

**PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC**

**3**

❶. Giáo viên Soạn: Đỗ Công Lạng FB: Kẻ Ngốc Dương Trần

❷. Giáo viên phản biện :………………….…...…….. FB:………………………………….

Kiến thức, kĩ năng

* Mô tả các bước chứng minh tính đúng đắn của một mệnh đề toán học bằng phương pháp quy nạp toán học.
* Chứng minh tính đúng đắn của một mệnh đề toán học bằng phương pháp quy nạp toán học.
* Vận dụng phương pháp quy nạp để giải quyết một số vấn đề thực tiễn.

Thuật ngữ

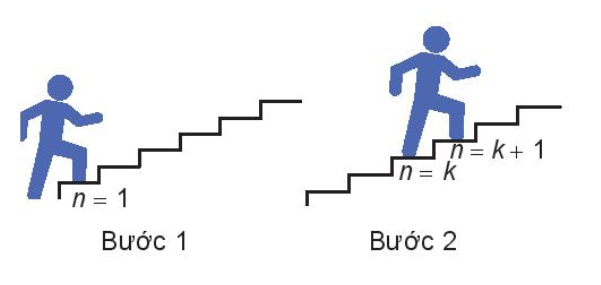
* Mệnh đề toán học
* Phương pháp quy nạp toán học

**1. PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC**

Trong toán học ta thường phải chứng minh những mệnh đề phụ thuộc vào số tự nhiên . Phương pháp quy nạp toán học là một trong những phương pháp rất hiệu quả để chứng minh những mệnh đề như vậy

**HĐ1: Hãy quan sát các đẳng thức sau:**

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

Có nhận xét gì về các số ở vế trái và ở vế phải của các đẳng thức trên? Từ đó hãy dự đoán công thức tính tổng của số lẻ đầu tiên .



Xét đa thức

1. Hãy tính: ,,,, và chứng tỏ rằng các kết quả nhận được đều là số nguyên tố.
2. Hãy đưa ra một dự đoán cho trong trường hợp tổng quát.

**HĐ 2:**

**Chú ý:**

Khẳng định là số nguyên tố với mọi số tự nhiên là một khẳng định sai. Mặc dù khẳng định này đúng với , nhưng nó lại sai khi . Thật vậy, với ta có là hợp số (vì nó chia hết cho ).

**Nhận xét:**

Để khẳng định một mệnh đề toán học phụ thuộc số tự nhiên là đúng, ta cần phải chứng minh dù đã kiểm nghiệm nó với bao nhiêu giá trị của đi nữa.

Để chứng minh tính đúng đắn của những mệnh đề phụ thuộc vào số tự nhiên ta không thể thử trực tiếp với mọi số tự nhiên . Tuy nhiên, ta có thể tiến hành như sau:

1. Trước hết ta kiểm tra rằng mệnh đề là đúng với .



2. Ta chứng minh rằng: từ giả thiết mệnh đề đúng với số tự nhiên , suy ra nó cũng đúng với

Như thế mệnh đề là đúng với mọi số tự nhiên .

Phương pháp lập luận trên đây gọi là *phương pháp quy nạp toán học* (thường gọi tắt là phương pháp quy nạp).

|  |
| --- |
| Chứng minh một mệnh đề toán học phụ thuộc đúng với , bằng **phương pháp quy nạp toán học**, gồm hai bước sau:  *Bước 1.* Kiểm tra rằng mệnh đề là đúng với .  *Bước 2.* Giả thiết mệnh đề đúng với số tự nhiên ( gọi là **giả thiết quy nạp**), chứng minh rằng mệnh đề đúng với . Kết luận. |



**Ví dụ 1.**

|  |
| --- |
| Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên , ta có: |

**Lời giải**

Ta chứng minh bằng quy nạp theo .

*Bước 1.* Với ta có .

Như vậy đúng cho trường hợp .

