
MỤC LỤC

Nội dung	Trang
Mục lục	1
1.MỞ ĐẦU	2
1.1 Lý do chọn đề tài.....	2
1.2. Mục đích nghiên cứu.....	2
1.3. Đối tượng nghiên cứu.....	2
1.4. Phương pháp nghiên cứu.....	2
2. NỘI DUNG	3
2.1. Cơ sở lí luận.....	3
2.1.1. Quy tắc xét sự biến thiên bằng đạo hàm.....	3
2.1.2. Quy tắc xét dấu một biểu thức.....	3
2.1.3. Tìm giá trị lớn nhất giá trị nhỏ nhất của hàm số.....	3
2.2. Thực trạng vấn đề	4
2.3. Giải pháp và tổ chức thực hiện.....	5
2.3.1. Các bước thực hiện	6
2.3.2 Bài toán tổng quát.....	6
2.3.3 Ví dụ minh họa.....	6
2.3.4 Bài tập rèn luyện.....	15
2.4. Hiệu quả của sáng kiến kinh nghiệm.....	16
3. KẾT LUẬN, KIẾN NGHỊ	17
Tài liệu tham khảo.....	18
Phục lục	19

1. MỞ ĐẦU

1.1. Lý do chọn đề tài

Hệ phương trình là một dạng toán phổ biến trong các đề thi tuyển sinh THPT Quốc Gia và đề thi học sinh giỏi các cấp. Đây là một câu hỏi khó trong đề, vì nó có thể xuất hiện ở nhiều dạng khác nhau và vận dụng nhiều kiến thức tổng hợp. Trong nhiều tài liệu, tôi nhận thấy các bài toán thường được chia ra thành rất nhiều phương pháp và kỹ thuật giải gây khó khăn cho người đọc khi muốn nắm hết nội dung. Khá nhiều học sinh lúng túng khi phải đối mặt với những bài toán này, bởi vì các em không biết nên lựa chọn phương pháp nào để làm trong rất nhiều phương pháp đã được học. Xu hướng về phương pháp giải hệ phương trình trong các đề thi các năm gần đây và các đề thi học sinh giỏi các tỉnh đều đa số sử dụng phương pháp hàm số. Chính vì vậy tôi đã chọn viết đề tài “ ***Giải hệ phương trình bằng phương pháp xét hàm số độc lập***”.

1.2. Mục đích nghiên cứu

Đề tài này góp phần trang bị đầy đủ kiến thức về giải hệ bằng phương pháp hàm số, đồng thời phát triển tư duy cho học sinh : tư duy sáng tạo ,tư duy phân tích , tổng hợp ,tư duy trừu tượng ,và thói quen đặt câu hỏi ngược khi giải quyết một vấn đề, nhìn nhận vấn đề dưới nhiều góc cạnh từ đó tìm phương án tốt nhất để giải quyết hiệu quả nhất. Những yếu tố trên cũng rất cần thiết trên con đường thành công của mỗi học sinh trong tương lai .

1.3. Đối tượng nghiên cứu:

Đề tài được áp dụng trong phần giải hệ bằng phương pháp hàm số dành cho học sinh ôn thi học sinh giỏi và ôn thi THPT Quốc gia .

1.4. Phương pháp nghiên cứu:

Ở đây tôi nêu ra phương pháp xây dựng cơ sở lý thuyết thông qua một số hệ phương trình tiêu biểu, có hệ phương trình dễ dàng áp dụng khi xét hàm độc lập, có hệ phải trải qua nhiều bước biến đổi kết hợp với đánh giá điều kiện mới áp dụng được. Trong mỗi ví dụ tôi đã cố gắng phân tích để dẫn dắt người đọc hiểu và áp dụng được phương pháp hàm số để giải. Bên cạnh đó tôi còn nêu ra một số bài tập để người đọc có thể rèn luyện thêm kiến thức.

2. NỘI DUNG

2.1. Cơ sở lý luận:

2.1.1. Quy tắc xét sự biến thiên bằng đạo hàm

Định lý: Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$. Khi đó

- $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a;b) \Rightarrow f$ đồng biến trên $(a;b)$;
- $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a;b) \Rightarrow f$ nghịch biến trên $(a;b)$;
- $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a;b) \Rightarrow f$ không đổi trên $(a;b)$.

Nhận xét: Từ định lý trên, ta thấy việc xét sự biến thiên của hàm số thực chất là xét dấu của đạo hàm. Như vậy ta cần nắm được

- Quy tắc xét dấu của nhị thức bậc nhất;
- Quy tắc xét dấu của tam thức bậc hai;
- Quy tắc xét dấu của một biểu thức.

2.1.2. Quy tắc xét dấu một biểu thức

Giả sử hàm $y = g(x)$ không xác định hoặc triệt tiêu tại các điểm $x_1, x_2, \dots, x_n$ đôi một khác nhau và $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Ký hiệu I là một trong các khoảng $(-\infty; x_1)$, $(x_1; x_2)$, ..., $(x_{n-1}; x_n)$, $(x_n; +\infty)$. Khi đó nếu g liên tục trên I thì không đổi dấu trên đó.

