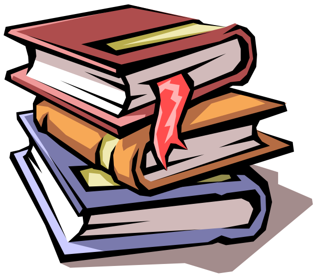
Tailieumontoan.com

Điện thoại (Zalo) 039.373.2038



CHUYÊN ĐỀ BẤT ĐẲNG THỨC

VÀ TÌM MIN - MAX

Tài liệu sưu tầm, ngày 31 tháng 3 năm 2021

CHUYÊN ĐỀ BẤT ĐẲNG THỨC – MIN MAX

DẠNG 1: DÙNG BẤT ĐẲNG THỨC CƠ BẢN VÀ BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG

Câu 1. Cho x, y, z thỏa $0 \le x \le y \le z \le 1$, $\quad 2y+z \le 2$, $\quad 3x+2y+z \le 3$.

Tìm giá trị lớn nhất của: $P=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Hướng dẫn

Ta có $2y^2+z^2=(2y+z)y+(z-y)z \le y+z=\dfrac{2y+z}{2}+\dfrac{z}{2} \le \dfrac{3}{2}$

$3x^2+2y^2+z^2=(3x+2y+z)x+(2y+z)(y-z)+(z-y)z \le 3x+2(y-x)+(z-y)$

$=x+y+z=\dfrac{3x+2y+z}{2}+\dfrac{2y+z}{6}+\dfrac{z}{2} \le \dfrac{11}{6}$.

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2=\dfrac{3x^2+2y^2+z^2}{3}+\dfrac{2y^2+z^2}{6}+\dfrac{z^2}{2} \le \dfrac{49}{36}$

Vậy $\text{Max } P=\dfrac{7}{6}$, khi $x=\dfrac{1}{3}; y=\dfrac{1}{2}; z=1$.

Câu 2. Giả sử x, y là hai số dương thỏa mãn điều kiện: $x+y=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$M=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2$$

Hướng dẫn

Ta có: $M=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{y}\right)^2$

$= x^2+\dfrac{1}{x^2}+2+y^2+\dfrac{1}{y^2}+2$

$= 4 + x^2 + y^2 + \dfrac{x^2+y^2}{x^2y^2}=4+\left(x^2+y^2\right)\left(1+\dfrac{1}{x^2y^2}\right)$

Vì x, y > 0 nên ta có thể viết:

$\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 \ge 0 <=> x+y \ge 2\sqrt{xy}$

Mà $x+y=1$ nên $1 \ge 2\sqrt{xy} <=> \dfrac{1}{\sqrt{xy}} \ge 2 <=> \dfrac{1}{x^2y^2} \ge 16 \quad (1)$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y=\dfrac{1}{2}$

Ngoài ra ta cũng có:

$(x-y)^2 \ge 0 \Leftrightarrow x^2+y^2 \ge 2xy \Leftrightarrow 2(x^2+y^2) \ge 2xy+x^2+y^2$

$\Leftrightarrow 2(x^2+y^2) \ge (x+y)^2 \Leftrightarrow 2(x^2+y^2) \ge 1$ (vì x + y = 1)

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}$ (2)

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y = \frac{1}{2}$

Từ (1) và (2) cho ta:

$$M = 4 + (x^2 + y^2)(1 + \frac{1}{x^2y^2}) \geq 4 + \frac{1}{2}(1+16) = \frac{25}{2}$$

Do đó: $M \geq \frac{25}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi đồng thời ở (1) và (2) cùng xảy ra dấu "=" nghĩa là khi $x = y = \frac{1}{2}$

Vậy GTNN của $M = \frac{25}{2}$ khi và chỉ khi $x = y = \frac{1}{2}$.

Câu 3. Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $\left(a^4+b^4\right)\left(b^4+c^4\right)\left(c^4+a^4\right)=8$. Chứng minh rằng

$$\left(a^2-ab+b^2\right)\left(b^2-bc+c^2\right)\left(c^2-ca+a^2\right)\geq 1.$$

Hướng dẫn

+ Ta chứng minh kết quả $2\left(a^2-ab+b^2\right)^2 \geq a^4+b^4$ (1).

Thật vậy, $(1) \Leftrightarrow 2\left(a^4+b^4+a^2b^2+2a^2b^2-2ab\left(a^2+b^2\right)\right) \geq a^4+b^4 \Leftrightarrow \left(a^2+b^2-2ab\right)^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (a-b)^4 \geq 0$, bất đẳng thức đúng, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

+ Tương tự có (2): $2\left(b^2-bc+c^2\right)^2 \geq b^4+c^4$, (3): $2\left(c^2-ca+a^2\right)^2 \geq c^4+a^4$.

+ Thấy các vế của (1), (2), (3) đều không âm, nhân theo vế các bất đẳng thức này ta được

$$8\left(a^2-ab+b^2\right)^2\left(b^2-bc+c^2\right)^2\left(c^2-ca+a^2\right)^2 \geq \left(a^4+b^4\right)\left(b^4+c^4\right)\left(c^4+a^4\right)=8$$

hay $\left(a^2-ab+b^2\right)^2\left(b^2-bc+c^2\right)^2\left(c^2-ca+a^2\right)^2 \geq 1$ (*).

Do $a^2-ab+b^2,\ b^2-bc+c^2,\ c^2-ca+a^2 \geq 0$ nên từ (*) suy ra

$\left(a^2-ab+b^2\right)\left(b^2-bc+c^2\right)\left(c^2-ca+a^2\right) \geq 1$, có Đpcm.

Câu 4. Cho các số thực không âm a, b thỏa mãn $a^2 + b^2 = 2$. Chứng minh rằng

$$a\sqrt{3b+1}+b\sqrt{3a+1}+\sqrt{3a+2}.\sqrt{3b+2} \leq 9.$$

Vì $a^2 + b^2 = 2$ nên bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$8a\sqrt{3b+1}+8b\sqrt{3a+1}+8\sqrt{3a+2}.\sqrt{3b+2} \leq 72$

$\Leftrightarrow 2a\left(3b+1-4\sqrt{3b+1}+4\right)+2b\left(3a+1-4\sqrt{3a+1}+4\right)$

$+4\left(3a+2-2\sqrt{3a+2}.\sqrt{3b+2}+3b+2\right)+11(a^2-2a+1)$

$+11(b^2-2b+1)+6(a^2-2ab+b^2) \geq 0$

$\Leftrightarrow 2a\left(\sqrt{3b+1}-2\right)^2+2b\left(\sqrt{3a+1}-2\right)^2+4\left(\sqrt{3a+2}-\sqrt{3b+2}\right)^2$

$+11(a-1)^2+11(b-1)^2+6(a-b)^2 \geq 0.$ (*)

Bất đẳng thức (*) luôn đúng, suy ra đpcm. Đẳng thức xảy ra khi a = b = 1.

Câu 5. Cho hai số dương x và y. Chứng minh rằng $\left(x+\dfrac{2}{y}\right).\left(\dfrac{y}{x}+2\right)\ge 8.$

Hướng dẫn

$$\left(x+\frac{2}{y}\right).\left(\frac{y}{x}+2\right)\ge 8 \Leftrightarrow (xy+2)(y+2y)\ge 8xy$$

Biến đổi BĐT về dạng $x(y-2)^2+2y(x-1)^2\ge 0$ (Đúng với x, y >0)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=1;\ y=2.$

Câu 6. Cho các số thực không âm a,b,c thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=3$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=ab^2+bc^2+ca^2-4abc$.

Hướng dẫn

Không mất tính tổng quát giả sử:

$$a\le b\le c\Rightarrow a(b-a)(b-c)\le 0\Rightarrow ab^2+ca^2-abc\le a^2b$$

$$P=ab^2+bc^2+ca^2-4abc\le \left(ab^2+ca^2-abc\right)+bc^2\le a^2b+bc^2$$

$$\Rightarrow P\le b\left(a^2+c^2\right)=b\left(3-b^2\right).$$

Mặt khác $b\left(3-b^2\right)=2-(b-1)^2(b+2)\le 2\Rightarrow P\le 2$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a=0\\ b=1\\ c=\sqrt{2}\end{cases}$.

Vậy $\max P=2$, đạt được khi $(a;b;c)=\left(0;1;\sqrt{2}\right)$ hoặc các hoán vị tương ứng.

Câu 7. Cho $x,\ y,\ z$ là các số thực thỏa mãn $x\ge 7$, $x+y\ge 12$ và $x+y+z=15$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=x^2+y^2+z^2$.

Hướng dẫn

Ta có: $(x-7)^2\ge 0\ \ \forall x\Leftrightarrow x^2-14x+49\ge 0\Leftrightarrow x^2\ge 14x-49$

$(y-5)^2\ge 0\ \ \forall y\Leftrightarrow y^2-10y+25\ge 0\Leftrightarrow y^2\ge 10y-25$

$(z-3)^2\ge 0\ \ \forall z\Leftrightarrow z^2-6z+9\ge 0\Leftrightarrow z^2\ge 6z-9$

$\Rightarrow A=x^2+y^2+z^2\ge 14x+10y+6z-83$

$\Rightarrow A\ge 6(x+y+z)+4(x+y)+4x-83$

$\Rightarrow A\ge 6.15+4.12+4.7-83$ hay $A\ge 83$

Dấu " = " xảy ra khi $x=7,y=5,z=3$ (thỏa mãn)

Câu 8. Chứng minh $(x+y+z)^3+9xyz\ge 4(x+y+z)(xy+yz+zx)$ với x,y,z là các số thực không âm. Đẳng thức xảy ra khi nào?

Hướng dẫn

Chứng minh $(x+y+z)^3+9xyz\ge 4(x+y+z)(xy+yz+zx)\ (*)$ với x,y,z là các số thực không âm. Đẳng thức xảy ra khi nào?

$(*)\Leftrightarrow x^3+y^3+z^3+3xyz-x^2y-x^2z-y^2x-y^2z-z^2x-z^2y\ge 0$.

$\Leftrightarrow x(x-y)(x-z)+y(y-x)(y-z)+z(z-x)(z-y)\ge 0\ (**)$.

Không mất tính tổng quát, giả sử $x\ge y\ge z\ge 0$.

Khi đó $(**)\Leftrightarrow z(z-x)(z-y)+(x-y)\left[x(x-z)-y(y-z)\right]\ge 0$ (hiển nhiên đúng)

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$ hoặc hai trong 3 số bằng nhau, số còn lại là 0.

DẠNG 2: DÙNG PHƯƠNG PHÁP TAM THỨC BẬC HAI

Câu 1. Cho các số thực x, y thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = xy(x-2)(y+6) + 13x^2 + 4y^2 - 26x + 24y + 46.$$

Hướng dẫn

Biểu thức P có thể được viết lại dưới dạng $P = x(x-2)y(y+6) + 13x(x-2) + 4y(y+6) + 46$.

Đặt $a = x(x-2) = (x-1)^2 - 1$ và $b = y(y-+6) = (y+3)^2 - 9$ thì ta có

$P = ab + 13a + 4b + 46 = (a+4)(b+13) - 6$

$= \left[(x-1)^2 + 3\right]\left[(y+3)^2 + 4\right] - 6 \geq 3.4 - 6 = 6$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$ và $y = -3$. Vậy $\min P = 6$.

Câu 2. Cho hai số dương x, y thỏa mãn $x\left(x^3 + y^3\right) + 6xy(x + y - 2) = (x+y)^2(xy+4)$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 1\right)$$

Hướng dẫn

Đặt $S = x + y, P = x.y, S > 0, P > 0$

$T = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{S^2 - 2P}{P} + 1\right) \Rightarrow P = \frac{S^2}{2T+1}$

$2\left(x^3 + y^3\right) + 6xy(x + y - 2) = (x+y)^2(xy+4)$

$\Leftrightarrow 2S^3 - 12P = S^2(P+4)$

$\Leftrightarrow 2S^3 - 12\frac{S^2}{2T+1} = S^2\left(\frac{S^2}{2T+1} + 4\right)$

$\Leftrightarrow S^2 - 2(2T+1)S + 8T + 16 = 0 (1)$

(1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 4T^2 - 4T - 15 \geq 0 \Rightarrow T \geq \frac{5}{2}$

Vậy $\min T = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 6 \\ P = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + \sqrt{3} \\ y = 3 - \sqrt{3} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 3 - \sqrt{3} \\ y = 3 + \sqrt{3} \end{cases}$

DẠNG 3: BẤT ĐẲNG THỨC AM-GM (CAUCHY)

1. **Dạng tổng quát** (n số): $\forall x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_n \geq 0$ ta có:

- Dạng 1: $\dfrac{x_1 + x_2 + \ldots\ldots x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1\, x_2 \ldots\ldots\ldots x_n}$
- Dạng 2: $x_1 + x_2 + \ldots\ldots x_n \geq n\sqrt[n]{x_1\, x_2 \ldots\ldots\ldots x_n}$
- Dạng 3: $\left(\dfrac{x_1 + x_2 + \ldots\ldots x_n}{n}\right)^n \geq x_1\, x_2 \ldots\ldots\ldots x_n$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi: $x_1 = x_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots = x_n$

Hệ quả 1:

Nếu: $x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n = S = const$ **thì:** $Max\left(\mathrm{P} = x_1 x_2 \ldots\ldots\ldots x_n\right) = \left(\dfrac{S}{n}\right)^n$

$$\text{khi } x_1 = x_2 = ... = x_n = \frac{S}{n}$$

Hệ quả 2:

Nếu: $x_1x_2.................x_n = P = const$ **thì:** $Min\left(S = x_1 + x_2.........+x_2\right) = n\sqrt[n]{P}$

$$\text{khi } x_1 = x_2 = ... = x_n = \sqrt[n]{P}$$

2. **Dạng cụ thể** (2 số, 3 số):

	n = 2: ∀ x, y ≥ 0 khi đó:	$n = 3, \forall x, y, z \ge 0$ khi đó:
2.1	$\frac{x+y}{2} \ge \sqrt{xy}$	$\frac{x+y+z}{3} \ge \sqrt[3]{xyz}$
2.2	$x + y \ge 2\sqrt{xy}$	$x+y+z \ge 3\sqrt[3]{xyz}$
2.3	$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \ge xy$	$\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 \ge xyz$
2.4	$(x+y)^2 \ge 4xy$	$(x+y+z)^3 \ge 27xyz$
2.5	$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \ge \frac{4}{x+y}$	$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \ge \frac{9}{x+y+z}$
2.6	$\frac{1}{xy} \ge \frac{4}{(x+y)^2}$	$\frac{1}{xyz} \ge \frac{4}{(x+y+z)^3}$

Câu 1. Cho $x, y > 0$. Tìm GTNN của biểu thức : $Q = \frac{(x+y)^3}{xy^2}$.

Hướng dẫn

Nhận xét:

Ta nên nhớ mục đích là đánh giá Q $\ge m$ nên nhìn vào biểu thức trên ta có hai hướng để khai thác : Hướng thư nhất : Khai thác tử số dùng cauchy đánh giá về mẫu, hoặc hướng thứ hai là khai thác mẫu dùng cauchy đánh giá đưa về tử sau đó rút gọn đi đến điều cần chứng minh. Sau đây ta khai thác theo hướng hai.

Ta có:

$$xy^2 = \frac{1}{16}(4x)(2y)(2y) \le \frac{1}{16}\left(\frac{4x+2y+2y}{3}\right)^3 = \frac{1}{16}\left[\frac{4}{3}(x+y)\right]^3 = \frac{4}{27}(x+y)^3$$

$\Rightarrow Q \ge \frac{27}{4}$. Dấu bằng xảy ra khi $x = 1; y = 2$.