*Bước 2.* Giả sử đúng với thêm điều kiện , tức là ta có

Giả thiết quy nạp

Ta sẽ chứng minh rằng cũng đúng với thêm điều kiện , nghĩa là ta sẽ chứng minh

.

Thật vậy, ta có:

Theo giả thiết quy nạp

Vậy đúng với mọi số tự nhiên .

**Luyện tập 1.**

|  |
| --- |
| Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên , ta có:  . |

**Lời giải**

Bước 1: Với ta có: . Vậy đúng với .

Bước 2: Giả sử đẳng thức đúng với , tức là ta có .

Ta sẽ chứng minh đẳng thức đúng với , nghĩa là ta sẽ chứng minh

.

Thật vậy, ta có:

.

Vậy đẳng thức đúng với mọi số tự nhiên .

**Chú ý:**

Nếu phải chứng minh mệnh đề đúng với mọi số tự nhiên (là một số tự nhiên nào đó) thì

**Bước 1:** Kiểm tra mệnh đề là đúng với.

**Bước 2:** Giả thiết mệnh đề đúng với số tự nhiên và chứng minh mệnh đề đúng với . Kết luận.

**Ví dụ 2.**

|  |
| --- |
| Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên , ta có đẳng thức: |

**Lời giải**

Ta chứng minh bằng quy nạp theo .

* Với , ta có. Như vậy đúng với .
* Giả sử đúng với , tức là: .

Ta sẽ chứng minh rằng công thức trên cũng đúng với , nghĩa là ta sẽ chứng minh

.

Thật vậy, sử dụng giả thiết quy nạp, ta có

.

Vậy đúng với mọi số tự nhiên .

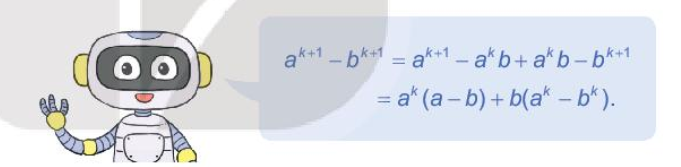
**Luyện tập 2.**

|  |
| --- |
| Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên , ta có đẳng thức  . |

**Lời giải**

* Với , ta có (đúng).
* Giả sử đẳng thức đúng với nghĩa là ta có:

Ta sẽ chứng minh đẳng thức đúng với , nghĩa là ta sẽ chứng minh:



Thật vậy, ta có

Vậy đẳng thức đúng với mọi số tự nhiên .

**2. MỘT SỐ ỨNG DỤNG KHÁC CỦA PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC**

Trong mục 1 ta đã sử dụng phương pháp quy nạp toán học để chứng minh một số đẳng thức phụ thuộc số tự nhiên . Dưới đây ta xét một số ứng dụng khác của phương pháp quy nạp.

**Ví dụ 3.**

|  |
| --- |
| Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên ,  luôn chia hết cho |

**Lời giải**

Ta chứng minh bằng quy nạp theo .

* Với ta có

Vậy đúng với .

* Giả sử đúng với thêm điều kiện , tức là , ta cần chứng minh đúng với .

Từ giả thiết quy nạp ta suy ra với là số tự nhiên nào đó.

Khi đó ta có

.

Vậy đúng với mọi số tự nhiên .

Vì trong hai số tự nhiên liên tiếp luôn có một số chẵn nên từ kết quả của Ví dụ 3suy ra: Tích của ba số tự nhiên liên tiếp luôn chia hết cho .

**Nhận xét:**



**PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC**

**3**

❶. Giáo viên Soạn: Dương Nga FB: Dương Nga

❷. Giáo viên phản biện :………………….…...……..FB:………………………………….

**Ví dụ 4.**

|  |
| --- |
| Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên , ta có |

**Lời giải**

Ta chứng minh bất đẳng thức bằng quy nạp theo , với .

* Với ta có .

Vậy đúng với .

* Giả sử đúng với , tức là ta có .

