = 3x + m cắt trục hoành tại điểm A, cắt trục tung tại điểm B. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để diện tích tam giác OAB bằng 6 (O là gốc tọa độ) là:
A. (6)
B. (-6;6).
C. (-36:36).
D. (-6).
Câu 12: Có tất cả bao nhiêu số nguyên tố p sao cho các số p + 2 và p+4 đều là số nguyên tố ?
A. 1
B. 4
C.3.
D. 2.
Câu 13: Cho x,y là các số thực thay đổi. Tìm tất cả các số thực m để giá trị nhỏ nhất của F=$[(9-m)x-y-m]^2+(mx-2y+3)^2$)đạt giá trị lớn nhất.
A.2.
B. 6.
C.1.
D. 0
Câu 14: Cho biểu thức f(x) = $(x^3+12x-6)^{2022}$Biết a = $\sqrt[3]{4+\sqrt{80}}-\sqrt[3]{\sqrt{80}-4}$,giá trị của f(a) là mộtsố tự nhiên có chữ số tận cùng là
A.0.

B.1
C.4.
D. 6.
Câu 15: Cho đường tròn tâm O, bán kính R = 8cm tiếp xúc ngoài với đường tròn tâm I, bánkính r = 2cm . Đường thẳng tiếp xúc với đường tròn (O) và (I) ở trên lần lượt tại hai điểm phân biệt A, B. Tính độ dài đoạn AB.
A. AB = 4cm .
B. AB = 5cm
C. AB = 6cm
D. AB = 8cm .
Câu 16: Cho tam giác ABC có góc $\widehat{BAC}=40°$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Tính số đo góc BIC.
A. $\widehat{BIC}=135°$
B $\widehat{BIC}=90°$
C $\widehat{BIC}=120°$
D $\widehat{BIC}=110°$
Câu 17 Cho tam giác nhọn ABC, có BK(K ϵAC),CE(EϵAB) là các đường cao. Đường tròn đường kính AB cắt đoạn CE tại P, đường tròn đường kính AC cắt đoạn BK tại Q. Biết $\widehat{PAQ}=60°$ và AP=5cm. Tính độ dài đoạn thẳng PQ
A PQ=7,5cm
B PQ=2,5cm
C PQ= 5 cm
D PQ=10cm
Câu 18: Cho đường thẳng (d): y = 2x - m parabol (P): y = x^2.Tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt là
A. m > 1
B. m ≥1
C. m ≤1
D. m < 1
Câu 19: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để tích các hệ số góc của hai đường thẳng y = (m - 1) x + 2021 và y = mx + 2022 (với m#1 và m≠0) bằng 6. Tính tổng các phần tử của S.
A.-6.
B. 6.
C. 1
D. -1.
Câu 20: Biết m_0, là giá trị của tham số m để hệ phương trình $\begin{cases} mx+y=1 \\ x+my=2m \end{cases}$ vô nghiệm. Khi đó giá trị của -3m_0+1 bằng
A. -1
B. 4
C.1.
D. -2
II Tự luận
Câu 1. (5,5 điểm)

1. Cho biểu thức P = $\left(\frac{\sqrt{x}}{4}-\frac{1}{4\sqrt{x}}\right)^2\left(\frac{x+\sqrt{x}-2}{x+3\sqrt{x}+2}-\frac{x+3\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}-2}\right)$ x > 0 và x + 1 .

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm các giá trị của x để $4P+3\sqrt{x}=\frac{19}{3}$

2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình (x - 3)[$x^2+2(m+1)x-m^2$] = 0 có 3 nghiệm phân biệt $x_1.x_2.x_3$, thỏa mãn ${x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2$= 91 .