Vậy $\min Q = \frac{27}{4}$

Câu 2. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $(a+c)(b+c) = 4c^2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a}{b+3c} + \frac{b}{a+3c} + \frac{ab}{bc+ca}$.

Lời giải

Do a, b, c là các số thực dương nên giả thiết của bài toán được viết lại thành

$$\frac{(a+c)(b+c)}{c^2}=4\Leftrightarrow\left(\frac{a}{c}+1\right)\left(\frac{b}{c}+1\right)=4.$$

Đặt $x=\frac{a}{c};\ y=\frac{b}{c}\ (x>0;y>0)$. Khi đó giả thiết trên trở thành $(x+1)(y+1)=4$.

Cũng từ trên ra được $a=cx$; $b=cy$, thay vào biểu thức P ta được

$$P=\frac{cx}{cy+3c}+\frac{cy}{cx+3c}+\frac{c^2xy}{c^2x+c^2y}=\frac{x}{y+3}+\frac{y}{x+3}+\frac{xy}{x+y}.$$

Đến đây ta xử lí bài toán như sau.

+) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P

Từ $(x+1)(y+1)=4$ ta được $xy=3-(x+y)$. Đặt $t=x+y>0$ và áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có $\frac{1}{4}(x+y)^2\ge xy$ nên suy ra $3-t\le\frac{1}{4}t^2$ hay $t^2+4t-12\ge 0$ nên $t\ge 2$.

Như vậy ta có $2\le t<3$. Biểu thức P được viết lại thành

$$P=\frac{x}{y+3}+\frac{y}{x+3}+\frac{xy}{x+y}=\frac{x^2+y^2+3(x+y)}{(x+3)(y+3)}+\frac{xy}{x+y}=\frac{(x+y)^2+3(x+y)-2xy}{xy+3(x+y)+9}+\frac{xy}{x+y}$$

$$P=\frac{t^2+3t-2(3-t)}{3-t+3t+9}+\frac{3-t}{t}=\frac{t^2+5t-6}{2t+12}+\frac{3-t}{t}=\frac{(t-1)(t+6)}{2(t+6)}+\frac{3-t}{t}=\frac{t}{2}+\frac{3}{t}-\frac{3}{2}$$

Lại áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta lại có $\frac{t}{2}+\frac{3}{t}\ge 2\sqrt{\frac{3}{2}}=\sqrt{6}$. Do đó $P\ge\sqrt{6}-\frac{3}{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{t}{2}=\frac{3}{t}\Leftrightarrow t=\sqrt{6}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=\sqrt{6}\\ xy=3-\sqrt{6}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=c\sqrt{6}\\ ab=c^2\left(3-\sqrt{6}\right)\end{cases}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $\sqrt{6}-\frac{3}{2}$, đạt được tại $a+b=c\sqrt{6}$; $ab=c^2\left(3-\sqrt{6}\right)$.

+) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức P.

Như trên ta đã có $2\le t<3$ và $P=\frac{t}{2}+\frac{3}{t}-\frac{3}{2}$. Do đó ta có biến đổi

$$P=\frac{t}{2}+\frac{3}{t}-\frac{3}{2}=\frac{t^2-3t+6}{2t}=\frac{t^2-5t+6}{2t}+1=\frac{(t-2)(t-3)}{2t}+1$$

Do $2\le t<3$ nên ta có $\frac{(t-2)(t-3)}{2t}\le 0$. Do đó suy ra $P\le 1$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$t=2\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=2\\ xy=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P là 1, đạt được tại $a=b=c$.

Câu 3. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+ab=2c(a+b)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\dfrac{c^2}{(a+b-c)^2}+\dfrac{c^2}{a^2+b^2}+\dfrac{\sqrt{ab}}{a+b}$.

Lời giải

Trước hết từ giả thiết ta có biến đổi

$$a^2+b^2+c^2+2ab=2c(a+b)\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+ab=2ac+2bc$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ab=ab\Leftrightarrow (a+b-c)^2=ab.$$

Do đó ta viết lại được biểu thức P thành

$$P=\frac{c^2}{(a+b-c)^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}+\frac{\sqrt{ab}}{a+b}=\frac{c^2}{ab}+\frac{c^2}{a^2+b^2}+\frac{\sqrt{ab}}{a+b}$$

Để ý rằng ta có $4ab\le(a+b)^2$ nên ta có

$$(a+b-c)^2=ab\le\frac{(a+b)^2}{4}\Leftrightarrow -\frac{a+b}{2}\le a+b-c\le\frac{a+b}{2}\Leftrightarrow\frac{a+b}{2}\le c\le\frac{3}{2}(a+b)$$

Từ đó ta được $P=\dfrac{c^2}{ab}+\dfrac{c^2}{a^2+b^2}+\dfrac{\sqrt{ab}}{a+b}\ge\dfrac{(a+b)^2}{4ab}+\dfrac{(a+b)^2}{4(a^2+b^2)}+\dfrac{\sqrt{ab}}{a+b}$.

Mặt khác áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz

$$P\ge\frac{(a+b)^2}{4ab}+\frac{(a+b)^2}{4(a^2+b^2)}+\frac{\sqrt{ab}}{a+b}=\frac{(a+b)^2}{8ab}+\frac{(a+b)^2}{8ab}+\frac{(a+b)^2}{4(a^2+b^2)}+\frac{\sqrt{ab}}{a+b}$$

$$\ge\frac{(a+b)^2}{8ab}+\frac{(a+b+a+b)^2}{8ab+4(a^2+b^2)}+\frac{\sqrt{ab}}{a+b}=1+\frac{(a+b)^2}{8ab}+\frac{\sqrt{ab}(a+b)}{(a+b)^2}$$

$$\ge1+\frac{(a+b)^2}{8ab}+\frac{2ab}{(a+b)^2}\ge1+2\sqrt{\frac{(a+b)^2}{8ab}.\frac{2ab}{(a+b)^2}}=1+2.\frac{1}{2}=2$$

Xảy ra tại $a=b=c$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 2.

Câu 4. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=2017$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$M=\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{4c}{c+1}$$

Lời giải

Ta có $M=\dfrac{a+1-1}{a+1}+\dfrac{b+1-1}{b+1}+\dfrac{4(c+1)-4}{c+1}=6-\left(\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}+\dfrac{2}{c+1}+\dfrac{2}{c+1}\right)$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho bốn số dương x, y, z, t ta có $x+y+z+t\ge 4\sqrt[4]{xyzt}$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho bốn số dương $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$, $\frac{1}{t}$ ta có $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\ge 4\sqrt[4]{\frac{1}{xyzt}}$

Từ đó ta suy ra được $\left(x+y+z+t\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right)\ge 16$.

Áp dụng bất đẳng thức trên thì ta có ta có

$$\left(a+1+b+1+\frac{c+1}{2}+\frac{c+1}{2}\right)\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{2}{c+1}+\frac{2}{c+1}\right)\ge 16$$

$$\Leftrightarrow 2020\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{4}{c+1}\right)\ge 16\Leftrightarrow \frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{4}{c+1}\ge \frac{16}{2020}=\frac{4}{505}$$

Vậy ta được $M\le 6-\frac{4}{505}=\frac{3026}{505}$. Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}a+b+c=2017\\ a+1=b+1=\frac{c+1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}a=b=504\\ c=1009\end{cases}$.

Do đó giá trị lớn nhất của M là $\frac{3026}{505}$, xảy ra tại $a=b=504$; $c=1009$.

Câu 5. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$M=\frac{1}{\sqrt{1+8a^3}}+\frac{1}{\sqrt{1+8b^3}}+\frac{1}{\sqrt{1+8c^3}}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\sqrt{1+8a^3}=\sqrt{\left(1+2a\right)\left(1-2a+4a^2\right)}\le \frac{1}{2}\left[\left(1+2a\right)+\left(1-2a+4a^2\right)\right]=1+2a^2$$

Điều này dẫn đến $\frac{1}{\sqrt{1+8a^3}}\ge \frac{1}{1+2a^2}$.

Hoàn toàn tương tự thì ta cũng có $\frac{1}{\sqrt{1+8b^3}}\ge \frac{1}{1+2b^2}$; $\frac{1}{\sqrt{1+8c^3}}\ge \frac{1}{1+2c^2}$.

Do vậy ta có $M\ge \frac{1}{1+2a^2}+\frac{1}{1+2b^2}+\frac{1}{1+2c^2}$. Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\frac{1}{1+2a^2}+\frac{1}{1+2b^2}+\frac{1}{1+2c^2}\ge 3.\sqrt[3]{\frac{1}{1+2a^2}.\frac{1}{1+2b^2}.\frac{1}{1+2c^2}}$$

$$\left(1+2a^2\right)+\left(1+2b^2\right)+\left(1+2c^2\right)\ge 3.\sqrt[3]{\left(1+2a^2\right)\left(1+2b^2\right)\left(1+2c^2\right)}$$

Suy ra $\left(\dfrac{1}{1+2a^2}+\dfrac{1}{1+2b^2}+\dfrac{1}{1+2c^2}\right).\left[3+2\left(a^2+b^2+c^2\right)\right]\ge 9$

Điều này dẫn đến $M\ge \dfrac{9}{3+2\left(a^2+b^2+c^2\right)}=1$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là 1, xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Câu 6. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $3a^2+4b+6c=29$. Tìm giá trị nhỏ nhất biểu thức $P=2a^3+b^2+c^2$

Hướng dẫn

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM cho các số dương ta được

$a^3+a^3+1\ge 3a^2$.

$b^2+2^2\ge 4b$.

$c^2+3^2\ge 6c$.

Khi đó $P+1+4+9\ge 3a^2+4b+6c$.

Suy ra $P\ge 3a^2+4b+6c-1-4-9=15$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}a=1\\b=2\\c=3\end{cases}$.

Câu 7. Cho ba số a,b,c dương .

Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{a^2+bc}+\dfrac{1}{b^2+ac}+\dfrac{1}{c^2+ab}\le \dfrac{a+b+c}{2abc}$

Hướng dẫn

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$a^2+bc\ge 2a\sqrt{bc}\Rightarrow \frac{2}{a^2+bc}\le \frac{1}{a\sqrt{bc}}=\sqrt{\frac{1}{ab}.\frac{1}{ac}}\le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}\right)$$

Tương tự $:\Rightarrow \begin{cases}\dfrac{2}{b^2+ac}\le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{ba}+\dfrac{1}{bc}\right)\\[2mm] \dfrac{2}{c^2+ab}\le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{ca}+\dfrac{1}{bc}\right)\end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{b^2+ac}+\frac{1}{c^2+ab}\le \frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=\frac{a+b+c}{2abc}$$

Dấu “=” xảy ra khi $a=b=c$.

Câu 8. Giả sử x và y là hai số thỏa mãn $x>y$ và $xy=1$. Tìm GTNN của biểu thức: $A=\dfrac{x^2+y^2}{x-y}$.

Hướng dẫn

Ta có thể viết: $A=\frac{x^2+y^2}{x-y}=\frac{x^2-2xy+y^2+2xy}{x-y}=\frac{(x-y)^2+2xy}{x-y}$

Do x > y và xy = 1 nên: $A=\frac{(x-y)^2+2xy}{x-y}=x-y+\frac{2}{x-y}=\frac{x-y}{2}+\frac{2}{x-y}+\frac{x-y}{2}$

Vì x > y $\Rightarrow$ x – y > 0 nên áp dụng bất đẳng thức côsi với 2 số không âm, ta có:

$$A\ge 2.\sqrt{\frac{x-y}{2}.\frac{2}{x-y}}+\frac{x-y}{2}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{x-y}{2}=\frac{2}{x-y}\Leftrightarrow (x-y)^2=4\Leftrightarrow (x-y)=2$ (Do x – y > 0)

Từ đó: $A\ge 2+\frac{2}{2}=3$

Vậy GTNN của A là 3 $\Leftrightarrow \begin{cases} x-y=2 \\ xy=1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1+\sqrt{2} \\ y=-1+\sqrt{2} \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x=1-\sqrt{2} \\ y=-1-\sqrt{2} \end{cases}$$ Thỏa điều kiện xy = 1

Câu 9. Cho x,y,z là các số thực không âm thỏa mãn $x+y+z=\frac{3}{2}$. Chứng minh rằng

$$x+2xy+4xyz\le 2.$$

Hướng dẫn

Theo bất đẳng thức Cô si ta có

$$x+2xy+4xyz=x+4xy\left(z+\frac{1}{2}\right)\le x+4x\frac{\left(y+z+\frac{1}{2}\right)^2}{4}=x+x\left(2-x\right)^2..$$

Với x,y,z không âm và $x+y+z=\frac{3}{2}\Rightarrow 0\le x\le \frac{3}{2}$.

Ta cần chứng minh $x+x\left(2-x\right)^2\le 2\Leftrightarrow \left(x-2\right)+x\left(2-x\right)^2\le 0\Leftrightarrow 1+x\left(x-2\right)\ge 0\Leftrightarrow \left(x-1\right)^2\ge 0$ (luôn đúng).

Câu 10. Cho x, y, z là các số thức dương thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S=\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}$

Hướng dẫn

Ta có:

$$S^2=\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}+2(x^2+y^2+z^2)$$

Áp dụng BĐT Côsi ta có:

$$\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{x^2z^2}{y^2}\ge 2x^2$$

$$\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2}\ge 2y^2$$

$$\frac{x^2z^2}{y^2}+\frac{y^2z^2}{x^2}\ge 2z^2$$

Suy ra

$S^2 \ge 3(x^2+y^2+z^2)=3$

Vậy minS=$\sqrt{3}$ khi $x=y=z=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Câu 11. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng $a\sqrt{b^2+1}+b\sqrt{c^2+1}+c\sqrt{a^2+1}\ge 2$.

Hướng dẫn

Bất đẳng thức đã cho tương đương $\left(a\sqrt{b^2+1}+b\sqrt{c^2+1}+c\sqrt{a^2+1}\right)^2\ge 4\quad (6)$.

Đặt $S=\left(a\sqrt{b^2+1}+b\sqrt{c^2+1}+c\sqrt{a^2+1}\right)^2$. Ta có

$$S=a^2\left(b^2+1\right)+b^2\left(c^2+1\right)+c^2\left(a^2+1\right)+2ab\sqrt{\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right)}$$
$$+2ac\sqrt{\left(b^2+1\right)\left(a^2+1\right)}+2bc\sqrt{\left(c^2+1\right)\left(a^2+1\right)}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$\sqrt{\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right)}=\sqrt{b^2c^2+b^2+c^2+1}\ge bc+1\quad (6.1)$$
$$\sqrt{\left(b^2+1\right)\left(a^2+1\right)}=\sqrt{b^2a^2+a^2+b^2+1}\ge ab+1\quad (6.2)$$
$$\sqrt{\left(a^2+1\right)\left(c^2+1\right)}=\sqrt{a^2c^2+a^2+c^2+1}\ge ac+1\quad (6.3).$$

Kết hợp (6.1), (6.2) và (6.3) ta được

$$S\ge a^2\left(b^2+1\right)+b^2\left(c^2+1\right)+c^2\left(a^2+1\right)+2ab\left(bc+1\right)+2ac\left(ab+1\right)+2bc\left(ac+1\right)$$
$$=\left(ab+bc+ca\right)^2+a^2+b^2+c^2+2\left(ab+bc+ca\right).$$

Mặt khác, ta lại có $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$. Suy ra

$S\ge\left(ab+bc+ca\right)^2+3\left(ab+ac+ca\right)=4$

Vậy bất đẳng thức (6) đúng.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 12. Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn điều kiện: $xyz=1$. Tìm GTNN của biểu thức: $E=\dfrac{1}{x^3(y+z)}+\dfrac{1}{y^3(z+x)}+\dfrac{1}{z^3(x+y)}$.