2.1.3. Tìm giá trị lớn nhất giá trị nhỏ nhất của hàm số.

Để tìm giá trị lớn nhất (GTLN), giá trị nhỏ nhất (GTNN) của một hàm số, ta có hai quy tắc sau đây:

2.1.3.1. Quy tắc 1 (Sử dụng định nghĩa)

Giả sử f xác định trên $D \subset \mathbb{R}$. Ta có

$$M = \max_{x \in D} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq M \quad \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = M \end{cases}; \quad m = \min_{x \in D} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq m \quad \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = m \end{cases}.$$

2.1.3.2 . Quy tắc 2 (Quy tắc tìm GTLN, GTNN của hàm số trên một đoạn)

Để tìm giá GTLN, GTNN của hàm số f xác định trên đoạn $[a; b]$, ta làm như sau:

- **B1** Tìm các điểm $x_1, x_2, \dots, x_m$ thuộc khoảng $(a; b)$ mà tại đó hàm số f có đạo hàm bằng 0 hoặc không có đạo hàm.
- **B2** Tính $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_m), f(a), f(b)$.
- **B3** So sánh các giá trị tìm được ở bước 2. Số lớn nhất trong các giá trị đó chính là GTLN của f trên đoạn $[a; b]$; số nhỏ nhất trong các giá trị đó chính là GTNN của f trên đoạn $[a; b]$.

$$\max_{x \in [a; b]} f(x) = \max \{ f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_m), f(a), f(b) \}.$$

$$\min_{x \in [a; b]} f(x) = \min \{ f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_m), f(a), f(b) \}.$$

Quy ước. Khi nói đến GTLN, GTNN của hàm số f mà không chỉ rõ GTLN, GTNN trên tập nào thì ta hiểu là GTLN, GTNN trên tập xác định của f .

2.2. Thực trạng vấn đề

* **Vấn đề thứ nhất:** Trong sách giáo khoa lớp 10 kiến thức chưa đủ để đề cập đến phương pháp này. Trong chương trình lớp 12 đã học về đạo hàm và các ứng dụng của nó nhưng cũng không có ví dụ hay bài tập nói về việc giải hệ theo phương pháp hàm số.

* **Vấn đề thứ hai:** Một số tài liệu đề cập phương pháp này nhưng chưa phân tích sâu bản chất của phương pháp trên khi áp dụng vào giải hệ.

* **Vấn đề thứ ba:** Trong quá trình giảng dạy tại trường tôi nhận thấy học sinh thực hiện giải còn lúng túng trong quá trình tách hàm độc lập và cách xử lý điều kiện trong từng bài. Cụ thể qua các bài kiểm tra ôn tập ở lớp 12T1, 12T2 trường THPT Quảng Xương 1 tôi, thấy học sinh lúng túng trong việc thực hiện giải các bài toán dạng trên, đặc biệt là một số bài đòi hỏi sự biến đổi lắt léo.

Kết quả của thực trạng: Trường THPT Quảng Xương 1 là một ngôi trường dày truyền thống dạy và học. Nhiều năm qua trường luôn dẫn đầu trong thành tích học sinh giỏi và xếp top đầu trong kỳ thi đại học –cao đẳng trong tỉnh. Dưới sự lãnh đạo của Ban giám hiệu và đội ngũ giáo viên luôn trăn trở tìm tòi , đổi mới phương pháp giảng dạy nhằm nâng cao chất lượng giáo dục toàn diện cho học sinh .Nhà trường không chỉ chú trọng truyền thụ tri thức mà còn phát triển tư duy cho học sinh thông qua các bài học, làm hành trang vững chắc cho các em bước vào tương lai. Khi gặp bài hệ phương trình giải bằng phương pháp hàm số có thêm điều kiện kèm theo thì học sinh gặp khó khăn khi giải quyết, đặc biệt là học sinh trung bình và yếu.Khi giải các bài toán về hệ phương trình có sử dụng phương pháp hàm số, nếu tiến hành theo các bước cơ bản không được thì tâm lý học sinh thường nản và bỏ qua . Theo số liệu thống kê trước khi dạy đề tài này ở hai lớp 12T1,12T2 trường THPT Quảng Xương 1 năm học 2015-2016.

Kết quả thu được như sau:

Năm học	Lớp	Sĩ số	Số học sinh giải được trước khi thực hiện đề tài	
2015-2016	12T1	40	7	
	12T2	44	5	

Từ thực trạng trên, để giúp các em có cách nhìn toàn diện và giải quyết các bài toán dạng trên một cách nhanh gọn tôi xin trình bày nội dung sáng kiến kinh nghiệm:

2.3. Giải pháp và tổ chức thực hiện.

2.3.1. Các bước thực hiện :

Để giải quyết các khó khăn còn tồn tại ở trên, đồng thời vẫn đảm bảo tính liên tục và nhất quán trong quá trình tiếp thu kiến thức của học sinh theo mạch kiến thức của PPCT môn Toán, việc tiến hành giải quyết bài toán được tiến hành theo trình tự sau đây :

B₁. Phân tích bài toán, lựa chọn cách tiếp cận theo thứ tự ưu tiên :

Sử dụng các kỹ thuật (Cộng đại số, thế,liên hợp) → Để tách hàm độc lập.

