|  |  |
| --- | --- |
| **SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**  **TỈNH QUẢNG NAM** | **KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH THPT**  **NĂM HỌC 2023 – 2024 ĐỢT 2** |
| |  | | --- | | **HDC CHÍNH THỨC** | | **HƯỚNG DẪN CHẤM**  **MÔN: TOÁN LỚP 11 (CHUYÊN)** |

*(Bản hướng dẫn này gồm 07 trang)*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Câu** | **Nội dung** | **Điểm** |
| **1** | **Câu 1. (3,0 điểm)** Cho dãy số thực  xác định bởi  với mọi . Chứng minh dãy  có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó. | **3,0** |
|  | Nhận xét dãy số  Biến đổi  Đặt dãy số  ta được | 0,25  0,25 |
| Dùng BĐT AM-GM ta được:  suy ra | 0,5 |
| Dấu bằng xảy ra khi  hay là  điều này vô lý, nên dấu bằng không xảy ra. | 0,25 |
| Vậy ta luôn có  ( bị chặn trên ) | 0,25 |
| Mặt khác xét | 0,5 |
| Suy ra dãy số tăng và bị chặn trên nên tồn tại giới hạn hữu hạn *L*. | 0,5 |
| Từ công thức truy hồi suy ra . Vậy | 0,5 |
|  |  |  |
| **2** | **Câu 2. (3,0 điểm)** *Tìm tất cả các hàm số đa thức  thỏa mãn*  *.* | **3,0** |
|  | Giả sử tồn tại hàm số  thỏa yêu cầu đề bài  + Xét  suy ra  (2) | 0,5 |
|  | Đặt  So sánh bậc 2 vế của (2) ta được: | 0,5 |
| Nếu , thay vào (1) ta được . Thử lại thỏa mãn. | 0,5 |
| Nếu  Thay vào (1) ta được: | 0,5  0,5 |
| . Thử lại thỏa mãn | 0,25 |
| Vậy hàm số tìm được là  hoặc | 0,25 |
|  |  |
|  |  |
| **3** | **Câu 3. (3,0 điểm)** |  |
| **a.** | *a/* *Tìm tất cả các giá trị nguyên của  thỏa mãn phương trình .* | **1,0** |
| Ta có phương trình:  Biến đổi tương đương ta được  Với  là các số nguyên nên ta có các trường hợp sau | 0,25 |
| 1)  (loại) 2)  (loại) | 0,25 |
| 3)  (nhận) 4)  (nhận) | 0,25 |
| Vậy có 2 nghiệm  và | 0,25 |
|  |  |  |
| **b.** | **Câu 3.**  *b/ Tìm tất cả các số nguyên dương  và số nguyên tố  thỏa mãn* | **2,0** |
| Không mất tính tổng quát, ta giả sử  Từ:  suy ra: | 0,25 |
| Dễ thấy:  , ngoài ra từ (2) ta có: .  Từ (1) ta có :  Chuyển vế ta được: | 0,75 |
| + Nếu thử lại được , nếu  ta xét các trường hợp dưới đây | 0,25 |
| 1)  ta có  vô lý  2) Với  ta có  mâu thuẫn  3) Với  ta có  mâu thuẫn  4) Với  ta có  mâu thuẫn  5) Với  ta kết hợp với (2) có  suy ra  Mà ta lại có  suy ra (5) mâu thuẫn | 0,5 |
| Vậy ta chỉ có hai bộ số (1,2,3) hoặc (2,1,3) thỏa mãn bài toán. | 0,25 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Câu** | **Nội dung** | **Điểm** |
| **4** | **Câu 4.** (**5,0 điểm**) Cho tam giác *ABC* nhọn  và điểm *D* nằm trên đường trung tuyến *AM* kẻ từ đỉnh *A* của tam giác (*D* khác *A*). Gọi *E* là điểm trên đoạn *MC (E* khác *M, C)*. Gọi *H*, *K* lần lượt là hình chiếu của *D* lên *AB* và *AC*. Gọi (*C1*) và (*C2*) lần lượt là hai đường tròn ngoại tiếp tam giác *BHE* và *CKE*, (*C1*) cắt (*C2*) tại điểm thứ hai là *L*. Gọi *d* là đường thẳng kẻ từ *B* vuông góc với *BC*, *d* cắt (*C1*) tại điểm thứ hai là *I,* *N* là giao điểm thứ hai của *IL* và (*C2*).  a) Chứng minh *BI* song song *NC*.  b) Gọi *P* là giao điểm của *IL* và *BC*. Chứng minh tứ giác *ALMP* nội tiếp đường tròn. | **5,0** |
| **a.** | *a/**Chứng minh rằng BI song song NC.* | **2,0** |
|  | 0,25 |
| ***Cách 1***.  Xét hai đường tròn (C1) và (C2) có hai giao điểm là L, E và có hai cát tuyến lần lượt là ILN và BEC, theo định lý Reim thì BI song song NC. | 1,75 |