Hướng dẫn

Đặt $a=\dfrac{1}{x};b=\dfrac{1}{y};c=\dfrac{1}{z}\Rightarrow abc=\dfrac{1}{xyz}=1$

Do đó: $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=a+b\Rightarrow x+y=(a+b).xy\Rightarrow x+y=c(a+b)$

Tương tự: y + z = a(b + c)

z + x = b(c + a)

$$\Rightarrow E=\frac{1}{x^3}.\frac{1}{(y+z)}+\frac{1}{y^3}.\frac{1}{(z+x)}+\frac{1}{z^3}.\frac{1}{(x+y)}$$
$$=a^3.\frac{1}{a(b+c)}+b^3.\frac{1}{b(c+a)}+c^3.\frac{1}{c(a+b)}=\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}$$

Ta có: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}$ (1)

Thật vậy: Đặt b + c = x; c + a = y; a + b = z

$$\Rightarrow a+b+c=\frac{x+y+z}{2}$$

$$\Rightarrow a=\frac{y+z-x}{2};b=\frac{z+x-y}{2};c=\frac{x+y-z}{2}$$

Khi đó, $VT=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{y+z-x}{2x}+\frac{z+x-y}{2y}+\frac{x+y-z}{2z}$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right)-\frac{3}{2}\ge1+1+1-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

Nhân hai vế (1) với a + b + c > 0. Ta có:

$$\frac{a(a+b+c)}{b+c}+\frac{b(a+b+c)}{c+a}+\frac{c(a+b+c)}{a+b}\ge\frac{3}{2}(a+b+c)$$

$$\Rightarrow\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\ge\frac{a+b+c}{2}\ge\frac{3\sqrt[3]{abc}}{2}=\frac{3}{2}\Rightarrow E\ge\frac{3}{2}$$

$\Rightarrow$ GTNN của E là $\frac{3}{2}$ khi a = b = c = 1.

Câu 13. Cho $x,\ y,\ z$ là các số thực dương thỏa $xyz=1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P=\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{y^3}{(1+z)(1+x)}+\frac{z^3}{(1+x)(1+y)}.$$

Hướng dẫn

Áp dụng BĐT Côsi cho ba số

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{1+y}{8}+\frac{1+z}{8}\ge\frac{3x}{4}$$

$$\frac{y^3}{(1+z)(1+x)}+\frac{1+z}{8}+\frac{1+x}{8}\ge\frac{3y}{4}$$

$$\frac{z^3}{(1+x)(1+y)}+\frac{1+x}{8}+\frac{1+y}{8}\ge\frac{3z}{4}.$$

Suy ra :

$$P=\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{y^3}{(1+z)(1+x)}+\frac{z^3}{(1+x)(1+y)}\ge\frac{1}{2}(x+y+z)-\frac{3}{4}\ge\frac{3}{2}\sqrt[3]{xyz}-\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{3}{4}$.

Câu 14. Cho $x,\ y,\ z$ là các số dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\sqrt[3]{4\left(x^3+y^3\right)}+\sqrt[3]{4\left(y^3+z^3\right)}+\sqrt[3]{4\left(z^3+x^3\right)}+2\left(\frac{x}{y^2}+\frac{y}{z^2}+\frac{z}{x^2}\right).$$

Hướng dẫn

Với $x,\ y,\ z\ >\ 0$ ta có

$4\left(x^3+y^3\right)\ge\left(x+y\right)^3$;

$4\left(y^3+x^3\right)\ge\left(y+z\right)^3$;

$4\left(x^3+z^3\right)\ge\left(x+z\right)^3$.

$\Rightarrow\sqrt[3]{4\left(x^3+y^3\right)}+\sqrt[3]{4\left(y^3+z^3\right)}+\sqrt[3]{4\left(z^3+x^3\right)}\ge 2\left(x+y+z\right)\ge 6\sqrt[3]{xyz}$

$2\left(\frac{x}{y^2}+\frac{y}{z^2}+\frac{z}{x^2}\right)\ge\frac{6}{\sqrt[3]{xyz}}\Rightarrow P\ge 6\left(\sqrt[3]{xyz}+\frac{1}{\sqrt[3]{xyz}}\right)\ge 12.$

Dấu bằng xảy ra

$\Leftrightarrow\begin{cases}xyz=1\\x=y=z\end{cases}\Leftrightarrow x=y=z=1$

Câu 15. Cho các số dương $x,\ y,\ z$ thỏa mãn: $xy+xz+4yz=32$

Tìm giá trị nhỏ nhất của: $P=x^2+16y^2+16z^2$

Hướng dẫn

Ta có $\frac{x^2}{2}+8y^2\ge 2.\frac{x}{\sqrt{2}}.2\sqrt{2}y=4xy$; $\frac{x^2}{2}+8z^2\ge 2.\frac{x}{\sqrt{2}}.2\sqrt{2}z=4xz$; $8(z^2+y^2)\ge 16xy$

Vậy $x^2+16y^2+16z^2\ge 4(xy+xz+4yz)=4.32=128$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}\frac{x}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}y\\ \frac{x}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}z\\ y=z\end{cases}$

Câu 16. Cho a,b,c dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$A=\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}$$

Hướng dẫn

Ta có: $\frac{a}{1+b^2}=\frac{a\left(1+b^2\right)-ab^2}{1+b^2}=a-\frac{ab^2}{1+b^2}\ge a-\frac{ab^2}{2b}=a-\frac{ab}{2}$

Tương tự ta có: $\frac{b}{1+c^2}\ge b-\frac{bc}{2};\frac{c}{1+a^2}\ge c-\frac{ca}{2}$.

Do đó $A=\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\ge a+b+c-\frac{1}{2}\left(ab+bc+ca\right)\ge 3-\frac{1}{2}.\frac{\left(a+b+c\right)^2}{3}=3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Vậy $MinA=\frac{3}{2}$ khi $a=b=c=1$.

Câu 17. Cho a,b,c dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+1}{b^2+1}+\frac{b+1}{c^2+1}+\frac{c+1}{a^2+1}\ge 3$$

Hướng dẫn

Ta có: $\frac{a+1}{b^2+1}=\frac{\left(a+1\right)\left(b^2+1\right)-b^2\left(a+1\right)}{b^2+1}$

$$= a+1-\frac{b^2(a+1)}{b^2+1} \ge a+1-\frac{b^2(a+1)}{2b}$$

$$= a+1-\frac{b(a+1)}{2} = a-\frac{b}{2}-\frac{ab}{2}+1$$

Tương tự ta có:

$$\frac{b+1}{c^2+1} \ge b-\frac{c}{2}-\frac{bc}{2}+1; \frac{c+1}{a^2+1} \ge c-\frac{a}{2}-\frac{ca}{2}+1$$

Do đó $VT \ge \frac{1}{2}\left[(a+b+c)-(ab+bc+ca)\right]+3$

$$\ge \frac{1}{2}\left[3-\frac{(a+b+c)^2}{3}\right]+3 \ge 3. \text{(đpcm)}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Câu 18. Cho hai số không âm x, y thỏa mãn $x \ge 2$, $2y+4=xy$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{\sqrt{x^2-2x}}{x-1}+\frac{\sqrt{y^2+2y}}{y+1}+\frac{1}{x+y}.$$

Hướng dẫn

Từ giả thiết ta có $2y+4=xy \Leftrightarrow (x-1)+(y+1)+3=(x-1)(y+1)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x-1}+\frac{1}{y+1}+\frac{3}{(x-1)(y+1)}=1.$$

Đặt $a=\frac{1}{x-1}$, $b=\frac{1}{y+1}$.

Từ giả thiết ta có $a+b+3ab=1$ và biểu thức $P=\sqrt{1-a^2}+\sqrt{1-b^2}+\frac{ab}{a+b}$.

Ta có $1=a+b+3ab \le a+b+3\frac{(a+b)^2}{4}$. Từ đó suy ra $a+b \ge \frac{2}{3}$.

Mà cho hai số dương m, n ta luôn có $\sqrt{m}+\sqrt{n} \le \sqrt{2(m+n)}$.

Từ đó ta có

$$\sqrt{1-a^2}+\sqrt{1-b^2} \le \sqrt{2\left[2-(a^2+b^2)\right]} \le \sqrt{2\left[2-\frac{(a+b)^2}{2}\right]} \le \sqrt{2\left[2-\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{2}\right]}=\frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

Mặt khác $\frac{ab}{a+b}=\frac{1-(a+b)}{3(a+b)}=\frac{1}{3(a+b)}-\frac{1}{3} \le \frac{1}{3}.\frac{3}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$.

Vậy ta có $P=\sqrt{1-a^2}+\sqrt{1-b^2}+\frac{ab}{a+b} \le \frac{4\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1+8\sqrt{2}}{6}$.

Vậy $\max P=\frac{1+8\sqrt{2}}{6}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=\frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$.

DẠNG 4: DÙNG BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY DẠNG CỘNG MẪU SỐ

Cho hai dãy số tùy ý $a_1;\ a_2;\ ...;\ a_n$ và $x_1;\ x_2;\ ...;\ x_n$ với $x_1;\ x_2;\ ...;\ x_n > 0$.

Khi đó ta có $\frac{a_1^2}{x_1}+\frac{a_2^2}{x_2}+...+\frac{a_n^2}{x_n} \ge \frac{\left(a_1+a_2+...+a_n\right)^2}{x_1+x_2+...+x_n}$

Dấu đẳng thức xảy ra ở dạng 4 là: $\frac{a_1}{x_1}=\frac{a_2}{x_2}=...=\frac{a_n}{x_n} \ge 0$.

4.1. Sử dụng bất đẳng thức theo chiều thuận

Ví dụ 1. Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a+b=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{4}{ab}$$

Phân tích: Để áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, ta chọn một số k sao cho $\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{k^2}{2ab} \ge \frac{(1+k)^2}{a^2+b^2+2ab}=\left(1+k\right)^2$ và đảm bảo dấu đẳng thức xảy ra, tức là thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a^2+b^2}=\frac{k}{2ab}$ với $a=b$, do đó ta chọn được $k=1$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta được

$$P=\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{4}{ab}=\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{2ab}+\frac{7}{2ab} \ge \frac{(1+1)^2}{a^2+b^2+2ab}+\frac{7}{2ab}=4+\frac{7}{2ab}$$

Mặt khác ta lại có $ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

Do đó ta được $P \ge 18$, hay giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là 18. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=\frac{1}{2}$.

Nhận xét: Sau khi đánh giá bằng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta nhận được biểu thức $Q=4+\frac{7}{2ab}$, đến đây ta có thể thêm vào biểu thức đại lượng $48ab$, ta được $Q=4+\frac{7}{2ab}+48ab$.

Và ta tách thành: $Q=4+\frac{7}{2ab}+24ab=4+\left(\frac{3}{ab}+48ab\right)+\frac{1}{2ab}$. Đến đây ta hoàn toàn xử lý được tiếp.

Rõ ràng, với $ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ thì từ cách ghép cặp trong biểu thức Q ta có thể tổng quát thành bài toán:

Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a+b=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{4}{ab}+kab \qquad (0<k\le 48)$$

Gợi ý: Khi đó ta tách P như sau:

$$P=\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{4}{ab}+kab=\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{2ab}+\frac{3}{ab}+48ab+\frac{1}{2ab}+(k-48)ab$$

Ví dụ 2. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{9}{ab+ab+bc}\ge 30$$

Phân tích và lời giải

Trước hết ta dự đoán đẳng thức xảy ra tại $a=b=c=\frac{1}{3}$. Khi sử dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta chú ý cộng các mẫu để có thể viết được thành $(a+b+c)^2$.

Để ý là nếu đánh giá $\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{2}{2(ab+bc+ca)}\ge\frac{(1+\sqrt{2})^2}{(a+b+c)^2}=(1+\sqrt{2})^2$, khi đó đẳng thức không xảy ra vì $\frac{1}{a^2+b^2+c^2}\ne\frac{\sqrt{2}}{2(ab+bc+ca)}$

Như vậy để có thể áp dụng được bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta làm như sau

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{k^2}{2(ab+bc+ca)}\ge\frac{(1+k)^2}{(a+b+c)^2}=(1+k)^2$$

Ta cần chọn k để đẳng thức sau đúng $\frac{1}{a^2+b^2+c^2}=\frac{k}{2(ab+bc+ca)}$, dễ dàng chọn được giá trị $k=2$.

Đến đây ta có lời giải như sau

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta được

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{9}{ab+bc+ca}=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{4}{2(ab+bc+ca)}+\frac{7}{ab+bc+ca}$$

$$\ge\frac{(1+2)^2}{(a+b+c)^2}+\frac{7}{ab+bc+ca}=9+\frac{7}{ab+bc+ca}$$

Bất đẳng thức sẽ được chứng minh nếu ta chỉ ra được $\frac{7}{ab+bc+ca}\ge 21$. Tuy nhiên, dễ thấy

$$\frac{(a++b+c)^2}{3}\ge ab+bc+ca\Leftrightarrow ab+bc+ca\le\frac{1}{3}$$

Do đó ta được $\dfrac{7}{ab+bc+ca} \ge 21$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài tập tương tự:

Câu 1. Cho các số dương a, b, c thoả mãn $a+b+c \le 3$. Chứng ming rằng:

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{2009}{ab+bc+ca} \ge 670.$$

(Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Hải Phòng năm 2009 - 2010)

Câu 2. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{abc} + \frac{1}{1-2(ab+bc+ca)}$$

(Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Vĩnh Phúc năm 2012-2013)

Hướng dẫn: Do $a+b+c=1 \Rightarrow 1-2(ab+bc+ca) = a^2+b^2+c^2$

Suy ra $P = \dfrac{1}{a^2+b^2+c^2} + \dfrac{a+b+c}{abc} = \dfrac{1}{a^2+b^2+c^2} + \dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ca}$

Ví dụ 3. Chứng minh rằng với mọi các số thực dương a, b, c ta có bất đẳng thức sau:

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ac+a^2} \ge \frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}.$$

Phân tích và lời giải

Chúng ta thấy vế trái của bất đẳng thức có dạng phân thức, và quan sát số hạng đại diện chẳng hạn $\dfrac{a^3}{a^2+ab+b^2}$ chúng ta thấy tử số là a^3 và chúng ta mong muốn giảm bậc đi cho dễ làm. Điều này gợi cho chúng ta nghĩ tới sử dụng bất đẳng thức Cauchy- Schwarz để đưa về chứng minh bất đẳng thức mới đơn giản hơn.