B₂. Xác định hàm số cần khảo sát và tập khảo sát D của nó.

B₃. Căn cứ vào kết quả khi khảo sát hàm số để kết luận bài toán.

2.3.2. Bài toán tổng quát:

Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} F(x, y) = 0 & (1) \\ G(x, y) = 0 & (2) \end{cases} \quad (I)$$

Từ hệ phương trình ta suy ra điều kiện của hai ẩn $x \in E; y \in F$

Từ hệ phương trình và các phương pháp biến đổi đại số ta có phương trình:

$$f(x) = g(y) \quad (3)$$

Khi đó ta có $\min_{x \in E} f(x) = a; \max_{y \in F} g(y) = a$ đề (3) có nghiệm thì
$$\begin{cases} \min_{x \in E} f(x) = a \\ \max_{y \in F} g(y) = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}$$

Thay vào phương trình còn lại trong hệ để kiểm tra nghiệm và kết luận.

2.3.3. Ví dụ minh họa.

2.3.3.1. Bài toán đã có hàm độc lập xuất hiện ở phương trình trong hệ.

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^4 + y^2 = 1 & (1) \\ y^3 - 3y - 2 = x^2 - 4\sqrt{x^2 + 1} & (2) \end{cases}$$

Lời giải

Từ phương trình (1) ta có: $x^4 + y^2 = 1$ Khi đó, ta có
$$\begin{cases} x^4 \leq 1 \\ y^2 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-1; 1] \\ y \in [-1; 1] \end{cases}$$

Xét hàm $f(x) = x^2 - 4\sqrt{x^2 + 1}$ trên $[-1; 1]$

$$f'(x) = 2x - \frac{4x}{\sqrt{x^2 + 1}}; \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{4x}{\sqrt{x^2 + 1}} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 3 \end{cases}$$

Do $x^2 \geq 1$ nên $x = 0$

Ta có $f(-1) = 1 - 4\sqrt{2}$; $f(1) = 1 - 4\sqrt{2}$; $f(0) = -4$

Hàm liên tục trên tập xác định nên $f(x) \leq -4$ (*1)

Xét hàm $g(y) = y^3 - 3y - 2$ trên $[-1; 1]$

$$g'(y) = 3y^2 - 3 < 0 \text{ với mọi } y \in (-1; 1)$$

Hàm nghịch biến và liên tục trên tập xác định nên

$$g(y) \geq g(1) = -4 \quad (*2)$$

Từ (*1) và (*2) suy ra (2) có nghiệm $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ Thế vào (1) ta thấy thỏa mãn

Vậy nghiệm của hệ là $(x; y) = (0; 1)$.

* **Nhận xét:** Qua ví dụ trên ta thấy để xử lý điều kiện của ẩn ta có dạng tổng quát của điều

kiện $(u(x))^{2n} + (v(x))^{2m} = a \quad (a > 0) \Rightarrow \begin{cases} u(x) \in [-\sqrt[2n]{a}; \sqrt[2n]{a}] \\ v(x) \in [-\sqrt[2m]{a}; \sqrt[2m]{a}] \end{cases}$ ngoài ra ta có thể xử lý điều kiện

bằng một phương pháp khác thông qua ví dụ sau đây.

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2(4x+1) + 4y^2(4y+1) = y+16 & (1) \\ x^2 + 4y^2 - x + 2y = \frac{1}{2} & (2) \end{cases}$

Lời giải Ta có:

$$(2) \Leftrightarrow x^2 - x + 4y^2 + 2y - \frac{1}{2} = 0$$

Coi x là ẩn, y là tham số ta có: $\Delta_x = 1 - (4y^2 + 2y - \frac{1}{2}) \geq 0 \Leftrightarrow -16y^2 - 8y + 3 \geq 0 \Leftrightarrow y \in \left[-\frac{3}{4}; \frac{1}{4}\right]$

Tương tự: $(2) \Leftrightarrow 4y^2 + 2y + x^2 - x - \frac{1}{2} = 0$

Ta có: $\Delta_y = 1 - 4(x^2 - x - \frac{1}{2}) \geq 0 \Leftrightarrow -4x^2 + 4x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$

$$(1) \Leftrightarrow 4x^3 + x^2 = -16y^3 - 4y^2 + y + 16$$

Xét hàm $f(x) = 4x^3 + x^2$ với $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$

$$f'(x) = 12x^2 + 2x; \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-\frac{1}{6} \end{cases}$$

Ta có: $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}; \quad f\left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{108}; \quad f(0) = 0; \quad f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{63}{4}$

Do hàm số liên tục trên tập xác định nên: $f(x) \leq \frac{63}{4} \quad (*1)$

Xét hàm $g(y) = -16y^3 - 4y^2 + y + 16$ với $y \in \left[-\frac{3}{4}; \frac{1}{4}\right]$

$$g'(y) = -48y^2 - 8y + 1; \quad g'(y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{12} \\ y = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Ta có: $g\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{79}{4}; \quad g\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{63}{4}; \quad g\left(\frac{1}{12}\right) = \frac{1733}{108}; \quad g\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{63}{4}$

Do hàm số liên tục trên tập xác định nên: $g(y) \geq \frac{63}{4} \quad (*2)$

Từ (*1) và (*2) ta có $\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$ Thay vào (2) ta thấy thỏa mãn.

