Chương IV

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

1. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

Trong mục này chúng ta sẽ nghiên cứu các phương pháp tìm nghiệm thực của phương trình đại số.

Để giải phương trình một ẩn:

$$f(x) = 0 \qquad (4.1)$$

thường người ta dùng phương pháp gần đúng. Phương pháp này chia làm 2 bước.

Bước giải sơ bộ. Trong bước này ta xem xét các vấn đề sau:

- Phương trình có nghiệm hay không? nếu có thì thuộc miền nào?
- Trong miền nào (đủ bé) chắc chắn có nghiệm hoặc có duy nhất nghiệm?
- Tìm xấp xỉ ban đầu x_0 của nghiệm, nhờ đó sẽ giải chính xác ở bước sau.

Bước giải hoàn thiện: tìm nghiệm với sai số cho trước.

1.1. Giải sơ bộ

Trừ khi $f(x)$ là đa thức nói chung ngời ta không có phương pháp rõ ràng nào để giải sơ bộ một phương trình. Việc giải sơ bộ chủ yếu nhờ vào việc vận dụng linh hoạt các kiến thức của giải tích toán. Thường người ta thường dùng một số cách sau đây:

- Định lý 1: Nếu f là một hàm liên tục trên đoạn [a,b] và f(a).f(b) <0 thì (4.1) có nghiệm thực thuộc [a,b].
- Định lý 2: Nếu $f'(x)$ không đổi dấu trên đoạn [a,b] thì (4.1) có nhiều nhất một nghiệm trên [a,b].
- Khi hàm $f(x)$ là một đa thức thì ta có thể xác định được miền nghiệm của phương trình:

$$f(x) = p_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (4.2)$$

Giả sử: $a_0 > 0$ và phương trình có thể có nghiệm dương, tức là $I=\{k \mid a_k <0\} \neq\emptyset$. Chúng ta sẽ tìm miền D sao cho nếu (4.2) có nghiệm thì nghiệm phải thuộc miền D này.

a) Miền nghiệm dương

Đặt A = max {$|a_k|$} với k$\in$ I, và p là bậc lớn nhất của đa thức mà $a_p < 0$ (p < n)

Định lý: Nếu x là nghiệm dương của (4.2) thì x thỏa mãn:

$$x < 1 + \sqrt[n-p]{\frac{A}{a_0}} \qquad (4.3)$$

Chứng minh:

Chúng ta sẽ chứng minh nếu

$$x \geq 1 + \sqrt[n-p]{\frac{A}{a_0}} \qquad (4.4)$$

thì giá trị của đa thức *p(x)* > 0 tức là đa thức nếu có nghiệm thì nghiệm phải thỏa mãn (4.3). Thật vậy với x thỏa mãn (4.4) ta có :

$$p(x) \geq a_0 x^n - A\left(x^p + \ldots + x + 1\right) = a_0 x^n - \frac{A\left(x^{p+1} - 1\right)}{x-1}$$

$$> \frac{a_0 x^n (x-1) - A x^{p+1}}{x-1} > \frac{x^{p+1}\left[a_0 (x-1)^{n-p} - A\right]}{x-1} > 0$$

(đpcm)

b) Miền nghiệm âm

Để tìm nghiệm âm ta đặt x = – t trong $p_n(x)$ ta nhận được: $q_n(t) = p_n(-t)$

Chúng ta có mệnh đề sau:

Nếu miền nghiệm dương của phương trình $q_n(t) = 0$ là $0 \leq t \leq \alpha$ thì miền nghiệm âm của phương trình (4.1) là $-\alpha \leq t \leq 0$.

Ví dụ: Xét phương trình

$$2x^5 - 4x^4 + x^3 - 5x^2 - 3x + 7 = 0 \qquad (4.5)$$

Khi đó n = 5, $a_0 = 2$, p = 4, A = max{|–4|, |–5|} = 5. Nghiệm dương nếu có thì

x < 1+ 5/2 = 3,5

Để tìm nghiệm âm ta đặt x = –t ta có:

$$-2t^5 - 4t^4 - t^3 - 5t^2 + 3t + 7 = 0$$

hay $$2t^5 + 4t^4 + t^3 + 5t^2 - 3t - 7 = 0$$

Ta có n = 5, p =1, A=7, $a_0 = 2$ nên nghiệm dương nếu có thì

$$t < 1 + \sqrt[4]{\frac{7}{2}}$$

Tóm lại phương trình (4.5) nếu có nghiệm thì nghiệm thỏa mãn:

$$-\left(1+\sqrt[4]{\frac{7}{2}}\right)<x<3,5$$

Chú ý: Ta chỉ xác định được miền nghiệm nếu có, chứ không khẳng định phương trình đã cho có nghiệm.

Ví dụ: Phương trình $x^2 - x + 1 = 0$ khảo sát theo phương pháp trên thì ta thấy nghiệm (nếu có) $0 < x < 1$. Nhưng phương trình trên vô nghiệm.

1.2. Giải hoàn thiện

Trong mục này chúng ta giả sử phương trình (4.1) có nghiệm trong một miền nào đó. Chúng ta sẽ trình bày các phương pháp tìm nghiệm gần đúng với độ chính xác cho trước.

1.2.1. Phương pháp chia đôi

Điều kiện: Hàm *f(x)* liên tục và thỏa mãn điều kiện $f(a).f(b) < 0$ khi đó phương trình (4.1) có nghiệm thuộc khoảng (a,b).