Ta có $VT = \dfrac{a^4}{a(a^2+ab+b^2)} + \dfrac{b^4}{b(b^2+bc+c^2)} + \dfrac{c^4}{c(c^2+ac+a^2)}$

$$\ge \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^3+b^3+c^3+a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2}$$

Để ý $a^3+b^3+c^3+a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2 = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Khai thác:

- Ta thấy, $a^2+b^2+c^2 \ge \dfrac{(a+b+c)^2}{3}$ nên bài toán trên có thể phát biểu thành:

Chứng minh rằng với mọi các số thực dương a, b, c ta có bất đẳng thức sau:

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ac+a^2}\ge\frac{a+b+c}{3}.$$

Nếu ràng buộc thêm điều kiện cho biến, chẳng hạn: $a+b+c=k\ \ (k>0)$ thì ta được bài toán:

Chứng minh rằng với mọi các số thực dương a, b, c và $a+b+c=k\ \ (k>0)$ ta có bất đẳng thức sau:

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ac+a^2}\ge\frac{k}{3}.$$

Một số bài tập tương tự: Chứng minh rằng với mọi các số thực dương a, b, c ta có:

Câu 1. $\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b}\ge 1$ (Hướng dẫn: Mỗi phân thức ta nhân cả tử và mẫu với tử)

Câu 2. $\frac{a^2}{a+\sqrt{bc}}+\frac{b^2}{b+\sqrt{ac}}+\frac{c^2}{c+\sqrt{ab}}\ge\frac{3}{2}$, với $a+b+c\ge 3$

Câu 3. $\frac{a^3}{2a+3b+5c}+\frac{b^3}{2b+3c+5a}+\frac{c^3}{2c+3a+5b}\ge\frac{1}{30}$, với $a^2+b^2+c^2\ge\frac{1}{3}$ (Hướng dẫn: Mỗi phân thức ta nhân cả tử và mẫu lần lượt với a, b, c)

Ví dụ 4. Cho a, b, c dương có $a+b+c=1$. Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge 3\left(a^2+b^2+c^2\right)$

Phân tích và lời giải

Ta thấy vế trái có dạng phân thức và có thể áp dụng bất đẳng thức Cauchy- Schwarz, tuy nhiên khi đó ta được $a+b+c\ge 3\left(a^2+b^2+c^2\right)$ nhưng đây là bất đẳng thức ngược chiều. Vậy để xuất hiện được các hạng tử của vế phải ta nhân cả tử và mẫu của mỗi phân thức ở vế trái với tử của nó.

$$VT=\frac{a^4}{a^2b}+\frac{b^4}{b^2c}+\frac{c^4}{c^2a}\ge\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a^2b+b^2c+c^2a}$$

Bất đẳng thức được hoàn tất nếu ta chứng minh được:

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2b+b^2c+c^2a}\ge 3\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\ge 3\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge 3\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)(do\,a+b+c=1)$$

$$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+ab^2+bc^2+ca^2\ge 2\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)$$

Dễ thấy, $a^3+ab^2\ge 2a^2b$; $b^3+bc^2\ge 2b^2c$; $c^3+ca^2\ge 2c^2a$ từ đó ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 5. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+2y+3z=18$. Chứng minh rằng

$$\frac{2y+3z+5}{1+x}+\frac{3z+x+5}{1+2y}+\frac{x+2y+5}{1+3z}\ge \frac{51}{7}$$

Phân tích và lời giải

Quan sát giả thiết, và các phân thức ta thấy nếu cộng tử với mẫu của mỗi phân thức sẽ thu được lượng như nhau $x+2y+3z+6$, hơn nữa là ta lại vận dụng được giả thiết. Khi đó ta hoàn toàn có thể sử dụng bất đẳng thức Cauchy- Schwarz để xử lý phần còn lại.

Ta có

$$\frac{2y+3z+5}{1+x}+\frac{3z+x+5}{1+2y}+\frac{x+2y+5}{1+3z}$$

$$=\frac{2y+3z+5}{1+x}+1+\frac{3z+x+5}{1+2y}+1+\frac{x+2y+5}{1+3z}+1-3$$

$$=\left(x+2y+3z+6\right)\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+2y}+\frac{1}{1+3z}\right)-3\ge 24.\frac{9}{x+2y+3z+3}-3$$

$$=24.\frac{9}{21}-3=\frac{51}{7}$$ (điều phải chứng minh).

Ví dụ 6. Cho các số dương a, b, c thay đổi và thoã mãn $3a+4b+5c=12$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$S=\frac{ab}{ab+a+b}+\frac{2ac}{ac+a+c}+\frac{3bc}{bc+b+c}$$

(Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Bà Rịa – Vũng Tàu năm 2011- 2012)

Phân tích và lời giải

Căn cứ vào giả thiết ta cần tách các tích ab, bc, ac, vì vậy ta thử chia cả tử và mẫu của mỗi phân thức cho tử ta được

$$S=\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+1}+\frac{2}{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+1}+\frac{3}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+1}$$ đến đây ta có thể sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz cho các mẫu.

Ta viết lại biểu thức S thành

$$S=\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+1}+\frac{2}{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+1}+\frac{3}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+1}$$

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x+y+z}\le \frac{1}{9}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$ ta có

$$S=\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+1}+\frac{2}{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+1}+\frac{3}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+1}\le \frac{a+b+1}{9}+\frac{2\left(c+a+1\right)}{9}+\frac{3\left(b+c+1\right)}{9}$$

$$=\frac{6+3a+4b+5c}{9}=\frac{18}{9}=2$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức S là 2. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

4.1. Sử dụng bất đẳng thức theo chiều đảo

Ví dụ 1. Cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{5a^2+(b+c)^2}+\frac{b^2}{5b^2+(c+a)^2}+\frac{c^2}{5c^2+(a+b)^2}\le\frac{1}{3}$$

Phân tích và lời giải

Dự đoán đẳng thức xảy ra tại $a=b=c$, Trước hết ta để ý đến mẫu số có thể phân tích được $5a^2+(b+c)^2=(a^2+b^2+c^2)+2(2a^2+bc)$. Quan sát bất đẳng thức ta thấy có thể áp dụng được bất đẳng thức Bunhiacopxki. Khi vậy ta cần chọn các số m, n để được bất đẳng thức

$$\frac{(m+n)^2a^2}{5a^2+(b+c)^2}=\frac{(m+n)^2a^2}{a^2+b^2+c^2+2(2a^2+bc)}\le\frac{m^2a^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{n^2a^2}{2(2a^2+bc)}$$

Đồng thời đẳng thức $\frac{m}{a^2+b^2+c^2}=\frac{n}{2(2a^2+bc)}$ đúng với $a=b=c$.

Dễ dàng chọn được $m=1;\ n=2$.

Khi đó ta có thể giải được bài toán như sau:

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta có

$$\frac{a^2}{5a^2+(b+c)^2}=\frac{1}{9}\cdot\frac{(1+2)^2a^2}{(a^2+b^2+c^2)+2(2a^2+bc)}\le\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{2a^2}{2a^2+bc}\right)$$

Chứng minh tương tự ta được

$$\frac{b^2}{5b^2+(c+a)^2}\le\frac{1}{9}\left(\frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{2b^2}{2b^2+ac}\right)$$

$$\frac{c^2}{5c^2+(a+b)^2}\le\frac{1}{9}\left(\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{2c^2}{2c^2+ab}\right)$$

Do đó ta có

$$\frac{a^2}{5a^2+(b+c)^2}+\frac{b^2}{5b^2+(c+a)^2}+\frac{c^2}{5c^2+(a+b)^2}\le\frac{1}{9}\left(1+\frac{2a^2}{2a^2+bc}+\frac{2b^2}{2b^2+ca}+\frac{2c^2}{2c^2+ab}\right)$$

Ta cần chứng minh được $\frac{1}{9}\left(1+\frac{2a^2}{2a^2+bc}+\frac{2b^2}{2b^2+ca}+\frac{2c^2}{2c^2+ab}\right)\le\frac{1}{3}$

Bất đẳng thức đó tương đương với $\frac{2a^2}{2a^2+bc}+\frac{2b^2}{2b^2+ca}+\frac{2c^2}{2c^2+ab}\le 2$

Hay $\frac{bc}{2a^2+bc}+\frac{ca}{2b^2+ca}+\frac{ab}{2c^2+ab}\ge 1$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức thì

$$\frac{bc}{2a^2+bc}+\frac{ca}{2b^2+ca}+\frac{ab}{2c^2+ab}\ge\frac{\left(ab+bc+ca\right)^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc\left(a+b+c\right)}=1$$

Như vậy đánh giá cuối cùng là một đánh giá đúng.

Do đó bất đẳng thức ban đầu được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a=b=c$.

Ví dụ 2. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2\le abc$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a^2+bc}+\frac{b}{b^2+ca}+\frac{c}{c^2+ab}\le\frac{1}{2}$$

Phân tích và lời giải

Tương tự như bài 1 ta chọn được $m=n=1$, khi đó áp dụng bất đẳng Cauchy- Schwarz dạng phân thức ta được

$$\frac{a}{a^2+bc}=\frac{a^2}{a^3+abc}\le\frac{a^2}{a^3+a^2+b^2+c^2}\le\frac{1}{4}\left(\frac{a^2}{a^3}+\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}\right)$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{a}{a^2+bc}+\frac{b}{b^2+ca}+\frac{c}{c^2+ab}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+1\right)$$

Ta cần chứng minh $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le 1$.

Thật vậy, áp dụng một đánh giá quen thuộc và kết hợp với giả thiết, ta được

$$1\ge\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}\ge\frac{ab+bc+ca}{abc}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=3$.

Ví dụ 3. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{c\left(c+a+3b\right)+c^2}+\frac{1}{a\left(a+b+3c\right)+a^2}+\frac{1}{b\left(b+c+3a\right)+b^2}\le\frac{1}{6}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$$

(Trích đề thi chọn HSG môn Toán 9 Tỉnh Nam Định năm học 2018 – 2019)

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz dạng phân thức ta được

$$\frac{1}{c\left(c+a+3b\right)+c^2}=\frac{1}{ac+2c^2+3bc}\le\frac{1}{9}\left(\frac{1}{2c^2}+\frac{1}{bc+ca}+\frac{1}{2bc}\right)\le\frac{1}{9}\left[\frac{1}{2c^2}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)+\frac{1}{2bc}\right]$$

Để ý rằng $\frac{1}{ca}=\frac{1}{2}.2.\frac{1}{a}.\frac{1}{c}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\right)$ và $\frac{1}{bc}=\frac{1}{2}.2.\frac{1}{b}.\frac{1}{c}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$ nên ta lại có

$$\frac{1}{18}\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{2ac}+\frac{3}{2bc}\right)\le\frac{1}{18}\left[\frac{1}{c^2}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{b^2}\right)\right]=\frac{1}{18}\left(\frac{2}{c^2}+\frac{1}{4a^2}+\frac{3}{4b^2}\right)$$

Từ đó ta được $\dfrac{1}{c(c+a+3b)+c^2} \le \dfrac{1}{18}\left(\dfrac{2}{c^2}+\dfrac{1}{4a^2}+\dfrac{3}{4b^2}\right)$

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{1}{a(a+b+3c)+a^2} \le \frac{1}{18}\left(\frac{2}{a^2}+\frac{1}{4b^2}+\frac{3}{4c^2}\right);\frac{1}{b(b+c+3a)+b^2} \le \frac{1}{18}\left(\frac{2}{b^2}+\frac{1}{4c^2}+\frac{3}{4a^2}\right)$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức cùng chiều trên thì ta được

$$\frac{1}{c(c+a+3b)+c^2}+\frac{1}{a(a+b+3c)+a^2}+\frac{1}{b(b+c+3a)+b^2} \le \frac{1}{6}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$$

Vậy bài toán được chứng minh hoàn tất. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

BÀI TOÁN TƯƠNG TỰ:

Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a(b+c)}{a^2+(b+c)^2}+\frac{b(c+a)}{b^2+(c+a)^2}+\frac{c(a+b)}{c^2+(a+b)^2} \le \frac{6}{5}$$

(Trích đề thi chọn HS dự thi HSGQG Tỉnh Thái Bình năm học 2014 – 2015)

Hướng dẫn: Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$a^2+(b+c)^2=\left[a^2+\frac{(b+c)^2}{4}\right]+\frac{3}{4}(b+c)^2 \ge a(b+c)+\frac{3}{4}(b+c)^2=\frac{(b+c)(4a+3b+3c)}{4}$$

Suy ra ta được $\dfrac{a(b+c)}{a^2+(b+c)^2} \le \dfrac{4a(b+c)}{(4a+3b+3c)(b+c)}=\dfrac{4a}{4a+3b+3c}$

Ví dụ 4. Cho x, y, $z>0$ và $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=4$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$P=\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}$$

Phân tích và lời giải

Quan sát giả thiết và biểu thức P, ta thấy có thể sử dụng bất đẳng thức Cauchy- Schwarz dạng phân thức theo chiều ngược lại để tách các số hạng ở từng mẫu.

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \ge \frac{4}{x+y};\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \ge \frac{4}{y+z} \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \ge \frac{4}{x+y}+\frac{4}{y+z} \ge \frac{16}{x+2y+z} \Rightarrow \frac{1}{x+2y+z} \le \frac{1}{16}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\right.$$

Tương tự

$$\frac{1}{2x+y+z} \le \frac{1}{16}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right);\frac{1}{x+y+2z} \le \frac{1}{16}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{z}\right)$$

$$S \le \frac{1}{16}\left(\frac{4}{x}+\frac{4}{y}+\frac{4}{z}\right)=1$$

Ví dụ 5. Cho a, b, c là số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{2ab}{3a+8b+6c}+\frac{3bc}{3b+6c+a}+\frac{3ca}{9c+4a+4b}\le\frac{a+2b+3c}{9}$$

(Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Phú Thọ năm 2011-2012)

Lời giải

Đặt $x=a$; $y=2b$; $z=3c$, khi đó bất đẳng thức trên được viết lại thành

$$\frac{xy}{3x+4y+2z}+\frac{yz}{3y+4z+2x}+\frac{zx}{3z+4x+2y}\le\frac{x+y+z}{9}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy- Schwarz dạng phân thức ta có

$$\frac{xy}{3x+4y+2z}=\frac{xy}{81}\cdot\frac{(6+2+1)^2}{2(x+y+z)+2y+x}\le\frac{xy}{81}\left(\frac{18}{x+y+z}+\frac{2}{y}+\frac{1}{x}\right)=\frac{2xy}{9(x+y+z)}+\frac{2x+y}{81}$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{yz}{3y+4z+2x}\le\frac{2y+z}{81}+\frac{2yz}{9(x+y+z)};\ \frac{zx}{3z+4x+2y}\le\frac{2z+x}{81}+\frac{2zx}{9(x+y+z)}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{xy}{3x+4y+2z}+\frac{yz}{3y+4z+2x}+\frac{zx}{3z+4x+2y}\le\frac{x+y+z}{27}+\frac{2(xy+yz+zx)}{9(x+y+z)}$$

Mà theo một đánh giá quen thuộc ta lại có $xy+yz+zx\le\frac{(x+y+z)^2}{3}$

Do đó ta có $\frac{x+y+z}{27}+\frac{2(xy+yz+zx)}{9(x+y+z)}\le\frac{x+y+z}{27}+\frac{2(x+y+z)}{27}=\frac{x+y+z}{9}$

Suy ra $\frac{xy}{3x+4y+2z}+\frac{yz}{3y+4z+2x}+\frac{zx}{3z+4x+2y}\le\frac{x+y+z}{9}$

Hay bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=2b=3c$.