Vậy nghiệm của hệ là $\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{4}\right)$.

*** Nhận xét:** Phương pháp sử dụng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai chiếm ưu thế hơn sử dụng lũy thừa bậc chẵn cụ thể nó có thể xét được những bài phức tạp hơn thông qua các ví dụ dưới đây.

Ví dụ 3: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy - 7x - 6y + 14 = 0 & (1) \\ 12x^3 + 12x^2 + 367x - 54y^3 - 54y^2 - 15y + 144 = 0 & (2) \end{cases}$

Lời giải

Khi đó (1) $\Leftrightarrow x^2 + x(y - 7) + y^2 - 6y + 14 = 0$

$$\Delta = (y - 7)^2 - 4(y^2 - 6y + 14) \geq 0 \Leftrightarrow -3y^2 + 10y - 7 \geq 0 \Leftrightarrow y \in \left[1; \frac{7}{3}\right]$$

Ta có (1) $\Leftrightarrow y^2 + y(x - 6) + x^2 - 7x + 14 = 0$

$$\Delta = (x - 6)^2 - 4(x^2 - 7x + 14) \geq 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 16x - 20 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[2; \frac{10}{3}\right]$$

$$(2) \Leftrightarrow 12x^3 + 12x^2 + 367x = 54y^3 + 54y^2 + 15y - 144$$

Xét hàm $f(x) = 12x^3 + 12x^2 + 367x \quad \forall x \in \left[2; \frac{10}{3}\right]; \quad f'(x) = 36x^2 + 24x + 367 > 0 \quad \forall x \in \left[2; \frac{10}{3}\right]$

Hàm số đồng biến nên $f(x) \geq f(2) = 878 \quad (*1)$

Xét hàm $g(y) = 54y^3 + 54y^2 + 15y - 144 \quad \forall y \in \left[1; \frac{7}{3}\right]; g'(y) = 162y^2 + 105y + 15 > 0 \quad \forall y \in \left[1; \frac{7}{3}\right]$

Hàm số đồng biến nên $g(y) \leq g\left(\frac{7}{3}\right) = 871 \quad (*2)$

Từ (*1) và (*2) ta thấy hệ vô nghiệm

Vậy hệ phương trình vô nghiệm

* **Nhận xét:** Trong một số hệ phương trình việc tìm điều kiện của ẩn số dựa vào xét tổng của các căn thức bậc chẵn và điều kiện có nghiệm của phương trình chứa căn. Ta xét các ví dụ sau đây:

Ví dụ 4: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{x+2y} = 1 & (1) \\ x^3 - y^3 + 6x^2 + y^2 + 11x - 2y + 8 = 0 & (2) \end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện:
$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x + 2y \geq 0 \end{cases}$$

Từ (1) ta có
$$\begin{cases} \sqrt{x+1} \leq 1 \\ \sqrt{x+2y} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x+1 \leq -1 \\ -x \leq 2y \leq 1-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 0 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow x^3 + 6x^2 + 11x + 8 = y^3 - y^2 + 2y$$

Xét hàm $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 8$ trên $[-1; 0]$

$$f'(x) = 3x^2 + 12x + 11 \geq 0 \quad \text{với mọi } x \in [-1; 0]$$

Hàm số đồng biến trên tập xác định nên $f(x) \geq f(-1) = 2 \quad (*1)$

Xét hàm $g(y) = y^3 - y^2 + 2y$ trên $[0; 1]$

$$g'(y) = 3y^2 - 2y + 2 > 0 \quad \text{với mọi } y \in [0; 1]$$

Hàm số đồng biến trên tập xác định nên $g(y) \leq g(1) = 2 \quad (*2)$

Từ (*1) và (*2) ta có $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$. Thay vào ta thấy thỏa mãn

Vậy nghiệm của hệ là $(x; y) = (-1; 1)$

Ví dụ 5: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + \sqrt{x^2 + 2xy + x + 2y} + \sqrt[4]{x+2y} = 0 & (1) \\ x^3 + 5x^2 + (x+y)^2 + 11x + 8 = y^3 + 2(x+1)y & (2) \end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} x^2 + 2xy + x + 2y \geq 0 \\ x + 2y \geq 0 \end{cases}$

Khi đó từ (1) $\Leftrightarrow x + \sqrt{(x+2y)(x+1)} + \sqrt[4]{x+2y} = 0$

Vì $x + 2y \geq 0 \Rightarrow x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$