Lời giải

1)

a) với x>0 và x≠1 ta có

P = $\left(\frac{\sqrt{x}}{4}-\frac{1}{4\sqrt{x}}\right)^2\left(\frac{x+\sqrt{x}-2}{x+3\sqrt{x}+2}-\frac{x+3\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}-2}\right)$

P=$\left(\frac{x-1}{4\sqrt{x}}\right)^2.\left[\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)}-\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}\right]$

P=$\left(\frac{x-1}{4\sqrt{x}}\right)^2.\left[\frac{(\sqrt{x}-1)^2(\sqrt{x}+2)}{(x-1)(\sqrt{x}+2)}-\frac{(\sqrt{x}+1)^2(\sqrt{x}+2)}{(x-1)(\sqrt{x}+2)}\right]$

P=$\left(\frac{x-1}{4\sqrt{x}}\right)^2.\frac{(\sqrt{x}+2)\left[(\sqrt{x}-1)^2-(\sqrt{x}+1)^2\right]}{(x-1)(\sqrt{x}+2)}$

P=$\frac{x-1}{(4\sqrt{x})^2}.(-4\sqrt{x})$

P=$\frac{1-x}{4\sqrt{x}}$

Vậy với x>0 và x≠1 thì P =$\frac{1-x}{4\sqrt{x}}$

b) với x>0 và x ≠1 ta có $4P+3\sqrt{x}=\frac{19}{3}$⇔$4.\frac{1-x}{4\sqrt{x}}+3\sqrt{x}=\frac{19}{3}$⇔3-3x+9x=19$\sqrt{x}$

⇔ 6x-19$\sqrt{x}$+3=0⇔ $(6\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-3)=0$⇔$\begin{cases}6\sqrt{x}-1=0\\ \sqrt{x}-3=0\end{cases}$⇔$\begin{cases}x=\frac{1}{36}\\ x=9\end{cases}$ (thỏa mãn Đk)

Vậy x=$\frac{1}{36}$;x=9 là giá trị cần tìm

2) ta có (x - 3)[$x^2+2(m+1)x-m^2$]=0 ⇔$\begin{cases}x-3=0\\ x^2+2(m+1)x-m^2\end{cases}$⇔$\begin{cases}x=3\\ x^2+2(m+1)x-m^2=0\end{cases}$

Phương trình (x - 3)[$x^2+2(m+1)x-m^2$]=0 luôn có một nghiệm $x_3=3$. Để phương trình (x - 3)[$x^2+2(m+1)x-m^2$]=0 có ba nghiệm phân biệt thì phương trình $x^2+2(m+1)x-m^2=0$ có hai nghiệm x_1,x_2 phân biệt khác 3

Tức là $\begin{cases}\Delta'>0\\ 3^2+6.(m+1)-m^2\neq 0\end{cases}$⇔$\begin{cases}(m+1)^2+m^2>0\\ m^2-6m-15\neq 0\end{cases}$=>m≠3±2$\sqrt{6}$

Với mọi m phương trình

$x^2+2(m+1)x-m^2=0$ luôn có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2

Theo hệ thức vi ét ta có $\begin{cases} x_1+x_2=-2m-2 \\ x_1x_2=-m^2 \end{cases} (1)$

Ta có $x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2=91 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1+x_2+x_3{}^2=91$ (2)

Thay (1) và $x_3=3$ vào (2) ta được $(-2m-2)^2-2m^2+3^2=91$

$\Leftrightarrow 4(4m^2+2m+1)+2m^2+9=91 \Leftrightarrow 6m^2+8m-78=0 \Leftrightarrow 3m^2+4m-39=0$

$\Leftrightarrow$(3m+13)(m-3)=0$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3m+13 \\ m-3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} m=\dfrac{-13}{3} \\ m=3 \end{array} \right.$ (thỏa mãn đk (*))

Vậy $m=\dfrac{-13}{3}$; m=3 thỏa mãn bài

Câu 2. (3,5 điểm)

