**ĐỀ TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 – CHUYÊN TỰ NHIÊN HÀ NỘI VÒNG 2**

**Câu 1.**

1. Giải hệ phương trình 
2. Giải phương trình 

**Câu 2.**

1. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương ta luôn có:

chia hết cho 42

1. Với là các số thực dương thay đổi thỏa mãn điều kiện:



Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức : 

**Câu 3.**

Cho tam giác cân tại có đường tròn nội tiếp Các điểm theo thứ tự thuộc các cạnh khác sao cho tiếp xúc với đường tròn (I) tại điểm Gọi lần lượt là hình chiếu vuông góc của trên Giả sử cắt tại P. Gọi là hình chiếu vuông góc của trên 

1. Chứng minh rằng là phân giác của 
2. Ký hiệu lần lượt là diện tích của các tứ giác và . Chứng minh rằng : 
3. Gọi là trung điểm của cạnh Chứng minh rằng ba điểm thẳng hàng.

**Câu 4.** Cho là tập tất cả số nguyên liên tiếp từ đến Chứng minh rằng trong số đôi một phân biệt được chọn bất kỳ từ luôn tồn tại ba số phân biệt có tổng bằng 0.

**ĐÁP ÁN**

**Câu 1.**

1. Ta có:



Do phương trình thứ nhất nên , do đó ta kết hợp hai phương trình lại ta có: 

TH2: thay vào phương trình thứ nhất ta có 

Vậy hệ đã cho có hai cặp nghiệm 

1. ĐK: 

Đặt và Ta có:



Ta thấy, nếu thì và tức là VT<VP, mâu thuẫn. Tương tự với cũng mâu thuẫn , do đó , phương trình đề tương đương với : 

Vậy 

**Câu 2.**

1. Trước hết ta chứng minh rằng 

Thật vậy, ta có 

Dễ thấy là tích 3 số nguyên liên tiếp nên nó chia hết cho 6

Theo định lý Ơ le thì ,tức là chia hết cho 7

Vậy chia hết cho . Khẳng định (1) được chứng minh.

Từ đó,



Từ đó ta có khẳng định của bài toán

1. Đặt . Sử dụng bđt AM-GM, ta có: 

Hay 

Từ đó, ta có . Suy ra :



Dấu xảy ra khi và chỉ khi 

**Câu 3.**

****

1. Sử dụng định lý Talet trong tam giác với , ta có:

Sử dụng định lý Talet trong có ta có: 

Do đó: 

Hai tam giác và có và nên

Mặt khác, ta lại có (so le trong) và (so le trong), do đó: là phân giác của 

1. Ta có nên 

Chứng minh tương tự , ta cũng có 

Theo chứng minh câu a, hai tam giác nên



Hai tam giác và có 

Hai tam giác và có nên đồng dạng với nhau.

Suy ra 

Ta kết hợp (1) và (2) ta thu được: 

1. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử nằm cùng phía với so với như hình vẽ. Gọi là giao điểm của và Áp dụng định lý Menelauyt cho tam giác với cát tuyến ta có:



Mà hai tam giác và đồng dạng với nhau có và là hai đường cao tương ứng nên , suy ra (3)

Để chứng minh ba điểm thẳng hàng, ta chỉ cần chứng minh thẳng hàng

Theo định lý Menelaus đảo áp dụng cho tam giác điều này tương đương với ta phải chứng minh: 

Lại có và 

Do đó, chỉ cần chứng minh 

Kết hợp (3) và (4), ta đưa bài toán về chứng minh: 

Hay (5)

Gọi lần lượt là tiếp điểm của đường tròn với Đặt Ta sẽ chứng minh:

 (6)

Thật vậy, sử dụng định lý cosin trong các tam giác ta có



Suy ra 

Từ đây, ta có: 

Hay 

Như thế ta có : 

Do nên (6) được chứng minh, sử dụng (6) vừa chứng minh ta có:



Đẳng thức (5) được chứng minh. Ta có điều phải chứng minh.

**Câu 4.**

Đặt Ta chứng minh mệnh đề tổng quát :*”Trong số phân biệt từ tập hợp luôn tồn tại ba số phân biệt có tổng bằng 0.* Ta chứng mnh bằng phương pháp phản chứng. Giả sử tồn tại số nguyên dương sao cho có thể chọn ra số phân biệt từ tập hợp mà trong đó không có 3 số phân biệt nào có tổng bằng 0. Gọi là số nhỏ nhất có tính chất như vậy. Khi đó (vì với thì mệnh đề đúng). Vì là số nhỏ nhất làm cho mệnh để không đúng nên mệnh đề đúng với Nếu trong các số được chọn có ít nhất số thuộc thì do mệnh đề đúng với sẽ tồn tại ba số phân biệt trong các số được chọn có tổng bằng 0. Mâu thuẫn. Vậy có tối đa số được chọn thuộc Suy ra trong 4 số có ít nhất 3 số được chọn. Suy ra 0 không được chọn

* Nếu cả hai số của cặp được chọn. Chia tập thành  cặp ;,…..,ta thấy từ mỗi cặp ta chỉ chọn được tối đa 1 số . suy ra chỉ lấy được tối đa số. Mâu thuẫn
* Nếu chỉ có một số của cặp được chọn thì theo lý luận ở trên, cặp được chọn. Không mất tính tổng quát ta giả sử được chọn còn không được chọn. Lúc này chia các phần tử còn lại thành cặp , một bộ ba số và một phần tử lẻ cặp Từ mỗi cặp ta lấy được tối đa một số, tự bộ ba số ta cũng lấy được tối đa 1 số. Từ đó ta lấy được tối đa  số, mâu thuẫn

Vậy trong mọi trường hợp đều dẫn đến mâu thuẫn, tức là điều giả sử sai. Mệnh đề được chứng minh. Áp dụng mệnh đề cho ta có điều phải chứng minh