Ví dụ 6. Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $12\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\le3+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

Chứng minh rằng: $\frac{1}{4a+b+c}+\frac{1}{a+4b+c}+\frac{1}{a+b+4c}\le\frac{1}{6}$

(Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Phú Thọ năm 2013 - 2014)

Lời giải

Theo một đánh giá quen thuộc ta có

$$4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2\le12\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\le3+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Suy ra $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-1\right)\left[4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+3\right]\le0$

Do đó ta được $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le 1$ và $a+b+c\ge 9$

Đặt $P=\frac{1}{4a+b+c}+\frac{1}{a+4b+c}+\frac{1}{a+b+4c}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy dạng $\frac{4}{x+y}\le\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ ta được

$$P=\frac{1}{4a+b+c}+\frac{1}{a+4b+c}+\frac{1}{a+b+4c}$$

$$\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3a}+\frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{3a}+\frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{3a}+\frac{1}{a+b+c}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3a}+\frac{1}{3b}+\frac{1}{3c}+\frac{3}{a+b+c}\right)\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

BÀI TOÁN TƯƠNG TỰ:

Câu 1. a) Cho a,b,c là các số thực bất kì và x,y,z là các số dương. Chứng minh:

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\ge\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$$

b)Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P=\frac{a^3+8}{a^3(b+c)}+\frac{b^3+8}{b^3(a+c)}+\frac{c^3+8}{c^3(a+b)}$ với a,b,c là số dương thỏa mãn $abc=1$.

Hướng dẫn

a) Ta có $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\ge\frac{(a+b)^2}{x+y}$ Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$

$\Rightarrow\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\ge\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$ Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$

b) Ta có

$$\frac{3a}{a^3(b+c)}+\frac{3b}{b^3(a+c)}+\frac{3c}{c^3(a+b)}\ge\frac{3(ab+bc+ca)^2}{2(a+b+c)}$$

$$P\ge\frac{3(ab+bc+ca)^2}{2(a+b+c)}+3(bc+ca+ad)\ge\frac{27}{2}$$

Vậy GTNN là $\frac{27}{2}$ khi $a=b=c=1$

Câu 2. Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3abc$.

Chứng minh $\frac{a}{b^2c^2}+\frac{b}{a^2c^2}+\frac{c}{a^2b^2}\ge\frac{9}{a+b+c}$.

Hướng dẫn

Ta có $\frac{a}{b^2c^2}+\frac{b}{a^2c^2}+\frac{c}{a^2b^2}=\frac{a^4}{a^3b^2c^2}+\frac{b^4}{b^3a^2c^2}+\frac{c^4}{c^3a^2b^2}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz dạng phân số ta được:

$$\frac{a^4}{a^3b^2c^2}+\frac{b^4}{b^3a^2c^2}+\frac{c^4}{c^3a^2b^2}\ge\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a^2b^2c^2\left(a+b+c\right)}=\frac{\left(3abc\right)^2}{a^2b^2c^2\left(a+b+c\right)}=\frac{9}{a+b+c}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

Câu 3. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a}+3\sqrt{b}}+\frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{b}+3\sqrt{c}}+\frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{c}+3\sqrt{a}}.$$

Hướng dẫn

Ta có: $P=\frac{a^2}{a+3\sqrt{ab}}+\frac{b^2}{b+3\sqrt{bc}}+\frac{c^2}{c+3\sqrt{ca}}$

Theo bất đẳng thức Bunhiacốpxki (dạng phân thức). Ta có:

$$P=\frac{a^2}{a+3\sqrt{ab}}+\frac{b^2}{b+3\sqrt{bc}}+\frac{c^2}{c+3\sqrt{ca}}\ge\frac{\left(a+b+c\right)^2}{a+b+c+3\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)}$$

$$P=\frac{a^2}{a+3\sqrt{ab}}+\frac{b^2}{b+3\sqrt{bc}}+\frac{c^2}{c+3\sqrt{ca}}\ge\frac{16}{4+3\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)}$$

(do $a+b+c=4$)

Theo bất đẳng thức Cô-si. Ta có:

$a+b\ge2\sqrt{ab}$; $b+c\ge2\sqrt{bc}$; $c+a\ge2\sqrt{ca}$

$\Rightarrow 2a+2b+2c\ge2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{ca}$

$\Rightarrow\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\le a+b+c=4\Rightarrow P\ge\frac{16}{4+3.4}=1$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}a;b;c>0\\a+b+c=4\\a=b=c\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=\frac{4}{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 1 khi $a=b=c=\frac{4}{3}$

DẠNG 5 : DÙNG BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY DẠNG NGHỊCH ĐẢO

Câu 1. Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $c\ge1,;\frac{1}{2b}+\frac{1}{c}\le2;\frac{1}{3a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{c}\le3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

Hướng dẫn

Dự đoán $T_{\max}=6$ đạt tại $3a=2b=c=1$.

Ta có $\frac{1}{2b}+\frac{1}{c}\le2\Rightarrow2\le\frac{4}{\frac{1}{2b}+\frac{1}{c}}\le\frac{1}{\frac{1}{2b}}+\frac{1}{\frac{1}{c}}=2b+c$

$$\frac{1}{3a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{c}\le 3\Rightarrow 3\le \frac{9}{\frac{1}{3a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{c}}\le \frac{1}{\frac{1}{3a}}+\frac{1}{\frac{1}{2b}}+\frac{1}{\frac{1}{c}}=3a+2b+c$$

Do đó $6=(3a+2b+c)\frac{1}{a}+(2b+c)(\frac{1}{b}-\frac{1}{a})+c(\frac{1}{c}-\frac{1}{b})\ge \frac{3}{a}+2(\frac{1}{b}-\frac{1}{a})+(\frac{1}{c}-\frac{1}{b})=T$.

Câu 2. Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $a+b=4ab$.

Chứng minh rằng: $\frac{a}{4b^2+1}+\frac{b}{4a^2+1}\ge \frac{1}{2}$

Hướng dẫn

Từ $a+b=4ab$

Áp dụng BĐT (AM- GM) ta có $ab\ge \frac{1}{4}$

Ta có $\frac{a}{4b^2+1}+\frac{b}{4a^2+1}=\frac{a^2}{4ab^2+a}+\frac{b^2}{4a^2b+b}\ge \frac{(a+b)^2}{4ab(a+b)+(a+b)}$

$=\frac{a+b}{4ab+1}=\frac{4ab}{4ab+1}=1-\frac{1}{4ab+1}\ge \frac{1}{2}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi a= b= $\frac{1}{2}$.

Câu 3. Cho ba số dương a,b,c .Chứng minh rằng $\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+a^2}\ge \frac{a+b+c}{2}$

Hướng dẫn

Ta có $\frac{a^3}{a^2+b^2}=a-\frac{ab^2}{a^2+b^2}$ (1)

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương a^2+b^2 ta được :

$a^2+b^2\ge 2\sqrt{a^2b^2}=2ab$

$\Leftrightarrow \frac{ab^2}{a^2+b^2}\le \frac{ab^2}{2ab}$

$\Leftrightarrow \frac{ab^2}{a^2+b^2}\le \frac{b}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{-ab^2}{a^2+b^2}\ge \frac{-b}{2}$

$\Leftrightarrow a-\frac{ab^2}{a^2+b^2}\ge a-\frac{b}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{a^3}{a^2+b^2}\ge a-\frac{b}{2}$

Chứng minh tương tự ta cũng được : $\frac{b^3}{b^2+c^2}\ge b-\frac{c}{2}$

$\frac{c^3}{c^2+a^2}\ge c-\frac{a}{2}$

Suy ra $\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+a^2}\ge a+b+c-\frac{a+b+c}{2}$

$\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+a^2}\ge \frac{a+b+c}{2}$

Câu 4. Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $a+b-64c+9=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{16c^2}{a+b}$

Hướng dẫn

Ta có $\frac{a^2}{b+c}+\frac{4}{9}(b+c)\geq\frac{4}{3}a;\ \frac{b^2}{c+a}+\frac{4}{9}(c+a)\geq\frac{4}{3}b;\ \frac{16c^2}{a+b}+(a+b)\geq 8c$ do đó ta được

$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{16c^2}{a+b}\geq\frac{1}{9}(64c-a-b)=1$ (do $64c-a-b=9$).

Dấu "=" xảy ra tại $\begin{cases}a=b=2c\\a+b-64c+9=0\end{cases}\Rightarrow(a;b;c)=\left(\frac{3}{10};\frac{3}{10};\frac{3}{20}\right)$.

DẠNG 6: DÙNG BẤT ĐẲNG THỨC BUNHIACOPXKI

Câu 1. Tìm GTLN của hàm số: $y=\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}$.

Hướng dẫn

Điều kiện: $\begin{cases}x-2\geq 0\\4-x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow 2\leq x\leq 4(*)$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki: $(ac+bd)^2\leq(a^2+b^2)(c^2+d^2)$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$.

Chọn $a=\sqrt{x-2};c=1;b=\sqrt{4-x};d=1$ với $2\leq x\leq 4$

Ta có:

$$y^2=\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}\right)^2\leq\left[\left(\sqrt{x-2}\right)^2+\left(\sqrt{4-x}\right)^2\right].\left(1^2+1^2\right)$$

$$\Leftrightarrow y^2\leq\left[(x-2)+(4-x)\right].2$$

$$\Leftrightarrow y^2\leq 4\Leftrightarrow|y|\leq 2$$

Vì y > 0 nên ta có: $0<y\leq 2$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\sqrt{x-2}=\sqrt{4-x}\Leftrightarrow x-2=4-x\Leftrightarrow x=3$ (Thỏa mãn (*))

Vậy GTLN của y là 2 tại x = 3.

Câu 2. Tìm GTLN, GTNN của hàm số: $y=3\sqrt{x-1}+4\sqrt{5-x}(1\leq x\leq 5)$.

Hướng dẫn

a) GTLN: Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki cho hai bộ số:

(3; 4) và ($(\sqrt{x-1};\sqrt{5-x})$ ta có:

$$y^2=(3.\sqrt{x-1}+4.\sqrt{5-x})^2\leq(3^2+4^2).\left[\left(\sqrt{x-1}\right)^2+\left(\sqrt{5-x}\right)^2\right]=100$$

$$\Leftrightarrow y^2\leq 100\Rightarrow y\leq 10$$

Dấu "=" xảy ra <= $\frac{\sqrt{x-1}}{3}-\frac{\sqrt{5-x}}{4}$ hay $\frac{x-1}{9}=\frac{5-x}{16}\Rightarrow x=\frac{61}{25}$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy GTLN của y là10 khi x = $\frac{61}{25}$

* b) Giá trị nhỏ nhất:

Ta có: y = $3\sqrt{x-1}+4\sqrt{5-x}=3\sqrt{x-1}+3\sqrt{5-x}+\sqrt{5-x}$
= $3\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{5-x}\right)+\sqrt{5-x}$

Đặt: A = $\sqrt{x-1}+\sqrt{5-x}$ thì t^2 = 4 + 2 $\sqrt{(x-1)(5-x)}$ $\geq$ 4

=> A ≥ 2 và dấu "=" xảy ra khi x = 1 hoặc x = 5
Vậy y ≥ 3 . 2 + 0 = 6
Dấu "=" xảy ra khi x = 5. Do đó GTNN của y là 6 khi x = 5

DẠNG 7. CÁC DẠNG KHÁC

Phương pháp 1: DỰ ĐOÁN KẾT QUẢ RỒI TÁCH THÍCH HỢP

<u>Bước 1:</u> Kẻ bảng dự đoán giái trị lớn nhất,nhỏ nhất và đạt tại giá trị nào của biến.
<u>Bước 2:</u> Kẻ bảng xác định số nào sẽ đi với nhau.
<u>Bước 3:</u> Tách ghép thích hợp số hạng và sử dụng bất đẳng thức Cô-si.

Ví dụ 1. Cho $a\geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2a+\frac{5}{a}$.

Hướng dẫn

<u>Phân tích bài toán</u>

a	2	3	4	…
P	$\frac{13}{2}\approx 6,5$	$\frac{23}{3}\approx 7,7$	$\frac{37}{4}\approx 9,25$	…

Từ bảng thứ nhất dự đoán $\min P=\frac{13}{2}\Leftrightarrow a=2$.

	a	$\frac{1}{a}$
$a=2$	2	$\frac{1}{2}$

Từ bảng thứ hai, ta suy ra $\frac{1}{a}$ sẽ đi với $\frac{a}{4}$ nên $\frac{5}{a}$ sẽ đi với $\frac{5a}{4}$.

<u>Trình bày</u>

Có $P=\left(\frac{5}{a}+\frac{5a}{4}\right)+\frac{3a}{4}\geq 2\sqrt{\frac{5}{a}\cdot\frac{5a}{4}}+\frac{3a}{4}=5+\frac{3a}{4}\geq 5+\frac{3.2}{4}=\frac{13}{2}$ (do $a\geq 2$).

Vậy $\min P=\frac{13}{2}$ khi $\begin{cases}\frac{5}{a}=\frac{5a}{4}\\ a=2\end{cases}\Leftrightarrow a=2$ (thỏa mãn).

Ví dụ 2. Cho $x>0,\ y>0$ và $x+y\leq 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F=x+y+\frac{6}{x}+\frac{24}{y}$
.

Hướng dẫn

<u>Phân tích bài toán</u>

$(x\ ;\ y)$	$(1\ ;\ 5)$	$(2\ ;\ 4)$	$(3\ ;\ 3)$	$(4\ ;\ 2)$	$(5\ ;\ 1)$
F	$\frac{84}{5}=16,8$	15	16	$\frac{39}{2}=19,5$	$\frac{156}{5}=31,2$

Từ bảng thứ nhất, ta dự đoán $\min F=15$ khi $x=2, y=4$.

	x	$\frac{1}{x}$	y	$\frac{1}{y}$
$x=2,y=4$	2	$\frac{1}{2}$	4	$\frac{1}{4}$

Từ bảng thứ hai, ta suy ra $\frac{1}{x}$ sẽ đi với $\frac{x}{4}$ nên $\frac{6}{x}$ sẽ đi với $\frac{6x}{4}=\frac{3x}{2}$; $\frac{1}{y}$ sẽ đi với $\frac{y}{16}$ nên $\frac{24}{y}$ sẽ đi với $\frac{24y}{16}=\frac{3y}{4}$.

Trình bày

Ta có $F=\left(\frac{6}{x}+\frac{3x}{2}\right)+\left(\frac{24}{y}+\frac{3y}{2}\right)-\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right)\geq 2\sqrt{\frac{6}{x}\cdot\frac{3x}{2}}+2\sqrt{\frac{24}{y}\cdot\frac{3y}{2}}-\frac{1}{2}(x+y)=18-\frac{1}{2}(x+y)$

$\geq 18-\frac{1}{2}\cdot 6=15$ (do $x+y\leq 6$).

Vậy $\min F=15$ khi $\frac{6}{x}=\frac{3x}{2};\frac{24}{y}=\frac{3y}{2};x+y=6\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=4\end{cases}$ (thỏa mãn).

Ví dụ 3. Cho $x>0,\ y>0$ và $x+y\geq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2x^2+y^2+\frac{28}{x}+\frac{1}{y}$.

Hướng dẫn

Phân tích bài toán

$(x;y)$	$(1;2)$	$(2;1)$
P	$\frac{69}{2}=34,5$	24

Từ bảng thứ nhất, ta dự đoán $\min P=24$ khi $x=2,y=1$.

	x	$\frac{1}{x}$	y	$\frac{1}{y}$
$x=2,y=1$	2	$\frac{1}{2}$	1	1

Từ bảng thứ hai, ta suy ra $\frac{1}{x}$ sẽ đi với $\frac{x}{4}$ nên $\frac{28}{x}$ sẽ đi với $\frac{28x}{4}=7x$; $\frac{1}{y}$ sẽ đi với y.

Trình bày Ta có $P=\left(\frac{28}{x}+7x\right)+\left(\frac{1}{y}+y\right)+2x^2+y^2-7x-y$

$=\left(\frac{28}{x}+7x\right)+\left(\frac{1}{y}+y\right)+2(x-2)^2+(y-1)^2+(x+y)-9$

$\geq 2\sqrt{\frac{28}{x}\cdot 7x}+2\sqrt{\frac{1}{y}\cdot y}+0+0+3-9=24.$

Vậy $\min P=24$ khi $\frac{28}{x}=7x;\frac{1}{y}=y;x-2=0;y-1=0;x+y=3\Leftrightarrow x=2,y=1$.