Mà từ (1) ta có $x \leq 0 \Rightarrow x \in [-1; 0]$

(2) $\Leftrightarrow x^3 + 6x^2 + 11x + 8 = y^3 - y^2 + 2y$ (3)

Xét hàm $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 8$ với $x \in [-1; 0]$; $f'(x) = 3x^2 + 12x + 11 > 0$ với mọi $x \in [-1; 0]$

Nên hàm số đồng biến $\Rightarrow f(x) \geq f(-1) = 2$

Đề phương trình (3) có nghiệm thì $y^3 - y^2 + 2y - 2 \geq 0 \Leftrightarrow (y-1)(y^2+2) \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 1$

Từ (1) ta có $\begin{cases} \sqrt[4]{x+2y} \geq 1 \\ \sqrt{(x+2y)(x+1)} \geq 0 \Rightarrow x + \sqrt{(x+2y)(x+1)} + \sqrt[4]{x+2y} \geq 0 \\ x \geq -1 \end{cases}$

Dấu “=” xảy ra khi: $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$. Thay vào hệ ta thấy thỏa mãn

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x; y) = (-1; 1)$

* **Nhận xét** : Bài toán có thể kết hợp giữa điều kiện căn thức và điều kiện tổng của các lũy

thừa không âm tổng quát như sau: $(u(x))^{2n} + \sqrt[2m]{v(x)} = a \quad (a > 0) \Rightarrow \begin{cases} u(x) \in [-\sqrt[2n]{a}; \sqrt[2n]{a}] \\ v(x) \in [0; a^{2m}] \end{cases}$

Ví dụ 6: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 8x^3 + y^3 - 16x^2 + 8y^2 + 10x + 35y = 5 & (1) \\ (2x+1)^2 + (y+3)\sqrt{y} = 1 & (2) \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $y \geq 0$

Ta có phương trình (2) $\Leftrightarrow (2x+1)^2 - 1 + (y+3)\sqrt{y} = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 4x + (y+3)\sqrt{y} = 0$

Với $y \geq 0 \Rightarrow 4x^2 + 4x \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-1; 0]$

(2) $\Rightarrow (y+3)\sqrt{y} \leq 1 \Leftrightarrow y(y^2+6y+9) \leq 1 \Leftrightarrow y(y^2+6y) \leq 1-9y$

$\Rightarrow 1-9y \geq 0 \Leftrightarrow y \leq \frac{1}{9}$

$$(1) \Leftrightarrow 8x^3 - 16x^2 + 10x = -y^3 - 3y^2 - 35y + 5 \quad (3)$$

Xét hàm $f(x) = 8x^3 - 16x^2 + 10x$ trên $[-1; 0]$; $f'(x) = 24x^2 - 32x + 10 > 0 \forall x \in [-1; 0]$

Hàm số đồng biến nên $f(x) \leq f(0) = 0 \quad (*)1$

Xét hàm $g(y) = -y^3 - 3y^2 - 35y + 5$ trên $[0; 1]$; $g'(y) = -3y^2 - 6y - 35 < 0 \forall y \in [0; 1]$

Hàm số nghịch biến nên $g(y) \geq g\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{782}{789} \quad (*)2$

Từ $(*)1$ và $(*)2$ suy ra hệ vô nghiệm

Vậy hệ phương trình vô nghiệm

Ví dụ 7: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x+2} + 2\sqrt{x+7} = (2y^3 + 1)\sqrt{3y-1} + 8 & (1) \\ (x-1)^3 + 81y^3 + \sqrt{3y} + 5 = x + 24y & (2) \end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện
$$\begin{cases} x \geq -2 \\ y \geq \frac{1}{3} \end{cases}$$

Ta có: $(2) \Leftrightarrow -(x-1)^3 + x = 81y^3 + 3\sqrt{y} - 24y + 5 \quad (3)$

Xét $f(y) = 81y^3 + \sqrt{3y} - 24y + 5$ với $y \in \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$; $f'(y) = 243y^2 + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{y}} - 24 > 0 \forall y \geq \frac{1}{3}$

Hàm số đồng biến nên $f(y) \geq f\left(\frac{1}{3}\right) = 1$

Để (3) có nghiệm thì $-(x-1)^3 + x \geq 1 \Leftrightarrow x(x-1)(x-2) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0] \cup [1; 2]$

Suy ra $x \in [-2; 0] \cup [1; 2]$

Xét hàm $g(x) = \sqrt{x+2} + 2\sqrt{x+7}$ với $x \leq 2$; $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} + \frac{1}{\sqrt{x+7}} > 0 \forall x \leq 2$

Hàm số đồng biến nên $g(x) \leq g(2) = 8$

Để (1) có nghiệm thì $(2y^3 + 1)\sqrt{3y-1} + 8 \leq 8 \Leftrightarrow (2y^3 + 1)\sqrt{3y-1} \leq 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 2$

Thay
$$\begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$$
 ta thấy thỏa mãn hệ