| ***Cách 2***.  + Xét tứ giác nội tiếp IBEL có nên | 0,75 |
| Suy ra với tứ giác nội tiếp LECN thì ta được | 0,5 |
| + Vậy | 0,5 |
|  |  |  |
|  |  |  |
| **b.** | **Câu 4.**  *b/* *Gọi P là giao điểm của IL với BC. Chứng minh rằng tứ giác ALMP nội tiếp đường tròn* | **3,0** |
| *(Có thể không có đường tròn C1)* | 0,25 |
| Gọi đường tròn (*C3*) ngoại tiếp 3 đỉnh *A,H,K*. | 0,25 |
| Khi đó: điểm *L* là điểm Miquel của 3 đường tròn (*C1), (C2), (C3*) tương ứng 3 điểm *H, E,* *K* trên 3 cạnh của tam giác *ABC*. | 0,5 |
| Gọi *O* là giao điểm của *IL* và (*C3*).  Theo câu (a) ta vận dụng cho 2 đường tròn *(C2), (C3*) suy ra *AO //NC* (hoặc vận dụng định lý Reim cho cho 2 đường tròn *(C2), (C3*) có 2 cát tuyến lần lượt là *AKC* và *OLN*)  Khi đó ta được: | 0,75 |
| + Vì nên *D* thuộc đường tròn (*C3*) và *AD* là đường kính | 0,25 |
| + Suy ra OD //BC nên | 0,25 |
| + Lại có | 0,25 |
| + Suy ra  hay là | 0,25 |
| + Vậy *ALMP* là tứ giác nội tiếp đường tròn. | 0,25 |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
| **5** | **Câu 5. (3,0 điểm)** Cho đoạn thẳng *AB* được chia thành bốn phần bằng nhau bởi ba điểm *M, N, P* (*hình vẽ*). Ta đánh dấu 2024 điểm phân biệt trong đoạn *AB* bằng cách ***chia đều*** trong mỗi đoạn *AM, MN, NP, PB* có 506 điểm, thỏa mãn điều kiện với một điểm bất kỳ thuộc đoạn *AM* thì tồn tại một điểm thuộc đoạn *MN* đối xứng với nhau qua *M;* tương tự với một điểm bất kỳ thuộc đoạn *PB* thì tồn tại một điểm thuộc đoạn *NP* đối xứng với nhau qua *P*. Sau đó ta thực hiện tô màu đỏ cho 1012 điểm tùy ý và 1012 điểm còn lại màu đen. Chứng minh tổng các khoảng cách từ *A* đến các điểm màu đỏ bằng tổng các khoảng cách từ *B* đến các điểm màu đen. | **3,0** |
| + Định hướng bằng đường thẳng từ *A* tới *B* và giả sử *N* là gốc, điểm *B* có tọa độ là 1 còn điểm *A* có tọa độ là -1. | 0,25 |
| + Theo giả thiết 506 điểm  ( có tọa độ bất kỳ thuộc đoạn *AM* thì ta cũng có tương ứng 506 điểm  có tọa độ  đối xứng với  qua *M*, suy ra  với . | 0,5 |
| Tương tự với 506 điểm  có tọa độ  bất kỳ thuộc đoạn *PB* thì ta cũng có tương ứng 506 điểm  có tọa độ  đối xứng với  qua *P*, suy ra  với . | 0,5 |
| + Tính tổng tọa độ 2024 điểm như sau | 0,25 |
| + Gọi tọa độ của 1012 điểm màu đỏ là , suy ra tổng khoảng cách từ các điểm màu đỏ đến *A* là | 0,5 |
| + Gọi tọa độ của 1012 điểm màu đen là , suy ra tổng khoảng cách từ các điểm màu đen đến *B* là | 0,5 |
| Ta lại có = =0 | 0,25 |
| Vậy  hay là tổng khoảng cách từ các điểm màu đỏ đến *A* bằng tổng khoảng cách từ các điểm màu đen đến *B* | 0,25 |
|  |  |  |
|  |  |  |
| **6** | **Câu 6. (3,0 điểm)** Cho hai số thực  thỏa mãn . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức . | **3,0** |
| **Cách 1.**  Xét y = 0 và x ≥ 0.  Ta chứng minh P không bị chặn trên khi | 0,5 |
| y=0, | 0,25 |
| Ta có:  nên | 0,5 |
|  | 1,0 |
| Khi  thì | 0,5 |
| Vậy nên P không có giá trị lớn nhất trên miền . | 0,25 |
|  | **Cách 2.** |  |
|  | Ta có: | 0,25 |
|  |  | 0,25 |
|  | Đặt | 0,25 |
|  |  | 0,25 |
|  | CM được :  , | 0,5 |
|  | Có :  nên: | 0,5 |
|  | Đặt : | 0,25 |
|  | Gọi | 0,5 |
|  | Vì  nên không tồn tại giá trị lớn nhất của P | 0,25 |

**---------- HẾT----------**

***\* Lưu ý:*** *Nếu thí sinh làm bài không theo cách nêu trong HDC nhưng đúng thì vẫn cho đủ số điểm từng phần như hướng dẫn quy định.*