1. Giải phương trình ($2x^2$- 21x + 55)($\sqrt{3x-8}-\sqrt{x+1}$ = 5(x - 5) .

2. Cho x, y là các số nguyên khác -1 thỏa mãn $\dfrac{x^4-1}{y+1}+\dfrac{y^4-1}{x+1}$ là một số nguyên. Chứng minh rằng $x^4y^{12}-1$ chia hết cho y + 1 .

a) ĐKXĐ x $\geq \dfrac{8}{3}$

($2x^2$- 21x + 55)($\sqrt{3x-8}-\sqrt{x+1}$ = 5(x - 5)

$\Leftrightarrow$(x-5)(2x-11)($\sqrt{3x-8}-\sqrt{x+1}$)- 5(x - 5)=0

(x - 5)$\left[(2x-11)(\sqrt{3x-8}-\sqrt{x+1})-5\right]=0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=5 \\ (2x-11)(\sqrt{3x-8}-\sqrt{x+1})-5=0 (*) \end{array} \right.$

Giải phương trình(*) ta có

(*) $\Leftrightarrow \dfrac{(2x-11)(3x-8-x-1)}{(\sqrt{3x-8}-\sqrt{x+1})}=5 \Leftrightarrow$(2x-11)(2x-9)=5$(\sqrt{3x-8}-\sqrt{x+1})$

$\Leftrightarrow 4x^2-40x+99=5\sqrt{3x-8}+5\sqrt{x+1}$

$\Leftrightarrow 4x^2-44x+96=5\sqrt{3x-8}-(3x+4)+5\sqrt{x+1}-(x+7)$

$\Leftrightarrow$4(x-3)(x-8)=$\dfrac{-9(x-8)(x-3)}{5\sqrt{3x-8}-(3x+4)}+\dfrac{-(x-8)(x-3)}{5\sqrt{x+1}+(x+7)}$

$\Leftrightarrow$(x-3)(x-8)(4+$\dfrac{9}{5\sqrt{3x-8}-(3x-4)}+\dfrac{1}{5\sqrt{x+1}+(x+7)}$)$=0(*¿)$

Theo ĐKXĐ có x$\geq \dfrac{8}{3}=¿\,4+\dfrac{9}{5\sqrt{3x-8}-(3x-4)}+\dfrac{1}{5\sqrt{x+1}+(x+7)}>0$

Nên (**) $\Leftrightarrow$ (x-3)(x-8)=0$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=3 \\ x=8 \end{array} \right. (TM\ ĐKXD)$

Vậy tập nghiệm của phương trình là S $=\{3;5;8\}$

b) Đặt $\dfrac{x^4-1}{y+1}=\dfrac{a}{b};\dfrac{y^4-1}{x+1}=\dfrac{c}{d}$ với $(a,c\in Z;b,d\epsilon N*¿(a;b)=1l(c;d)=1$

ta có $\dfrac{a}{b}.\dfrac{c}{d}=\dfrac{x^4-1}{y+1}.\dfrac{y^4-1}{x+1}$=(x-1)($x^2$+1)$(y-1)(y^2+1)\in X(vì\,x,y\in Z)$

theo bài ta có $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}$ ϵZ=>$\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}\right)^2=\left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{c}{d}\right)^2+4.\dfrac{a}{b}.\dfrac{c}{d}\in Z=¿\left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{c}{d}\right)^2\in Z\left(vì\,4.\dfrac{a}{b}.\dfrac{c}{d}\in Z\right)$

=>$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\in Z=¿\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\in Z=¿\frac{2a}{b}\in Z$