Vậy nghiệm của hệ là $(x; y) = \left(2; \frac{1}{3}\right)$

Ví dụ 8: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x^3 + 4x + 13 = 5x^2 + 8y^3 + 6y\sqrt{2y-1} & (1) \\ 17(2x+8)\sqrt[4]{x-1} + 6x^2 + 8y^3 + 4y^2 = 16y + 2 & (2) \end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} y \geq \frac{1}{2} \\ x \geq 1 \end{cases}$

Ta có: (1) $\Leftrightarrow 2x^3 - 5x^2 + 4x + 13 = 8y^3 + 6y\sqrt{3y-1}$ (3)

Xét hàm $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x + 13$ trên $[1; +\infty)$; $f'(x) = 6x^2 - 10x + 4 > 0 \forall x > 1$

Hàm đồng biến nên $f(x) \geq f(1) = 14$

Để (1) có nghiệm thì $8y^3 + 6y\sqrt{3y-1} \geq 14$

Xét hàm $g(y) = 8y^3 + 6y\sqrt{3y-1}$ với $y \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$; $g'(y) = 24y^2 + \frac{9y}{\sqrt{3y-1}} > 0 \forall y > \frac{1}{2}$

Hàm số đồng biến mà $g(1) = 0 \Rightarrow g(y) \geq g(1) \Rightarrow y \geq 1$

Xét hàm $h(x) = 17(2x+3)\sqrt[4]{x-1} + 6x^2$ trên $[1; +\infty)$;

$$h'(x) = 34\sqrt[4]{x-1} + 17(2x+3)\frac{1}{4\sqrt[4]{(x-1)^3}} + 12x > 0 \forall x \in (1; +\infty)$$

Hàm số đồng biến nên $h(x) \geq h(1) = 6$ (*1)

Xét hàm $u(y) = -8y^3 - 4y^2 + 10y + 2 \forall y \geq 1$; $u'(y) = -24y^2 - 8y + 10 < 0 \forall y > 1$

Hàm số nghịch biến nên $u(y) \leq u(1) = 6$ (*2)

Từ (*1) và (*2) ta có $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$. Thay vào hệ ta thấy thỏa mãn

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x; y) = (1; 1)$

***Nhận xét:** Thông qua các ví dụ 6, 7, 8 ta thấy rằng việc tìm điều kiện của các ẩn phải dựa vào cả hai phương trình trong hệ. Bằng việc dựa vào điều kiện ban đầu của bài toán sử dụng hàm số tìm điều kiện để có nghiệm từ đó suy ra điều kiện của các ẩn.

2.3.3.2. Bài toán chưa xuất hiện hàm độc lập phương trình trong hệ.

Ví dụ 9: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3(x^3 - y^3) + 20x^4 + 2xy + 2y^2 + 39x = \frac{-247}{9} & (1) \\ x^2 + y^2 + xy + 4 = 4y + 3x & (2) \end{cases} \quad (I)$$

Lời giải

Khi đó phương trình (1) $\Leftrightarrow x^2 + x(y - 3) + y^2 - 4y + 4 = 0$

$$\Delta = (y - 3)^2 - 4(y^2 - 4y + 4) \geq 0 \Leftrightarrow y \in \left[1; \frac{7}{3}\right]$$

Ta có phương trình (1) $\Leftrightarrow y^2 + y(x - 4) + x^2 - 3x + 4 = 0$

$$\Delta = (x - 4)^2 - 4(x^2 - 3x + 4) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[0; \frac{4}{3}\right]$$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^3 - 3y^3 + 20x^4 + 2xy + 2y^2 + 39x + \frac{247}{9} = 0 \\ 2x^2 + 2y^2 + 2xy + 8 - 8y - 6x = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3x^3 - 2x^2 + 20x^4 + 45x = 3y^3 - 8y - \frac{175}{9}$$

Xét hàm $f(x) = 3x^3 + 20x^4 - 2x^2 + 45x$ trên $\left[0; \frac{4}{3}\right]$; $f'(x) = 80x^3 + 9x^2 - 4x + 45 > 0 \forall x > 0$

*** Nhận xét:** Qua ví dụ trên ta thấy, lúc đầu hệ chưa xuất hiện hàm độc lập do có tích xy xuất hiện ở cả hai phương trình. Bằng phương pháp cộng đại số ta đưa được về phương trình có các biến độc lập, khi đó việc giải hệ tương tự như các ví dụ trên.

Hàm số đồng biến nên $g(y) \leq g\left(\frac{7}{3}\right) = 0 \quad (*2)$

Từ (*1) và (*2) ta có nghiệm hệ là $\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{7}{3} \end{cases}$. Thay vào thỏa mãn

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x; y) = \left(0; \frac{7}{3}\right)$.

Ví dụ 10: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 4x^2 = (\sqrt{x^2 + 1} + 1)(x^2 - y^3 + 3y - 2) & (1) \\ (x^2 + y^2)^2 + 1 = x^2 + 2y & (2) \end{cases}$$

Lời giải

Ta có phương trình (2) $\Leftrightarrow (x^2 + y^2)^2 - y^2 + 1 = x^2 + 2y - y^2 \Leftrightarrow (x^2 + y^2)^2 + (y - 1)^2 = x^2 + y^2$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 1) + (y - 1)^2 = 0 \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 1) = 0 \\ (y - 1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

Thay vào hệ ta thấy thỏa mãn

Vậy nghiệm của hệ là $(x; y) = (0; 1)$

* **Nhận xét**: Qua ví dụ trên ta thấy rằng phải dùng kỹ năng chia 2 vế (liên hợp) để ta tách thành hai hàm độc lập.