Ví dụ 4. Cho $2\leq x\leq 3,4\leq y\leq 6,4\leq z\leq 6$ và $x+y+z=12$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=xyz$

Hướng dẫn

Nhận xét: Do y và z vai trò như nhau nên sử dụng bất đẳng thức Cô-si đối với tích yz, ta được $P = x(yz) \le x\left(\dfrac{y+z}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}x(12-x)(12-x)$.

Đến đây ta kẻ bảng để dự đoán giá trị lớn nhất của P

x	2	3
P	50	$\dfrac{243}{4} = 60,75$

Từ bảng thứ nhất dự đoán $\max P = \dfrac{243}{4}$ khi $x = 3$.

	x	$12-x$
$x=3$	3	9

Từ bảng thứ hai, ta suy ra $3x$ sẽ đi với $12-x$ nên ta biến đổi

$$P \le \frac{1}{12}[(3x)(12-x)(12-x)] \le \frac{1}{12}\left(\frac{x+24}{3}\right)^3 \le \frac{1}{12}\left(\frac{3+24}{3}\right)^3 \le \frac{243}{4}.$$

Vậy $\max P = \dfrac{243}{4}$ khi $x = 3, y = z = \dfrac{9}{2}$.

Phương pháp 2: KẾT HỢP ĐẶT ẨN PHỤ VÀ DỰ ĐOÁN KẾT QUẢ

- Khi đặt ẩn phụ ta cần tìm điều kiện của ẩn phụ.
- Một số bất đẳng thức trung gian thường dùng:

▪ Với mọi a,b thì $2\left(a^2+b^2\right) \ge (a+b)^2 \ge 4ab$. Dấu bằng xảy ra khi $a=b$.

▪ Với mọi a,b,c thì $3\left(a^2+b^2+c^2\right) \ge (a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca)$. Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c$.

▪ Với mọi a,b thì $\dfrac{a^2+b^2}{2} \ge \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$ và $\dfrac{a^3+b^3}{2} \ge \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^3$ với $\forall a,b \ge 0$. Dấu bằng xảy ra khi $a=b$.

▪ $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b} \ge \dfrac{4}{a+b}$ với $\forall a>0, b>0$. Dấu bằng xảy ra khi $a=b$.

▪ $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \ge \dfrac{9}{a+b+c}$ với $\forall a>0, b>0, c>0$. Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c$.

Ví dụ 1. Cho $x>0,\ y>0$ và $\dfrac{x}{2}+\dfrac{8}{y} \le 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $K = \dfrac{x}{y}+\dfrac{2y}{x}$.

Hướng dẫn

Đặt $a = \dfrac{x}{y}$, do $2 \ge \dfrac{x}{2}+\dfrac{8}{y} \ge 2\sqrt{\dfrac{x}{2}.\dfrac{8}{y}} = 4\sqrt{\dfrac{x}{y}} \Rightarrow \dfrac{x}{y} \le \dfrac{1}{4} \Rightarrow 0 < a \le \dfrac{1}{4}$

Có $K = a + \dfrac{2}{a} = \left(\dfrac{2}{a}+32a\right) - 31a \ge 2\sqrt{\dfrac{2}{a}.32a} - 31a = 16 - 31a \ge 16 - 31.\dfrac{1}{4} = \dfrac{33}{4}$ (do $0 < a \le \dfrac{1}{4}$)

Vậy $MinK = \dfrac{33}{4}$ khi $a = \dfrac{1}{4}$ hay $x = 2, y = 8$.

Ví dụ 2. Cho $x>0, y>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \dfrac{(x+y+1)^2}{xy+x+y} + \dfrac{xy+x+y}{(x+y+1)^2}$

Đặt $a = \dfrac{(x+y+1)^2}{xy+x+y} \Rightarrow \dfrac{xy+x+y}{(x+y+1)^2} = \dfrac{1}{a}$

Do $(m+n+p)^2 \ge 3(mn+np+pm) \Rightarrow (x+y+1)^2 \ge 3(xy+x+y) \Rightarrow a \ge 3$

Vậy $MinA = \dfrac{10}{3}$ khi $a = 3 \Rightarrow x = y = 1$.

Ví dụ 3. Cho $x>0, y>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \dfrac{x^2+y^2}{xy} + \dfrac{\sqrt{xy}}{x+y}$

Hướng dẫn

Có $A = \dfrac{(x+y)^2 - 2xy}{xy} + \dfrac{\sqrt{xy}}{x+y} = \dfrac{(x+y)^2}{xy} + \dfrac{\sqrt{xy}}{x+y} - 2 = \left(\dfrac{x+y}{\sqrt{xy}}\right)^2 + \dfrac{\sqrt{xy}}{x+y} - 2$

Đặt $t = \dfrac{x+y}{\sqrt{xy}}$, do $x+y \ge 2\sqrt{xy} \Rightarrow \dfrac{x+y}{\sqrt{xy}} \ge 2 \Rightarrow t \ge 2$.

Ta được $A = t^2 + \dfrac{1}{t} - 2 = \left(\dfrac{t^2}{8} + \dfrac{1}{t}\right) + \dfrac{7}{8}t^2 - 2 \overset{Cosi}{\ge} 2\sqrt{\dfrac{t^2}{8}.\dfrac{1}{t}} + \dfrac{7}{8}t^2 - 2$

$= \sqrt{\dfrac{t}{2}} + \dfrac{7}{8}t^2 - 2 \ge \sqrt{\dfrac{2}{2}} + \dfrac{7}{8}.2^2 - 2 = \dfrac{5}{2}$ (do $t \ge 2$).

Vậy $MinA = \dfrac{5}{2}$ khi $t = 2 \Rightarrow x = y$.

Ví dụ 4. Cho $a>0, b>0, c>0$ thỏa mãn $b^2+c^2 \le a^2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P = \dfrac{1}{a^2}(b^2+c^2) + a^2\left(\dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}\right)$

Hướng dẫn

Có $P = \dfrac{1}{a^2}(b^2+c^2) + a^2\left(\dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}\right) \ge \dfrac{2bc}{a^2} + \dfrac{2a^2}{bc} = 2\left(\dfrac{bc}{a^2} + \dfrac{a^2}{bc}\right)$

Đặt $t = \dfrac{a^2}{bc} \ge \dfrac{b^2+c^2}{bc} \ge \dfrac{2bc}{bc} = 2$ ta được

$P = 2\left(t + \dfrac{1}{t}\right) = 2\left[\left(\dfrac{t}{4} + \dfrac{1}{t}\right) + \dfrac{3t}{4}\right] \ge 2\left[2\sqrt{\dfrac{t}{4}.\dfrac{1}{t}} + \dfrac{3t}{4}\right] = 2\left(1 + \dfrac{3t}{4}\right) \ge 2\left(1 + \dfrac{3.2}{4}\right) = 5$ (do $t \ge 2$).

Vậy $MinP = 5$ khi $\begin{cases} b = c \\ b^2+c^2 = a^2 \end{cases} \Leftrightarrow b = c = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$

Ví dụ 5. Cho $x>0, y>0$ và $x+y \le 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P = \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right).\sqrt{1+x^2y^2}$

Hướng dẫn

Có $P \ge \left(2\sqrt{\dfrac{1}{x}.\dfrac{1}{y}}\right).\sqrt{1+x^2y^2} = 2\sqrt{\dfrac{1}{x.y} + xy}$

Đặt $a = xy$, do $xy \le \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2 \le \dfrac{1}{4} \Rightarrow 0 < a \le \dfrac{1}{4}$, ta được

$P \ge 2\sqrt{\dfrac{1}{a} + a} = 2\sqrt{\left(\dfrac{1}{a} + 16a\right) - 15a} \ge 2\sqrt{2\sqrt{\dfrac{1}{a}.16a} - 15a} = 2\sqrt{8 - 15a} \ge 2.\sqrt{8 - 15.\dfrac{1}{4}} = \sqrt{17}\left(do\, 0 < a \le \dfrac{1}{4}\right)$

Vậy $MinP = \sqrt{17}$ khi $x = y = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 6: Cho $x > 0, y > 0$ và $x + y \le 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{xy} + 4xy.$$

Hướng dẫn

Có $P = \left(\frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{2xy}\right) + \left(\frac{1}{2xy} + 4xy\right)$. Sử dụng $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \ge \frac{4}{a+b}$ với $\forall a, b > 0$.

Khi đó $\frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{2xy} \ge \frac{4}{x^2 + y^2 + 2xy} = \frac{4}{(x+y)^2} \ge \frac{4}{1^2} = 4$ (do $0 < x + y \le 1$).

Suy ra $P \ge 4 + \left(\frac{1}{2xy} + 4xy\right)$. Đặt a = xy, $do\ xy \le \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \le \frac{1}{4} \Rightarrow 0 < a \le \frac{1}{4}$.

Suy ra $P \ge 4 + \left(\frac{1}{2a} + 4a\right) = 4 + \left(\frac{1}{2a} + 8a\right) - 4a \ge 4 + 2\sqrt{\frac{1}{2a}.8a} - 4a = 8 - 4a \ge 8 - 4.\frac{1}{4} = 7$ (do $0 < a \le \frac{1}{4}$)

Vậy $MinP = 7$ khi $x = y = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 7: Cho x,y >0 và $x + y \le 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $K = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2$

Hướng dẫn

Cách 1: Sử dụng $\frac{a^2 + b^2}{2} \ge \left(\frac{a+b}{c}\right)^2$ với $\forall a, b$ và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \ge \frac{4}{a+b} \forall a, b > 0.$

ta được $K = 2.\frac{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2}{2} \ge 2.\left(\frac{x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y}}{2}\right)^2 \ge \frac{1}{2}\left(x + y + \frac{4}{x+y}\right)^2$

Đặt $a = x + y$, điều kiện $0 < a \le 1$, ta được:

$K \ge \frac{1}{2}\left(a + \frac{4}{a}\right)^2 = \frac{1}{2}\left[\left(a + \frac{1}{a}\right) + \frac{3}{a}\right]^2 \ge \frac{1}{2}\left[2\sqrt{a.\frac{1}{a}} + \frac{3}{a}\right]^2$

$= \frac{1}{2}\left(2 + \frac{3}{a}\right)^2 \ge \frac{1}{2}.\left(2 + \frac{3}{1}\right)^2 = \frac{25}{2}$(do $0 < a \le 1$). Vậy, $MinK = \frac{25}{2}$ khi $x = y = \frac{1}{2}$.

Cách 2: $K = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 = \left(x^2 + y^2\right) + \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right) + 4 \ge 2.\left(xy + \frac{1}{xy}\right) + 4.$

Đặt $a = xy$, do $xy \le \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \le \frac{1}{4} \Rightarrow 0 < a \le \frac{1}{4}$. Ta được:

$K \geq 2.\left(\frac{1}{2}+\frac{15}{4a}\right)+4 \geq 2.\left(\frac{1}{2}+\frac{15}{4.\frac{1}{4}}\right)+4=\frac{25}{2}$ (do $0<a \leq \frac{1}{4}$). Vậy $MinK=\frac{25}{2}$ khi $x=y=\frac{1}{2}$.

Ví dụ 8: Cho $x>0, y>0$ và $x+y \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S=\left(1+x+\frac{1}{x}\right)^3+\left(1+y+\frac{1}{y}\right)^3$$

Hướng dẫn

Sử dụng $\frac{a^3+b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$ với $\forall a+b \geq 0$ và $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$ $\forall a+b>0$.

Khi đó $S=2.\frac{\left(1+x+\frac{1}{x}\right)^3+\left(1+y+\frac{1}{y}\right)^3}{2} \geq 2\left(\frac{1+x+\frac{1}{x}+1+y+\frac{1}{y}}{2}\right)^3$

Đặt $a=x+y$, điều kiện $0<a \leq 1$, ta được

$$S \geq \frac{1}{4}\left(2+a+\frac{4}{a}\right)^3=\frac{1}{4}\left[2+\left(a+\frac{1}{a}\right)+\frac{3}{a}\right]^3 \geq \frac{1}{4}\left[2+2\sqrt{a.\frac{1}{a}}+\frac{3}{a}\right]^3=\frac{1}{4}\left(4+\frac{3}{a}\right)^3 \geq \frac{1}{4}\left(4+\frac{3}{1}\right)^3=\frac{343}{4}$$

Vậy $\text{MinS}=\frac{343}{4}$ khi $x=y=\frac{1}{2}$

BÀI TOÁN TƯƠNG TỰ

Câu 1. Cho biểu thức $A=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{24}+\sqrt{25}}$, $B=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{24}}$.

a) Tính giá trị của A.

b) Chứng minh $B>8$.

Hướng dẫn

a) Tính giá trị của A.

$$A=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{24}+\sqrt{25}}.$$

Nhận xét: ta nhận thất các số trong căn hơn kém nhau một đơn vị, nếu bỏ được dấu căn và trừ đi được cho nhau thì khi đó mẫu số khi đó bằng cộng, trừ một. Khi đó làm mất được mẫu số. Phương pháp quen thuộc khi bỏ căn đó là nhận với biểu thức liên hợp.

$$A=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{24}+\sqrt{25}}=\frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}}{1-2}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3}+...+\frac{\sqrt{24}-\sqrt{25}}{24-25}$$

$$=-\sqrt{1}+\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{3}-...-\sqrt{24}+\sqrt{25}.$$

Vậy $A=4$.

b) Chứng minh $B>8$.

$$B=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{24}}.$$

Nhận xét: ta thấy dấu chứng minh của B không có dấu bằng, khử căn ở mẫu số thì không đưa được mẫu số về một để làm mất mẫu số đi. Hướng giải quyết bài toán là tạo hai đại lượng cho bài toán giống câu a.

Ta có $B=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{24}}=2\left(\frac{1}{2.\sqrt{1}}+\frac{1}{2.\sqrt{2}}+\frac{1}{2.\sqrt{3}}+...+\frac{1}{2.\sqrt{24}}\right)$

$=2.\left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{24}+\sqrt{24}}\right).$

Vì: $\sqrt{1}+\sqrt{1}<\sqrt{1}+\sqrt{2}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}>\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}$.

Khi đó $B>2.\left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{24}+\sqrt{25}}\right)$.

Mà $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{24}+\sqrt{25}}=4$ theo câu a.

Suy ra $B>2.4=8$. Vậy $B>8$ (đpcm).

Câu 2. Rút gọn biểu thức

a) $A=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$, với $n\in\mathbb{N};n\geq 2$.

b) $B=\frac{1}{\sqrt{1}-\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{4}}-...+\frac{1}{\sqrt{2n-2}-\sqrt{2n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n}}$, với $n\in\mathbb{N};n\geq 1$.

Hướng dẫn

a) Rút gọn $A=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$.

Nhận xét: đây là bài toán tổng quát của dạng bài toán trên. Phương pháp ta nhân liên hợp để khử căn thức ở mẫu số.

$A=\frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}}{1-2}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{3-4}+...+\frac{\sqrt{n-1}-\sqrt{n}}{n-1-n}$

$=-\sqrt{1}+\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{3}+\sqrt{4}-...-\sqrt{n-1}+\sqrt{n}=\sqrt{n}-1$.

Vậy $A=\sqrt{n}-1$.

a. Rút gọn $B=\frac{1}{\sqrt{1}-\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{4}}-...+\frac{1}{\sqrt{2n-2}-\sqrt{2n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n}}$.