=>2a⋮b mà (a,b)=1 nên 2⋮b=>b∈$\{1;2\}$

Nếu b=2=>a là số lẻ (vì (a;b)=1) ta có

$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a}{2}+\frac{c}{d}=\frac{ad+2c}{2d}\in Z=¿ad+2c\vdots 2d=¿ad+2c\vdots 2=ad\vdots 2=¿d\vdots 2$

c là số lẻ (vì (c,d)=1)=>ac⋮bd vô lí vì $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\in$Z

vậy b=1=> $\frac{x^4-1}{y+1}=\frac{a}{b}=a\in Z=¿x^4-1\vdots y+1(1)$

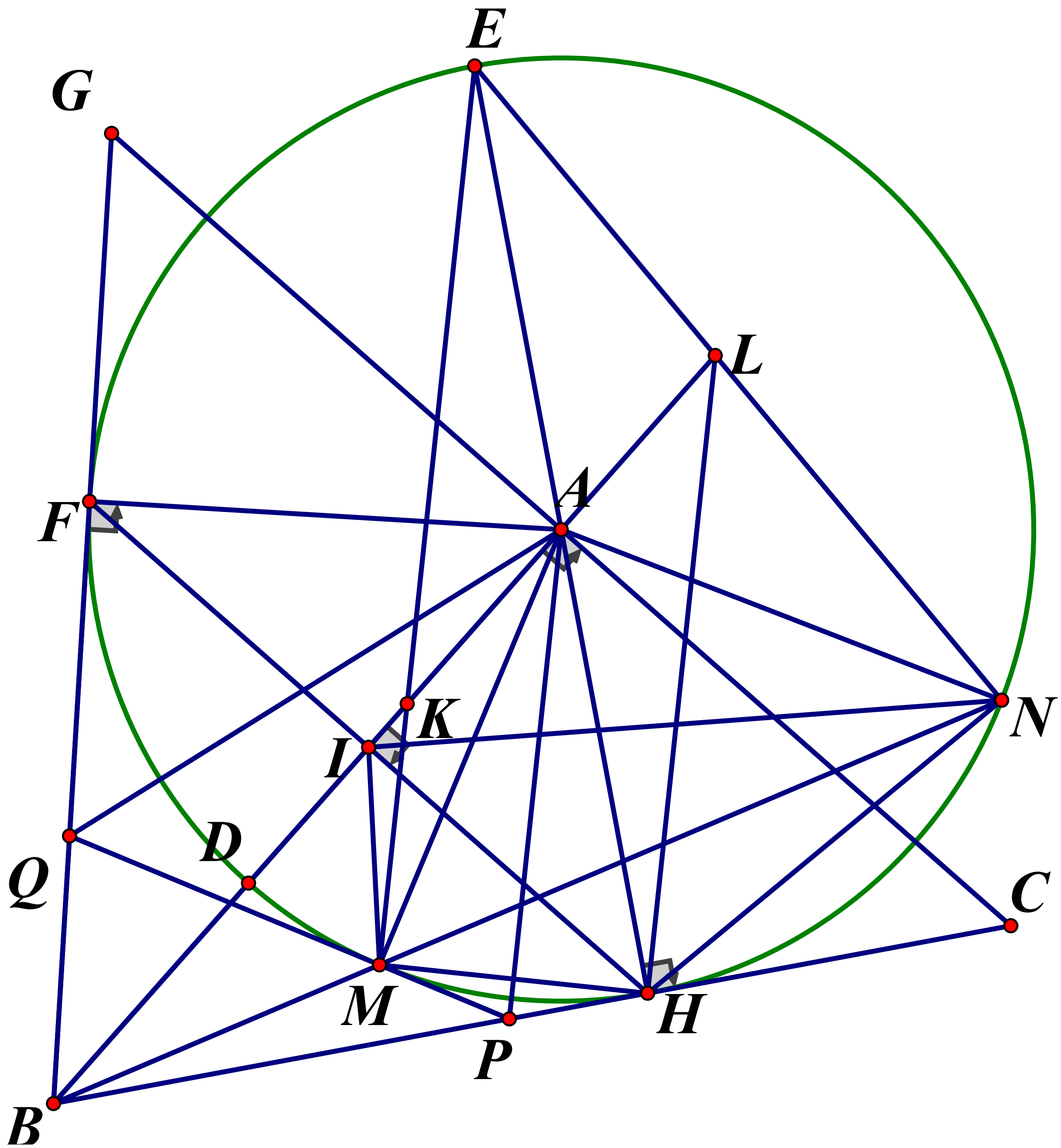
ta có $x^4y^{12}-1-(x^4-1)=x^4y^{12}-x^4=x^4(y^{12}-1)=x^4(y^6+1)(y^3-1)(y+1)(y^2-y+1)\vdots y+1(2)$