Ví dụ 11: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x = 4y + 1 & (1) \\ 2(x + y)(26 - xy) = 2x^2 + 19y^2 - 34y + 8x + 126 & (2) \end{cases}$$

Lời giải

$$\text{Ta có (1)} \Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x + 2 \leq 3 \\ -3 \leq y - 2 \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 5 \end{cases}$$

$$\text{Từ (1) ta có } 1 = x^2 + y^2 + 4(x - y) \quad (3)$$

Từ (2) ta có

$$2(x + y)[25 + (x^2 + y^2 - xy) + 4(x - y)] = 2x^2 + 19y^2 - 34y + 8x + 126$$

$$\Leftrightarrow 50(x + y) + 2(x^3 + y^3) + 8(x^2 - y^2) = 2x^2 + 19y^2 - 34y + 8x + 136$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 + 6x^2 + 42x = -2y^3 + 27y^2 - 34y + 126$$

Xét hàm $f(x) = 2x^3 + 6x^2 + 42x$ trên $[-5; 1]$; $f'(x) = 6x^2 + 12x + 42 > 0 \forall x \in [-5; 1]$

Hàm số đồng biến nên $f(x) \leq f(1) = 50 \quad (*1)$

Xét hàm $g(y) = -2y^3 + 27y^2 - 34y + 126$ trên $[-1; 5]$

$$g'(y) = -6y^2 + 54y - 34; g'(y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 7 \\ y = 2 \end{cases}$$

Ta có

$$g(-1) = 239; \quad g(2) = 50; \quad g(5) = 131$$

Suy ra $g(y) \geq 50 \quad (*2)$

Từ (*1) và (*2) ta có $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$. Thay vào hệ thấy thỏa mãn

Vậy nghiệm của hệ là $(x; y) = (1; 2)$

***Nhận xét:** Thông qua ví dụ trên thì chúng ta thấy rằng có thể dùng phương pháp thế từ một phương trình vào một phương trình còn lại để tạo thành một phương trình mới có xuất hiện hai hàm độc lập.

2.3.4 Bài tập rèn luyện

Bài 1: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 16x^4 + y^2 = 1 & (1) \\ y^3 - 3y - 2 = 4x^2 - 4\sqrt{4x^2 + 1} & (2) \end{cases}$

Bài 2: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2(4x+1) + 16y^2(8y+1) = 2y+16 & (1) \\ x^2 + 16y^2 - x + 4y = \frac{1}{2} & (2) \end{cases}$

Bài 3: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{2x+1} + \sqrt{2x+2y} = 1 & (1) \\ 8x^3 - y^3 + 24x^2 + y^2 + 22x - 2y + 8 = 0 & (2) \end{cases}$

Bài 4: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{2x+2} + 2\sqrt{2x+7} = (2y^3+1)\sqrt{3y-1} + 8 & (1) \\ (2x-1)^3 + 81y^3 + \sqrt{3y} + 5 = 2x + 24y & (2) \end{cases}$

Bài 5: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 16x^3 + 8x + 13 = 20x^2 + 64y^3 + 12y\sqrt{4y-1} & (1) \\ 17(4x+8)\sqrt[4]{2x-1} + 24x^2 + 64y^3 + 16y^2 = 32y + 2 & (2) \end{cases}$

Bài 6: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 16x^2 = (4\sqrt{x^2+1}+1)(4x^2 - y^3 + 3y - 2) & (1) \\ (4x^2 + y^2)^2 + 1 = 4x^2 + 2y & (2) \end{cases}$

Bài 7: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4x^2 + 9y^2 + 8x = 12y + 1 & (1) \\ 2(2x+3y)(26-6xy) = 8x^2 + 171y^2 - 102y + 16x + 126 & (2) \end{cases}$

Bài 8: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2(x-3) - y\sqrt{y+3} = -2 \\ 3\sqrt{x-2} = \sqrt{y(y+8)} \end{cases}$

Bài 9: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3(4y^2+1) + 2(x^2+1)\sqrt{x} = 6 \\ x^2y(2+2\sqrt{4y^2+1}) = x + \sqrt{x^2+1} \end{cases}$

Bài 10: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{1+\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{xy}(1+2\sqrt{1-y^2}) \\ (\sqrt{2x+y} - \sqrt{x+2y})(3x+3y+1 - 2\sqrt{2x^2+5xy+2y^2}) = \sqrt{x-y}(x-y+1) \end{cases}$

2.4. Hiệu quả của sáng kiến kinh nghiệm:

Trong thời gian công tác tại trường THPT Quảng Xương 1, tôi đã áp dụng cách giải quyết bài toán theo hướng tư duy như trên ở lớp 12T1 và trong công tác bồi dưỡng học sinh giỏi năm học 2015-2016. Có thể kể ra một số kết quả ban đầu thu được đối với giáo viên giảng dạy như sau:

- Đảm bảo tính hệ thống của môn học theo đúng PPCT, đồng thời đáp ứng được yêu cầu của môn Toán.
- Thuận lợi trong việc dạy học phân hóa đối với các nhóm đối tượng học sinh khác nhau, đảm bảo phát triển tối đa khả năng tư duy sáng tạo của học sinh thông qua môn học và các bài toán cụ thể.