Ta cần chứng minh đúng với , tức là chứng minh .

Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có

do

Vậy bất đẳng thức đúng với mọi số tự nhiên .

**Ví dụ 5.**

|  |
| --- |
| Sử dụng phương pháp quy nạp toán học, chứng minh rằng tổng các góc trong một đa giác cạnh là . |

**Lời giải**

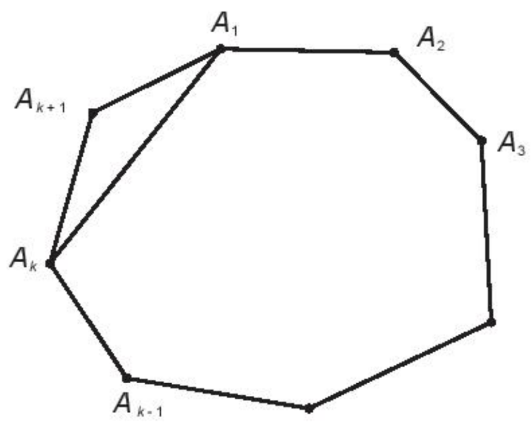
Ta chứng minh khẳng định trên bằng quy nạp theo , với .

* Với , ta có tổng ba góc của một tam giác bằng .

Vậy khẳng định đúng với .

* Giả sử khẳng định đúng với , ta chứng minh nó đúng với .

Thật vậy, xét đa giác cạnh , nối hai đỉnh và ta được đa giác cạnh . Theo giả thiết quy nạp, tổng các góc của đa giác cạnh này bằng .



Dễ thấy tổng các góc của đa giác bằng tổng các góc của đa giác cộng với tổng các góc của tam giác , tức là bằng

.

Vậy khẳng định đúng với mọi đa giác cạnh, .

***( Công thức lãi kép)***

**Vận dụng**

|  |
| --- |
| Lãi suất gửi tiết kiệm trong ngân hàng thường được tính theo thể thức *lãi kép theo định kì.* Theo thể thức này, nếu đến kì hạn người gửi không rút lãi ra thì tiền lãi được tính vào vốn của kì kế tiếp. Giả sử một người gửi số tiền với lãi suấ không đổi trong mỗi kì.   1. Tính tổng số tiền (cả vốn lẫn lãi) mà người đó nhận được sau kì thứ 1, sau kì thứ 2 và sau kì thứ 3. 2. Dự đoán công thức tính tổng số tiền (cả vốn lẫn lãi) mà người đó thu được sau kì. Hãy chứng minh công thức nhận được đó bằng quy nạp. |

**Lời giải**

1. Số tiền lãi sau kỳ thứ nhất là: suy ra

Tương tự ta có

1. Dự đoán

Ta chứng minh dự đoán trên bằng phương pháp quy nạp.

* Với suy ra (đúng).
* Giả thiết công thức đúng với , ta có , ta chứng minh công thức đúng với , nghĩa là

Ta có, cuối kỳ thứ số tiền gốc và lãi là , sau kỳ thứ số tiền gốc và lãi là:

Vậy công thức đúng với mọi số tự nhiên .

**BÀI TẬP**

**2.1.**

|  |
| --- |
| Sử dụng phương pháp quy nạp toán học, chứng minh các đẳng thức sau đúng với mọi số tự nhiên .  a) ;  b) . |

**Lời giải**

a) Chứng minh đẳng thức sau đúng với mọi số tự nhiên : .

Ta chứng minh bất đẳng thức bằng quy nạp theo , với .

* Với ta có .

Vậy đúng với .

* Giả sử đúng với , tức là ta có .

Ta cần chứng minh đúng với , tức là chứng minh

Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có

Vậy bất đẳng thức đúng với mọi số tự nhiên .

b) Chứng minh đẳng thức sau đúng với mọi số tự nhiên : .

Ta chứng minh bất đẳng thức bằng quy nạp theo , với .