$B=\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}}{1-2}-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2-3}+\frac{\sqrt{3}+\sqrt{4}}{3-4}-...+\frac{\sqrt{2n-2}+\sqrt{2n-1}}{2n-2-(n-1)}-\frac{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n}}{2n-1-2n}$

$=-\left(\sqrt{1}+\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\left(\sqrt{3}+\sqrt{4}\right)+...-\left(\sqrt{2n-2}+\sqrt{2n-1}\right)+\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n}$

$=-\sqrt{1}-\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{3}-\sqrt{4}+...-\sqrt{2n-2}-\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n}=\sqrt{2n}-1$.

Vậy $B=\sqrt{2n}-1$.

Câu 3. Chứng minh:

a) $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n.(n+1)}<1$, với $n\in\mathbb{N}^*$.

b) $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}<2$, với $n\in\mathbb{N}^*$.

Hướng dẫn

a) Ta có $\frac{1}{n.(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.

Nên $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n.(n+1)}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}<1$.

Vậy $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n.(n+1)}<1$, với $n\in\mathbb{N}^*$ (đpcm).

b) Ta có $0<n-1<n\Rightarrow(n-1)n<n.n\Rightarrow\frac{1}{(n-1)n}>\frac{1}{n.n}$, hay $\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n.n}<\frac{1}{(n-1)n}$

Nên $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}<1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=1+1-\frac{1}{n}<2$ (vì $\frac{1}{n}>0$).

Vậy $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}<2$, với $n\in\mathbb{N}^*$ (đpcm).

Câu 4. Chứng minh $\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}<2$, (vế trái có n dấu căn, $n\in\mathbb{N}^*$).

Hướng dẫn

Với $n=1$. Khi đó bất đẳng thức $\Leftrightarrow\sqrt{2}<2$ (luôn đúng).

Với $n>1$. Khi đó $\sqrt{2}<2\Leftrightarrow 2+\sqrt{2}<2+2=4\Leftrightarrow\sqrt{2+\sqrt{2}}<\sqrt{4}=2$ $\Leftrightarrow 2+\sqrt{2+\sqrt{2}}<2+2=4$ $\Leftrightarrow\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}<2$. Suy ra $\underbrace{\sqrt{2+...+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}_{n}<2$ (có n dấu căn, $n\in\mathbb{N}^*$).

Vậy $\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}<2$, (vế trái có n dấu căn, $n\in\mathbb{N}^*$) (đpcm).

Câu 5. Chứng minh $2<\underbrace{\sqrt{6+\sqrt{6+...+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}}_{n}<3$, (có n dấu căn, $n\in\mathbb{N}^*$).

Hướng dẫn

Với $n=1$. Khi đó bất đẳng thức $\Leftrightarrow\sqrt{4}<\sqrt{6}<\sqrt{9}\Leftrightarrow 2<\sqrt{6}<\sqrt{9}$ (luôn đúng).
Với $n>1$.

Ta có $\underbrace{\sqrt{6+\sqrt{6+...+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}}_{n}>\sqrt{6}>\sqrt{4}=2$, (có n dấu căn, $n\in\mathbb{N}^*$) (1).

Và $\sqrt{6}<\sqrt{9}\Leftrightarrow\sqrt{6}<3\Leftrightarrow 6+\sqrt{6}<9\Leftrightarrow\sqrt{6+\sqrt{6}}<3\Leftrightarrow\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}<3$.

Suy ra $\underbrace{\sqrt{6+\sqrt{6+...+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}}_{n}<3$ (có n dấu căn, $n\in\mathbb{N}^*$) (2).

Từ (1) và (2) được $2<\underbrace{\sqrt{6+\sqrt{6+...+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}}_{n}<3$.

Vậy $2<\underbrace{\sqrt{6+\sqrt{6+...+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}}_{n}<3$, (có n dấu căn, $n\in\mathbb{N}^*$).

Câu 6. Chứng minh $\frac{1}{4}<\frac{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}_{n}}{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}_{n-1}}<\frac{1}{3}$

(tử số có n dấu căn, mẫu số có $n-1$ dấu căn, $n\in\mathbb{N}^*, n>2$).

Hướng dẫn

Nhận xét: ta nhận thấy số căn của tử số nhiều hơn số căn của mẫu số một dấu căn. Để so sánh được chúng ta đưa về cùng một số căn để so sánh. Phương pháp là mất bớt dấu căn là dùng phép nhân liện hợp.

Ta có $VT = \dfrac{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}_{n}}{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}_{n-1}}$ nhân cả tử số và mẫu số với biểu thức liên hợp của tử số là $2+\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}_{n}$.

Khi đó $VT = \dfrac{\left(2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}_{n}\right)\left(2+\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}_{n}\right)}{\left(2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}_{n-1}\right)\left(2+\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}_{n}\right)}$

$= \dfrac{2^2-\left(2+\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}_{n-1}\right)}{\left(2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}_{n-1}\right)\left(2+\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}_{n}\right)}$

$= \dfrac{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}_{n-1}}{\left(2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}_{n-1}\right)\left(2+\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}_{n}\right)}$

$= \dfrac{1}{2+\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}_{n}}$.

Mà ta lại có:

Với $n>2, n\in N^*$. Khi đó $1<\sqrt{2}<2 \Leftrightarrow 3<2+\sqrt{2}<2+2=4 \;\; \Leftrightarrow 1<\sqrt{3}<\sqrt{2+\sqrt{2}}<\sqrt{4}=2$

$\Leftrightarrow 3<2+\sqrt{2+\sqrt{2}}<2+2=4 \;\; \Leftrightarrow 1<\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}<2$.

Suy ra $1<\underbrace{\sqrt{2+...+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}_{n}<2 \;\; \Leftrightarrow 3<2+\underbrace{\sqrt{2+...+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}_{n}<4$.

Khi đó $\dfrac{1}{4}<\dfrac{1}{2+\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}_{n}}<\dfrac{1}{3}$.

Vậy $\dfrac{1}{4}<\dfrac{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}_{n}}{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}_{n-1}}<\dfrac{1}{3}$

(tử số có n dấu căn, mẫu số có $n-1$ dấu căn, $n \in \mathbb{N}^*, n > 2$).

Câu 7. Chứng minh $17 < \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + ... + \frac{1}{\sqrt{100}} < 18$.

Hướng dẫn

Nhận xét: Bài toán này phương pháp là tạo ra mẫu số hai số để so sánh với số đứng liền trước nó và số đứng liền sau nó.

Ta có $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + ... + \frac{1}{\sqrt{100}}$

$= 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{4}} + ... + \frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{100}}\right)$

Khi đó $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{4}} + ... + \frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{100}}$

$< \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + ... + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$

$= \frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}}{1-2} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{3-4} + ... + \frac{\sqrt{99}-\sqrt{100}}{99-100}$

$= -\sqrt{1} + \sqrt{2} - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{3} + \sqrt{4} - ... - \sqrt{99} + \sqrt{100} = -1 + 10 = 9$.

Suy ra $2\left(\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{4}} + ... + \frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{100}}\right) < 18 \; (1)$.

Và

$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{4}} + ... + \frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{100}} > \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} + ... + \frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{101}}$

$= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{3-4} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{5}}{4-5} + ... + \frac{\sqrt{100}-\sqrt{101}}{100-101}$

$= -\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{3} + \sqrt{4} - \sqrt{4} + \sqrt{5} - ... - \sqrt{100} + \sqrt{101}$ $= -\sqrt{2} + \sqrt{101} > \sqrt{100} - \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{17}{2}$ (vì $2 < \frac{9}{4} \Leftrightarrow -\sqrt{2} > -\sqrt{\frac{9}{4}}$ và $\sqrt{101} > \sqrt{100}$)

Nên $17 < 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{4}} + ... + \frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{100}}\right) \; (2)$.

Vậy $17 < \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + ... + \frac{1}{\sqrt{100}} < 18$ (đpcm).

Câu 8. Chứng minh $\frac{1}{\sqrt{1.1999}} + \frac{1}{\sqrt{2.1998}} + \frac{1}{\sqrt{3.1997}} + ... + \frac{1}{\sqrt{1999.1}} > 1,999$.

Hướng dẫn

Nhận xét: ta nhận thấy vế trái, tổng các số trong căn các đều là 2000, và số đầu tiên trong căn chạy từ 1 đến và số thứ hai trong căn chạy từ 1999 về đến 1, suy ra có 1999 phân số. Vế phải là $1,999 = \frac{1999}{1000} = \frac{2.1999}{2000}$.

Bất đẳng thức áp dụng là $\sqrt{ab} \le \frac{a^2+b^2}{2}$ (với $a,b \ge 0$). Dấu "=" xảy ra khi khi $a=b$.

Ta có $\sqrt{1.1999} < \frac{1+1999}{2} = \frac{2000}{2}$ (bất đẳng thức không xảy ra dấu bằng vì $1 \ne 1999$)

Suy ra $\frac{1}{\sqrt{1.1999}} > \frac{2}{2000}$.

Khi đó $VT = \frac{1}{\sqrt{1.1999}} + \frac{1}{\sqrt{2.1998}} + \frac{1}{\sqrt{3.1997}} + ... + \frac{1}{\sqrt{1999.1}}$

$> \underbrace{\frac{2}{2000} + \frac{2}{2000} + \frac{2}{2000} + ... + \frac{2}{2000}}_{1999}$ $(1999$ phân số$)$

$> \frac{2.1999}{2000} = 1.999$.

Vậy $\frac{1}{\sqrt{1.1999}} + \frac{1}{\sqrt{2.1998}} + \frac{1}{\sqrt{3.1997}} + ... + \frac{1}{\sqrt{1999.1}} > 1,999$ (đpcm).

Câu 9. Chứng minh $\frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2$.

Hướng dẫn

Nhận xét: $VT = \frac{1}{2\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}$

MỘT SỐ KĨ THUẬT

* Kỹ thuật chứng minh bất đẳng thức, tìm Min – Max

1) Kỹ thuật chọn điểm rơi

Kỹ thuật chọn điểm rơi là kỹ thuật rất quan trọng đối với những ai bước đầu nghiên cứu về bất đẳng thức Cô-si (AM-GM). Để áp dụng kỹ thuật này, người giải toán cần làm các bước sau:

Bước 1: Dự đoán được biểu thức của đề bài đạt dấu bằng khi các biến bằng mấy, hoặc mối quan hệ của các biến khi xảy ra dấu bằng (hay còn gọi là **điểm rơi**).

Bước 2: Khéo léo tách ghép để khi áp dụng BĐT Cô-si (AM-GM) thì giá trị đại số của các số hạng phải bằng nhau tại **điểm rơi.**

Bước 3: Xử lý phần còn lại (phần dư sau tách, ghép) dựa vào dữ kiện ban đầu của bài toán. Thông thường, nếu dự đoán đúng điểm rơi thì phần còn lại sẽ khá dễ xử lý (thường chỉ cần thay điều kiện ban đầu của bài toán là xong).

VÍ DỤ MINH HỌA

Bài 1. Cho $x \ge 1$. Tìm Min $P = 3x + \frac{1}{2x}$.

Hướng dẫn

Dự đoán $x=1$ (việc dự đoán chủ yếu là do kinh nghiệm của người giải bài, hiện nay chúng ta có thể dùng máy tính Casio để dự đoán điểm rơi nhờ các chức năng lập bảng giá trị (chức năng Table) hoặc thay số (chức năng CALC)).

Khi $x=1 \Rightarrow \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}; 3x = 3 \Rightarrow$ Ta cần ghép sao cho giá trị đại số của các đối tượng đem Cô-si phải bằng nhau, ngoài ra phải ghép để khi áp dụng bđt thì biến triệt tiêu bớt đi, ví dụ ta ghép $\frac{x}{2}$ với $\frac{1}{2x}$ vì 2 số hạng này cùng bằng $\frac{1}{2}$ khi x = 1, ngoài ra, khi áp dụng bđt thì 2 số hạng này nhân với nhau sẽ triệt tiêu ẩn x.

Do đó, ta có Hướng dẫn như sau:

$P=\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}+\frac{5x}{2}\geq 2\sqrt{\frac{x}{2}.\frac{1}{2x}}+\frac{5x}{2}\geq 2.\frac{1}{2}+\frac{5.1}{2}=\frac{7}{2}$ (lưu ý điều kiện $x\geq 1$ của đề bài để thay vào $\frac{5x}{2}$)

Vậy Min $P=\frac{7}{2}\Leftrightarrow x=1$.

Bài 2. Cho $a\geq 10;b\geq 100;c\geq 1000$. Tìm Min $P=a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}+c+\frac{1}{c}$

Hướng dẫn

Bài toán bản chất tìm Min của $a+\frac{1}{a};b+\frac{1}{b};c+\frac{1}{c}$

Xét $a+\frac{1}{a}$, dự đoán điểm rơi $a=10\Rightarrow \frac{1}{a}=\frac{1}{10}$

$\Rightarrow a+\frac{1}{a}=\frac{a}{100}+\frac{1}{a}+\frac{99a}{100}\geq \frac{2}{10}+\frac{99}{10}=\frac{101}{10}$

Tương tự $\Rightarrow P_{\min}=1110+\frac{111}{1000}$ khi $a=10;\ b=100;\ c=1000$

Bài 3. Cho $a,b,c>0$ thoả mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng: $\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}\leq\sqrt{6}$

Hướng dẫn

Dự đoán dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}\Rightarrow a+b=b+c=c+a=\frac{2}{3}$.

$\Rightarrow$ Ta có cách nhóm như sau:

$$\sqrt{(a+b).\frac{2}{3}}\leq\frac{a+b+\frac{2}{3}}{2}$$

$$\sqrt{(b+c).\frac{2}{3}}\leq\frac{b+c+\frac{2}{3}}{2}$$

$$\sqrt{(c+a).\frac{2}{3}}\leq\frac{c+a+\frac{2}{3}}{2}$$

$$\Rightarrow\sqrt{\frac{2}{3}}.P\leq a+b+c+1\Rightarrow\sqrt{\frac{2}{3}}.P\leq 2\Leftrightarrow P\leq\sqrt{6}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{2}{3}$.

Bài 4. Cho $x,y\geq 1$. Chứng minh rằng: $x\sqrt{y-1}+y\sqrt{x-1}\leq xy$.

Hướng dẫn

Dự đoán: Do bất đẳng thức có dạng đối xứng 2 biến $\Rightarrow$ Min thường xảy ra khi $x=y$.

Ta đi tìm điểm rơi như sau:

$x\sqrt{y-1}+y\sqrt{x-1}=xy$

$\Leftrightarrow 2x\sqrt{x-1}=x^2$ (thay $x=y$)

$\Leftrightarrow x=2$

Vậy dấu bằng xảy ra khi $x=y=2$

$\Rightarrow x=2;\sqrt{y-1}=1$

Do cần xuất hiện $xy \Rightarrow$ ta xử lý như sau:

$$x\sqrt{y-1}=x\sqrt{(y-1).1}\le x.\frac{y-1+1}{2}=\frac{xy}{2}$$

$$y\sqrt{x-1}=y\sqrt{(x-1).1}\le y.\frac{x-1+1}{2}=\frac{xy}{2}$$

$\Rightarrow P\le xy$ (đpcm)

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x=y=2$

Bài 5. Cho $x,y>0$, thoả mãn $x+y\le 1$. Tìm Min $A=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\left(1-\frac{1}{y^2}\right)$

Hướng dẫn

Bài toán xử lý khá khó, do đó ta sử dụng mẹo chọn điểm rơi như sau

Dự đoán dấu bằng $\Leftrightarrow x=y=\frac{1}{2}\Rightarrow$ Min $A=9$.