Đối với học sinh, cách giải quyết này có thể giúp các em tận dụng tối đa các bài toán đã được học hoặc những kết quả từ các bạn khác, kết quả từ các sách, các tài liệu tham khảo khác.

Sau khi triển khai đề tài, hầu hết học sinh rất hứng thú với dạng bài tập này, kết quả là các em đã biết vận dụng lý thuyết để giải toán, các em có nhiều tiến bộ, đa số học sinh hiểu và vận dụng tốt vào giải bài tập, thậm chí những bài rất phức tạp. Đồng thời, các em cũng tự tìm tòi ra nhiều cách giải hơn về hệ phương trình. Kết quả thu được sau khi thực hiện đề tài vào giảng dạy :

Năm học	Lớp	Số học sinh	Số học sinh giải được	
			Trước khi thực hiện đề tài	Sau khi thực hiện đề tài
2015-2016	12T1	40	7	35
	12T2	44	5	30

3. KẾT LUẬN, KIẾN NGHỊ

3.1. Kết luận:

Nói về ứng dụng các tính chất của hàm số không chỉ có các ứng dụng tôi đã trình bày trong đề tài này, mà ứng dụng của nó là vô cùng rộng lớn. Tuy nhiên, với khuôn khổ của đề tài cũng như tính thực tiễn của nó tôi chỉ nêu ra một số ứng dụng trên. Trong những năm qua tôi đã vận dụng phương pháp trên cho đối tượng học sinh khá giỏi của trường THPT Quảng Xương 1, trong các đợt bồi dưỡng học sinh luyện thi đại học cao đẳng và

bồi dưỡng học sinh giỏi, tôi thấy rằng học sinh tiếp thu tương đối chủ động, đa số học sinh hiểu và vận dụng tốt trong quá trình giải các dạng bài tập ở trên.

Trên đây là một số suy nghĩ và đề xuất của tôi, mong đóng góp cùng đồng nghiệp để giúp đỡ học sinh khai thác tốt hơn các ứng dụng của hàm số trong chương trình toán học phổ thông làm cơ sở tham gia các kỳ thi cuối cấp cũng như nghiên cứu các ứng dụng thực tiễn trong cuộc sống sau này.

3.2. Kiến nghị:

Đối với giáo viên : Cần quan tâm sát sao hơn nữa đến mức độ tiếp thu bài của học sinh. Cần tìm nhiều phương pháp để giải quyết một bài toán từ đó tìm cách giải đơn giản giúp học sinh tiếp thu bài tốt hơn và gây hứng thú trong quá trình dạy và học.

Đối với nhà trường: Trong các buổi họp tổ các giáo viên nên trao đổi về cách dạy bài học khó để tìm ra những cách giải hay.

Đối với sở giáo dục : Cần công khai các sáng kiến kinh nghiệm đạt giải cao trên mạng internet để giáo viên và học sinh tất cả các trường trong tỉnh và ngoài tỉnh áp dụng vào thực tiễn và học hỏi cách viết một đề tài khoa học.

Trên đây là một số kinh nghiệm của bản thân tôi đúc rút được trong quá trình giảng dạy, chắc chắn còn mang tính chủ quan của bản thân, và sẽ không tránh khỏi nhiều sai sót, các vấn đề tôi nêu ra rất mong được sự góp ý của các thầy cô giáo, đặc biệt là các em học sinh để bài viết được hoàn thiện hơn và áp dụng thiết thực vào quá trình giảng dạy.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Tôi xin cam đoan đây là SKKN của mình viết, không sao chép nội dung của người khác.

**XÁC NHẬN CỦA
THỦ TRƯỞNG ĐƠN VỊ**

Quảng Xương, ngày 28 tháng 05 năm 2016

Người Viết:

Trần Văn Nam

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. “Ứng dụng hàm số giải PT – HPT và BPT” của các tác giả: Trần Phương, Đào Thiệu Khải – Trần Văn Hạo – Lê Hồng Đức – Trần Thị Vân Anh.
2. “Một số ứng dụng của hàm số” toán học và tuổi trẻ.
3. Sách bài tập.
4. Bộ đề thi tuyển sinh của bộ giáo dục đào tạo.
5. Sách tham khảo của Võ Quốc Anh – Lê Bích Ngọc.
6. Các bài toán liên quan trong tờ báo toán học và tuổi trẻ.
7. Các bài giảng về luyện thi đại học của tác giả Trần Phương.
8. Khảo sát hàm số và vấn đề liên quan của tác giả Phan Huy Khải.