* Với ta có .

Vậy đúng với .

* Giả sử đúng với , tức là ta có .

Ta cần chứng minh đúng với , tức là chứng minh

Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có

Vậy bất đẳng thức đúng với mọi số tự nhiên .

**2.2.**

|  |
| --- |
| Mỗi khẳng định sau là đúng hay sai? Nếu em nghĩ là nó đúng, hãy chứng minh nó. Nếu em nghĩ là nó sai, hãy đưa ra một phản ví dụ.  a) là số nguyên tố với mọi số tự nhiên ;  b) với mọi số tự nhiên . |

**Lời giải**

a) Khẳng định “ là số nguyên tố với mọi số tự nhiên ” là khẳng định sai.

Phản ví dụ: lấy thì không phải là số nguyên tố.

b) Khẳng định “” là khẳng định đúng với mọi số tự nhiên .

Ta chứng minh bất đẳng thức bằng quy nạp theo , với .

* Với ta có .

Vậy đúng với .

* Giả sử đúng với , tức là ta có .

Ta cần chứng minh đúng với , tức là chứng minh .

Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có

do

Vậy bất đẳng thức đúng với mọi số tự nhiên .

**2.3.**

|  |
| --- |
| Chứng minh rằng chia hết cho với mọi số tự nhiên . |

**Lời giải**

Ta chứng minh “ chia hết cho ” bằng quy nạp theo , với .

* Với ta có chia hết cho .

Vậy đúng với .

* Giả sử đúng với , tức là ta có “ chia hết cho ” .

Ta cần chứng minh đúng với , tức là chứng minh “ chia hết cho ” .

Thật vậy, theo giả thiết quy nạp suy ra , với là số tự nhiên nào đó.

Khi đó ta có:

chia hết cho .

Vậy bất đẳng thức đúng với mọi số tự nhiên .

**2.4.**

|  |
| --- |
| Chứng minh rằng là số lẻ với mọi số nguyên dương . |

**Lời giải**

Ta chứng minh “ là số lẻ ” bằng quy nạp theo , với .

* Với ta có là số lẻ.

Vậy đúng với .

* Giả sử đúng với , tức là ta có “ là số lẻ” .

Ta cần chứng minh đúng với , tức là chứng minh “ là số lẻ” .

Thật vậy, theo giả thiết quy nạp suy ra , với là số tự nhiên nào đó.

Khi đó ta có:

là số lẻ

Vậy bất đẳng thức đúng với mọi số tự nhiên .

**2.5.**

|  |
| --- |
| Chứng minh rằng nếu thì với mọi số tự nhiên . |

**Lời giải**

Ta chứng minh “ ” bằng quy nạp theo , với .

* Với ta có .

Vậy đúng với .

* Giả sử đúng với , tức là ta có “” .

Ta cần chứng minh đúng với , tức là chứng minh “” .

Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có

do

Vậy bất đẳng thức đúng với mọi số tự nhiên.

**2.6.**

|  |
| --- |
| Cho tổng .  a) Tính .  b) Dự đoán công thức tổng và chứng minh bằng quy nạp. |

**Lời giải**

a) , , .

b) Dự đoán công thức .

Ta chứng minh bằng quy nạp theo , với .

* Với ta có .

Vậy đúng với .

* Giả sử đúng với , tức là ta có .

Ta cần chứng minh đúng với , tức là chứng minh

Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có

Vậy bất đẳng thức đúng với mọi số tự nhiên .

**2.7.**

|  |
| --- |
| Sử dụng phương pháp quy nạp toán học, chứng minh rằng số đường chéo của một đa giác cạnh là . |

**Lời giải**

Ta chứng minh “số đường chéo của một đa giác cạnh là ” bằng quy nạp theo , với .