Vậy ta chứng minh $\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\left(1-\frac{1}{y^2}\right)\ge 9$ là một điều luôn đúng

Ta trình bày như sau:

Ta chứng minh $\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\left(1-\frac{1}{y^2}\right)\ge 9$ luôn đúng $\forall x,y>0$ thoả mãn $x+y\le 1$

$\Leftrightarrow \left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)\ge 9x^2y^2 \Leftrightarrow -\left(x^2+y^2\right)+1\ge 8x^2y^2$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+8x^2y^2\le 1 \Leftrightarrow 8x^2y^2\le 2xy \Leftrightarrow xy\le \frac{1}{4}$ (luôn đúng)

Vì $2\sqrt{xy}\le x+y\le 1\Rightarrow xy\le \frac{1}{4}$ (luôn đúng) $\Rightarrow$ đpcm

Bài 6. Cho $x,y\in\mathbb{R}$ thoả mãn: $x+y+xy=8$. Tìm Min $P=x^2+y^2$

Hướng dẫn

Dự đoán dấu bằng xảy ra khi $x=y$

Từ điều kiện $\Rightarrow x^2+2x-8=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-4 \end{array}\right.$

Thay $x=y=2\Rightarrow P=8$

$x=y=-4\Rightarrow P=32$

Dự đoán $P_{Min}=8\Leftrightarrow x=y=2$. Ta có ***Hướng dẫn*** như sau:

Ta có: $x^2+4\ge 4x\ (1)$ (Vì $x^2=4$ khi $x=2$ nên ta ghép x^2+4)

$y^2+4\ge 4y\ (2)$

$x^2+y^2\ge 2xy\Rightarrow 2\left(x^2+y^2\right)\le 4xy\ (3)$

Cộng $(1),(2),(3)\Rightarrow 3\left(x^2+y^2\right)+8\ge 4\left(x+y+xy\right)\Rightarrow x^2+y^2\ge 8$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x=y=2$

Bài 7. Cho $a,b\in\mathbb{R}$ thoả mãn: $0\le a\le 3;\ 8\le b\le 11$ **và** $a+b=11$

Tìm Max $P=ab$

Hướng dẫn

Dự đoán điểm rơi

+ Bài toán có thể sẽ rơi vào các điểm đặc biệt là $(0;11)$; $(1;10)$; $(2;9)$; $(3;8)$ (nói nôm na là hiện tượng đặc biệt (Min-Max) sẽ thường xảy ra ở những điểm đặc biệt).

Dễ thấy cặp $(3;8)$ cho ab đạt Max $\Rightarrow a=3; b=8$

Khi ghép và áp dụng Cô-si, ta cần cân bằng các hệ số. Ta tách như sau:

$P=\frac{1}{24}.(8a)(3b)$ (vì $8a=3b=24$ khi $a=3, b=8$).

$$\Rightarrow P \le \frac{1}{24}.\frac{(8a+3b)^2}{4}=\frac{\left[3(a+b)+5a\right]^2}{96} \le \frac{(11+5.3)^2}{96}=24 \text{ (vì } a \le 3)$$

$\Rightarrow Max\ P=24$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=11 \\ a=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=8 \end{cases}$

Bài 8. Cho $a \ge 0; b \ge 0; c \ge 3$ thoả mãn $a+b+c=6$. Chứng minh rằng $abc \le \frac{27}{4}$

Hướng dẫn

Dự đoán: đầu tiên, ta dự đoán $c=3$

Do vai trò a,b giống nhau $\Rightarrow a=b$

$\Rightarrow$ Điểm rơi: $a=b=\frac{3}{2}; c=3$

Xét $P=abc=2.a.b.\frac{c}{2}$

Do $x+y+z \ge 3.\sqrt[3]{xyz} \Rightarrow xyz \le \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3$

$$\Rightarrow P \le 2.\left(\frac{a+b+\frac{c}{2}}{3}\right)^3=2.\left(\frac{2a+2b+c}{6}\right)^3 \Rightarrow P \le 2.\left[\frac{(a+b+c)+a+b}{6}\right]^3$$

Do $a+b+c=6$, mà $c \ge 3 \Rightarrow a+b=6-c \le 3$

$\Rightarrow P \le 2.\left(\frac{6+3}{6}\right)^2=\frac{27}{4}$ (đpcm)

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Cho $x \ge 3$. Tìm Min $P=x+\frac{1}{x}$

Bài 2. Cho $x \ge 2$. Tìm Min $P=x+\frac{1}{x}$

Bài 3. Cho $a,b,c>0$ thoả mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$\sqrt{a(b+3c)}+\sqrt{b(c+3a)}+\sqrt{c(a+3b)} \le 6$

Bài 4. Cho $a,b,c>0$ thoả mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$\frac{a^2}{b+2}+\frac{b^2}{c+2}+\frac{c^2}{a+2} \ge 1$

Bài 5. Cho $a,b>0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{8ab}{(a+b)^2}\ge 4$$

Bài 6. Cho $a,b,c>0$ thoả mãn $a+2b+3c\ge 20$. Chứng minh rằng

$$P=a+b+c+\frac{3}{a}+\frac{9}{2b}+\frac{4}{c}\ge 13$$

Hướng dẫn

Bài 1. Ghép

$$P=\frac{x}{9}+\frac{1}{x}+\frac{8x}{9}\ge 2\sqrt{\frac{1}{9}}+\frac{8.3}{9}=\frac{16}{3}$$

Bài 2.

$$P=\frac{x}{8}+\frac{x}{8}+\frac{1}{x^2}+\frac{3x}{4}\ge 3.\sqrt[3]{\frac{1}{64}}+\frac{3.2}{4}=\frac{9}{4}$$

Bài 3.

Xét $\sqrt{4a\left(b+3c\right)}\le\frac{4a+b+3c}{2}$ (Dự đoán $a=b=c=1$)

$$\sqrt{4b\left(c+3a\right)}\le\frac{4b+c+3a}{2}$$

$$\sqrt{4c\left(a+3b\right)}\le\frac{4c+a+3b}{2}$$

$$\Rightarrow 2P\le 4\left(a+b+c\right)=12\Rightarrow P\le 6$$

Bài 4. Dự đoán $a=b=c=1$

$$\frac{a^2}{b+2}+\frac{b+2}{9}\ge 2.\frac{a}{3}$$

Tương tự $P+\frac{a+b+c+6}{9}\ge\frac{2}{3}\left(a+b+c\right)\Rightarrow P\ge 1$

Bài 5. Dự đoán dấu bằng xảy ra khi $a=b$

Ta thấy nếu xử lý ngay, bài toán có xu hướng bị ngược dấu.

$\Rightarrow$ Nên biến đổi rồi xử lý

Ta có: $P=\frac{a^2+b^2}{ab}+\frac{8ab}{(a+b)^2}$

Đến đây, chỉ cần tạo ra $\frac{\left(a+b\right)^2}{ab}$ có số hạng thứ 1 thì Cô-si được

$$\Rightarrow P=\frac{a^2+b^2+2ab-2ab}{ab}+\frac{8ab}{\left(a+b\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow P=\frac{\left(a+b\right)^2}{ab}+\frac{8ab}{\left(a+b\right)^2}-2$$

+) Đến đây, mặc dù có thể Cô-si để triệu tiêu ẩn được nhưng bài toán sẽ không ra kết quả mà ta mong muốn, và dấu bằng không xảy ra $\Rightarrow$ Xem xét nếu $a=b$ thì

$$\begin{cases}\frac{\left(a+b\right)^2}{ab}=\frac{4a^2}{a^2}=4\\ \frac{8ab}{\left(a+b\right)^2}=\frac{8a^2}{4a^2}=2\end{cases}\Rightarrow \text{Phải tách hạng tử thứ nhất ra để nó bằng 2}$$

$$\Rightarrow P=\frac{(a+b)^2}{2ab}+\frac{8ab}{(a+b)^2}+\frac{(a+b)^2}{2ab}-2\ge 4+2-2\Rightarrow P\ge 4 \text{ (đpcm)}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}(a+b)^4=16a^2b^2\\(a+b)^2=4ab\end{cases}\Leftrightarrow a=b$

Bài 6. Mò điểm rơi, ta thấy dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=2;b=3;c=4\Rightarrow$ Tách

$$P=\frac{3a}{4}+\frac{3}{a}+\frac{a}{4}+\frac{b}{2}+\frac{9}{2b}+\frac{b}{2}+\frac{c}{4}+\frac{4}{c}+\frac{3c}{4}$$

$$\Rightarrow P\ge 3+\frac{a}{4}+3+\frac{b}{2}+2+\frac{3c}{4}\Rightarrow P\ge 8+\frac{a+2b+3c}{4}=8+\frac{20}{4}=13 \text{ (đpcm)}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=2;b=3;c=4$.

**** Các bài toán phức tạp hơn***

Trong quá trình giải bài, để tránh việc dự đoán điểm rơi dễ dàng hoặc áp dụng điều kiện dễ, người ta có thể cho bài toán có điều kiện phức tạp để đánh lạc hướng $\Rightarrow$ cần phải xử lý điều kiện trước khi giải.

Bài 1. Cho $x,y>0$ thoả mãn $2x^2+2xy+y^2-2x\le 8$. Tìm Min $P=\frac{2}{x}+\frac{4}{y}-2x-3y$

Từ điều kiện $\Rightarrow (x+y)^2+(x-1)^2\le 9$

Do $(x-1)^2\ge 0\Rightarrow (x+y)^2\le 9\Rightarrow x+y\le 3$

Dự đoán $x=1;\ y=2$

$$\Rightarrow P=\frac{2}{x}+2x+\frac{4}{y}+y-4x-4y\ge 2\sqrt{4}+2\sqrt{4}-4(x+y)\ge 4+4-12=-4$$

$Min=-4\Leftrightarrow x=1;y=2$

Bài 2. Cho $a,b,c>0$ thoả mãn $2(b^2+bc+c^2)=3(3-a^2)$. Tìm Min $T=a+b+c+\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}$

Từ điều kiện $\Rightarrow 3a^2+2b^2=2bc+2c^2=9$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2bc+2ab+2ca+a^2-2ab+b^2+a^2-2ac+c^2=9$

$\Leftrightarrow (a+b+c)^2+(a-b)^2+(a-c)^2=9\Leftrightarrow (a+b+c)^2\le 9\Leftrightarrow a+b+c\le 3$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$

*** Phương pháp cân bằng hệ số Cô-si**

2 loại:

+ Loại 1: nhẩm được điểm rơi

+ Loại 2: không nhẩm được điểm rơi

Loại 1: Cho $\begin{cases}x,y,z\in\mathbb{R}\\x^2+2y^2+5z^2=22\end{cases}$. Tìm Max $S=xy+yz+zx$

Xử lý: $xy+yz+zx\le k(x^2+2y^2+5z^2)$

Mò được điểm rơi $x=3; y=2; z=1 \Rightarrow \begin{cases} 9a=4b \\ 9(1-a)=c \\ (2-b).4=5-c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{2}{3} \\ b=\dfrac{3}{2} \\ c=3 \end{cases}$

Hướng dẫn

Ta có $\frac{2}{3}x^2+\frac{3}{2}y^2 \ge 2xy$

$\frac{1}{3}x^2+3z^2 \ge 2xz$

$\frac{1}{2}y^2+2z^2 \ge 2yz$

$\Rightarrow xy+yz+zx \le \dfrac{x^2+2y^2+5z^2}{2}=11$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x=3; y=2; z=1$

Ví dụ 2. Cho $\begin{cases} x,y,z>0 \\ xy+yz+zx=1 \end{cases}$. Tìm Min $P=x^2+28y^2+28z^2$

Dự đoán: Do y,z vai trò giống nhau $\Rightarrow y=z$

Tìm tham số $ay^2+az^2 \ge 2ayz$

$(28-a)y^2+bx^2 \ge 2\sqrt{(28-a)b}.xy$

$(28-a)z^2+(1-b)x^2 \ge 2\sqrt{(28-a)(1-b)}.xz$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} (28-a)y^2=bx^2 \\ (28-a)z^2=(1-b)x^2 \end{cases}$. Do $y=z \Rightarrow b=1-b \Rightarrow b=\dfrac{1}{2}$

Do kỳ vọng đánh giá $x^2+28y^2+28z^2 \ge k(xy+yz+zx)$

$\Rightarrow \begin{cases} a=\sqrt{(28-a)b} \\ a=\sqrt{(28-a)(1-b)} \end{cases}$

Thay $b=\dfrac{1}{2} \Rightarrow a=\sqrt{(28-a).\dfrac{1}{2}} \Rightarrow a^2=-\dfrac{1}{2}a+14$

$\Rightarrow a^2+\dfrac{a}{2}-14=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{7}{4} \\ a=-4\ \ (l) \end{array}\right. \Rightarrow a=\dfrac{7}{2}$

Hướng dẫn

$\frac{7}{2}y^2+\frac{7}{2}z^2 \ge 7yz$

$\frac{49}{2}y^2+\frac{1}{2}x^2 \ge \frac{7}{2}xy$

$\frac{49}{2}z^2+\frac{1}{2}x^2 \ge \frac{7}{2}xz$

$\Rightarrow x^2+28y^2+28z^2 \ge \dfrac{7}{2}(xy+yz+zx)=\dfrac{7}{2} \Rightarrow 7y^2+7y^2+y^2=28$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ x = 7y = 7z \end{cases}$

Tương tự: Cho $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ xy + yz + zx = 1 \end{cases}$. **Tìm Min** $P = 3\left(x^2 + y^2\right) + z^2$

Dự đoán: $x = y \Rightarrow ax^2 + ay^2 \geq 2axy$

$(3-a)x^2 + bz^2 \geq 2\sqrt{(3-a)b}xz$

$(3-a)y^2 + (1-b)y^2 \geq 2\sqrt{(3-a)(1-b)}yz$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ a = \sqrt{(3-a).\frac{1}{2}} \Rightarrow a^2 = -\frac{1}{2}a + \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2a^2 + a - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 1; b = \frac{1}{2}$$

Hướng dẫn

$x^2 + y^2 \geq 2xy$

$2x^2 + \frac{1}{2}z^2 \geq 2xz$

$2y^2 + \frac{1}{2}z^2 \geq 2yz$

$\Rightarrow 3\left(x^2 + y^2\right) + z^2 \geq 2(xy + yz + zx) = 2$

Ví dụ 3. Cho $\begin{cases} xy + yz + zx = 3 \\ x, y, z > 0 \end{cases}$. Tìm Min $T = 6x^2 + y^2 + 6z^2$

Dự đoán: $x = z$

$\Rightarrow ax^2 + az^2 \geq 2axz \ (a > 0)$

$(6-a)x^2 + by^2 \geq 2\sqrt{(6-a)b}xy$

$(6-a)z^2 + (1-b)y^2 \geq 2\sqrt{(6-a)(1-b)}zx$

$$\Rightarrow \begin{cases} (6-a)x^2 = by^2 \\ (6-a)z^2 = (1-b)y^2 \end{cases} \Rightarrow b = 1 - b \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{(6-a)b} \Leftrightarrow a = \sqrt{(6-a).\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 2a^2 + a - 6 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$$

Hướng dẫn

$\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}z^2 \geq 3xz$

$\frac{9}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 \geq 3xy$

$\frac{9}{2}z^2 + \frac{1}{2}y^2 \geq 3zx$

$\Rightarrow T \geq 9$.