từ (1) và (2) suy ra $x^4y^{12}-1$ chia hết cho y+1

Câu 3. (4,0 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A (AB < AC) có đường cao AH (H∈ BC). Đường tròn tâm A, bán kính A H(kí hiệu là (A)) cắt đường thẳng AH tại điểm thứ hai là E (E không trùng với H) và cắt đoạn thẳng AB tại D. Qua điểm B kẻ tiếp tuyến với đường tròn (A) tại F (F không trùng với H), tiếp tuyến này cắt tia CA tại điểm G. Trên cung nhỏ DH của đường tròn(A) lấy điểm M (M không trùng với H và D), tiếp tuyến với đường tròn (A) tại M cắt các đường thẳng BC, BG lần lượt tại P và Q. Tia BM cắt đường tròn (A) tại N (N không trùng với M).

1. Gọi I là hình chiếu vuông góc của điểm H lên đường thẳng AB. Chứng minh bốn điểmA, I, M, N cùng thuộc một đường tròn và tia IH là tia phân giác của góc $\widehat{MIN}$

2. Gọi K, L lần lượt là giao điểm của đường thẳng AB với các đường thẳng E,M,E,N. Chứng minh đường thẳng HL song song với đường thẳng EK và GQ.CP=GF.BC.



a) áp dụng hệ thức lượng trong ΔAHB vuông tại H đường cao HI ta có: $BH^2=¿$BI.BA (1)

Xét ΔBMH và ΔBHN có

$\hat{B}$ chung

$\widehat{BHM}=\widehat{BNH}$ (cùng = $\frac{1}{2}$ sd$\widehat{MH}$)

→ΔBMH ~ ΔBHN (g-g)

=>$\frac{BM}{BH}=\frac{BH}{BN}=¿BH^2=BM.BN$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: BI.BA=BM.BN=> $\frac{BI}{BM}=\frac{BN}{BA}$

→ΔBIM-ΔBAN (c-g-c)=> $\widehat{BIM}=\widehat{BNA}$(2 góc tương ứng) (*)

→ Tứ giác AIMN là tứ giác nội tiếp.

¿> $\widehat{AIN}=\widehat{AMN}$ ¿

ΔAMN cân tại A nên $\widehat{AMN}=\widehat{BNA}$(***)

từ (*), (**) và (***) => $\widehat{BIM}=\widehat{AIN}$

mà $\widehat{BIM}+\widehat{MIH}=\widehat{AIN}+\widehat{NIH}$ (cùng =90°)

nên $\widehat{MIH}=\widehat{NIH}$

Vậy IH là tia phân giác của $\widehat{MIN}$

b) Ta có $\widehat{HNL}$=90° (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính EH)

=> $\widehat{HIL}+\widehat{HNL}=$ ¿90°+90° = 180° nên tứ giác HILN nội tiếp

=> $\widehat{HLN}=\widehat{HIN}$ (3)

$\widehat{HIN}=\frac{1}{2}\widehat{MIN}$(vì IH là tia phân giác của $\widehat{MIN}$) (4)

Tứ giác AIMN nội tiếp (c.m.t) => $\widehat{MIN}=\widehat{MAN}$ (5)

$\widehat{MEN}=\frac{1}{2}\widehat{MAN}$(cùng = $\frac{1}{2}$ sđ $\widehat{NHM}$ của đường tròn (A)) (6)

Từ (3), (4), (5), (6) => $\widehat{HLN}=\widehat{MEN}=$ ¿HL //EK

Vì BA vừa là đường phân giác vừa là đường cao của ΔBGC = ΔBGC cân tại B

=> $\widehat{BCG}=\widehat{BGC}$ (7).