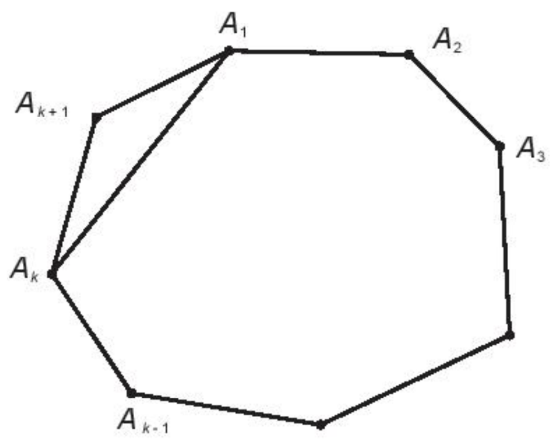
* Với ta có số đường chéo của một tứ giác bằng .

Vậy đúng với .

* Giả sử đúng với , tức là ta có “số đường chéo của một đa giác cạnh là ”.

Ta cần chứng minh đúng với , tức là chứng minh “số đường chéo của một đa giác cạnh là ”.

Xét một đa giác lồi cạnh.



Vẽ lại hình khác cho phù hợp hơn với lời giải

Nối và ta được đa giác cạnh là , theo giả thiết quy nạp đa giác có số đường chéo là . Nối với các đỉnh ta được thêm đường chéo đồng thời cũng là đường chéo.

Vậy số đường chéo của đa giác cạnh là: .

Vậy bất đẳng thức đúng với mọi số tự nhiên .

**2.8.**

|  |
| --- |
| Ta sẽ “lập luận” bằng quy nạp toán học để chỉ ra rằng: “*Mọi con mèo đều có cùng màu”.* Ta gọi với nguyên dương là mệnh đề sau: “*Mọi con mèo trong một đàn gồm con mèo đều có cùng màu”.*  *Bước 1.* Với thì mệnh đề là “*Mọi con mèo trong một đàn gồm con đều có cùng màu”.* Hiển nhiên mệnh đề này là đúng!  *Bước 2.* Giả sử đúng với một số nguyên dương nào đó. Xét một đàn mèo gồm con. Gọi chúng là . Bỏ con mèo ra khỏi đàn, ta nhận được một đàn mèo gồm con là . Theo giả thiết quy nạp, các con mèo có cùng màu. Bây giờ, thay vì bỏ con mèo , ta bỏ con mèo để có đàn mèo gồm con là . Vẫn theo giả thiết quy nạp thì các con mèo có cùng màu. Cuối cùng, đưa con mèo trở lại đàn để có đàn mèo ban đầu. Theo cac lập luận trên: Các con mèo có cùng màu và các con mèo có cùng màu. Từ đó suy ra tất cả các con mèo đều có cùng màu.  Vậy, theo nguyên lí quy nạp thì đúng với mọi số nguyên dương . Nói riêng, nếu gọi là số mèo hiện tại trên Trái Đất thì việc đúng cho thấy tất cả các con mèo (trên Trái Đất) đều có cùng màu!  Tất nhiên là ta có thể tìm được các con mèo khác màu nhua! Theo em thì “lập luận” trên đây sai ở chỗ nào? |

**Lời giải**

Lập luận trên sai ở chỗ: bỏ con mèo để có đàn mèo gồm con là .

|  |
| --- |
| **Em có biết?**   * Phương pháp lập luận bằng quy nạp không phải là một phát minh của một cá nhân tại một thời điểm cố định nào. Người ta cho rằng các nhà toán học Hy Lạp đã biết tới các nguyên lí quy nạp, nhưng không thật sự rõ ràng. * Lập luận bằng quy nạp lần đầu tiên xuất hiện một cách tường minh trong cuốn sách *Arithmeticorum Libri Duo* năm 1575 của nhà toán học và thiên văn học người Ý Francesco Maurolico (1494 – 1575). * Nhà toán học người Anh John Wallis (1616 – 1703) được coi là người đầu tiên sử dụng thuật ngữ *quy nạp*. |