Mặt khác $\widehat{BCG}=\widehat{HAB}=\frac{1}{2}\widehat{HAF}$(cùng phụ $\widehat{HBA}$)

mà $\widehat{HAB}=\frac{1}{2}\widehat{HAF}$ (T/c 2 tiếp tuyến cắt nhau) (8)

lại có $\frac{1}{2}\widehat{HAF}=\widehat{MAP}+\widehat{MAQ}=\widehat{PAQ}$(9)

từ (7), (8), (9)=> $\widehat{BCG}=\widehat{PAQ}$

Do đó $\widehat{CPA}$ = 180° - ($\widehat{BCG}+\widehat{CAP}$)=180°-($\widehat{PAQ}+\widehat{CAP}$) = $\widehat{GAQ}$

Xét ΔCPA∼ΔGAQ có

$\widehat{BCG}=\widehat{BGC}$ (c.mt)

$\widehat{CPA}=\widehat{GAQ}$ (c.mt)

=>ΔCPA∼ΔGAQ(g-g)=> $\frac{CP}{GA}=\frac{CA}{GQ}=$ ¿ $GQ.CP=GA.CA=GA^2$

Áp dụng hệ thức lượng trong Δ vuông ABG ta có:

GF.BG= $GA^2=$ ¿GQ.CP=GF.BC

Câu 4. (10 điểm)

Cho các số dương a, b, c thay đổi thỏa mãn điều kiện ab+bc+ca ≤3abc. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

P = $\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}-\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2a+2b}}+\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2b+2c}}+\sqrt{\frac{c^2+a^2}{2c+2a}}\right)$

Ta có ab+bc+ca≤3abc⇔ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le 3$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2a+2b}}+\sqrt{\frac{ab}{a+b}}\le\sqrt{(1+1)\left(\frac{a^2+b^2}{2(a+b)}+\frac{ab}{a+b}\right)}=\sqrt{a+b}\Leftrightarrow\sqrt{a+b}-\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2(a+b)}}\ge\sqrt{\frac{ab}{a+b}}\ (1)$$

$$\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2(b+c)}}+\sqrt{\frac{bc}{b+c}}\le\sqrt{(1+1)\left(\frac{b^2+c^2}{2(b+c)}+\frac{bc}{b+c}\right)}=\sqrt{b+c}\Leftrightarrow\sqrt{b+c}-\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2(b+c)}}\ge\sqrt{\frac{bc}{b+c}}\ (2)$$

$$\sqrt{\frac{c^2+a^2}{2(c+a)}}+\sqrt{\frac{ca}{c+a}}\le\sqrt{(1+1)\left(\frac{c^2+a^2}{2(c+a)}+\frac{ca}{c+a}\right)}=\sqrt{c+a}\Leftrightarrow\sqrt{c+a}-\sqrt{\frac{c^2+a^2}{2(c+a)}}\ge\sqrt{\frac{ca}{c+a}}\ (3)$$

Cộng vế với vế cua (1)(2) và (3) ta đước

P$\ge\sqrt{\frac{ab}{a+b}}+\sqrt{\frac{bc}{b+c}}+\sqrt{\frac{ca}{c+a}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}}}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}}}\ge\frac{(1+1+1)^2}{\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}+\sqrt{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}+\sqrt{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}}}=\frac{9}{\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}+\sqrt{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}+\sqrt{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}}}$$

$$\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}+\sqrt{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}+\sqrt{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}}\le\sqrt{(1+1+1)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)}=\sqrt{6.\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}\le3\sqrt{2}$$

(do $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le3$)

=>P>=$\frac{9}{3\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}a=b=c\\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3\end{cases}$⇔a=b=c=1

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ khi a=b=c=1