Thuật toán :

Bước 1: Đặt $c = (a+b)/2$

Nếu $f(a).f(c) < 0$ thì $b = c$ còn không thì $a = c$

Bước 2: Nếu $b - a < \varepsilon$ thì nghiệm $x = c$ còn không thì quay lại Bước 1.

Phương pháp chia đôi có tốc đọ hội tụ tương đối chậm.

1.2.2. Phương pháp lặp đơn

Giả sử có thể đưa phương trình (4.1) về dạng tương đương:

$$x = \varphi(x) \quad (4.5)$$

trong đó φ có tính chất:

- $\varphi(x) \in [a,b]$ với $\forall \in [a,b]$ (4.6)
- $|\varphi'(x)| \le q < 1$ với $\forall \in [a,b]$ (4.7)

Khi đó với xấp xỉ ban đầu $x_0 \in [a,b]$ tùy ý, dãy $\{x_n\}$ được xây dựng bởi:

$$x_{k+1} = \varphi(x_k) \quad (4.8)$$

sẽ hội tụ đến nghiệm.

Thật vậy: Dễ dàng ta có đánh giá sau:

$$|x_{n+1} - x_n| = |\varphi(x_n) - \varphi(x_{n-1})| = |\varphi'(c)|\,|x_n - x_{n-1}| \le q\,|x_n - x_{n-1}| \le q^n\,|x_1 - x_0|$$

Do vậy:

$$|x_{n+p} - x_n| = |(x_{n+p} - x_{n+p-1}) + (x_{n+p-1} - x_{n+p-2}) + .. + (x_{n+1} - x_n)|$$

$\leq | x_{n+p} - x_{n+p-1}| + | x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| + .. + | x_{n+1} - x_n |$

$\leq | x_1 - x_0| \, q^n \, (1+q+..+q^{p-1}) \leq [q^n/(1-q)] \, | x_1 - x_0|$

$$\Rightarrow |x_{n+p} - x_n | \leq [q^n/(1-q)] \, | x_1 - x_0| \qquad (4.9)$$

Vì $0 \leq q < 1$ nên với n đủ lớn thì $|x_{n+p} - x_n|$ sẽ bé tùy ý. *Theo điều kiện Côsi* dãy này sẽ hội tụ tới x*.

Lấy giới hạn hai vế (4.8) ta có:

$$\lim x_{k+1} = \lim \varphi(x_k) \qquad (k\to\infty)$$

hay $\qquad x^* = \varphi(x^*)$

Vậy x* là nghiệm của (4.8).

Lấy giới hạn (4.9) khi $p\to\infty$ ta được:

$$|x^* - x_n | \leq [q^n/(1-q)] \, | x_1 - x_0| \qquad (4.10)$$

Đây là ước lượng sai số mắc phải khi thuật toán dừng sau n bước.

Do $|x_n - x_{n-1}| \leq q^{n-1} | x_1 - x_0|$ nên thường ta chọn điều kiện kết thúc là:

$$|x^* - x_n | \leq (q/(1-q))|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon$$

Nhận xét: Thuật toán đơn giản, dễ thực hiện, nhưng không có phương pháp chung để tìm phương trình tương đương (4.5)

Ví dụ 1. Giải phương trình $x^5 - 40x+3 = 0$; $x\in[0,1]$
Ta đưa về phương trình:

$$x = (x^5+3)/40 = \varphi(x);$$

Ta thấy φ thoả mãn: $0 \leq \varphi(x) \leq 1$

$$0 \leq \varphi'(x) = x^4/8 \leq 1/8 = q < 1 \quad \text{với } x\in[0,1]$$

Với $x_0 = 0.5$, EPSILON = 0.0001 sau 4 lần lặp chúng ta được x = 0.07500.

Ví dụ 2. Giải gần đúng phương trình $f(x) = x^3 + x - 1000 = 0$. Dễ thấy $f(9).f(10) < 0$ nên phương trình có nghiệm trong khoảng (9,10). Ta có 3 cách đưa phương trình về dạng (4.5) như sau:

a) $x = \varphi_1(x) = 1000-x^3$
b) $x = \varphi_2(x) = 1000/x^2 - 1/x$
c) $x = \varphi_3(x) = (1000-x)^{1/3}$

Ta xét từng trường hợp:

d) $\varphi'_1(x) = -3x^2$; $\max |\varphi'_1(x)| = 300 >> 1$
e) $\varphi'_2(x) = -2000.x^{-3} + x^{-2}$; $|\varphi'_2(10)| \cong 2$
f) $\varphi'_3(x) = -(1000-x)^{-2//3}/3$; $|\varphi'_3(x)| \leq 1/(3 \,.\, 999^{2/3}) \cong 1/300 = q$

Hai hàm đầu không thỏa mãn các tính chất $|\varphi'(x)| < 1$.Còn hàm $\varphi_3(x)$ hội tụ rất nhanh vì q rất bé.

1.2.3. Phương pháp tiếp tuyến

Khi f là hàm khả vi và dễ tính giá trị đạo hàm thì phương pháp tiếp tuyến có tốc độ hội tụ nhanh.

Giả sử $f(x)$ là hàm khả vi liên tục 2 lần trên đoạn [a,b] và thoả mãn: f(a).f(b)<0 và f', f'' không đổi dấu trên đoạn [a,b].

Định nghĩa: Điểm x_0 gọi là điểm Fourier của f nếu:

$$f(x_0)\, f''(x_0) > 0 \tag{4.11}$$

Dễ thấy với các điều kiện trên nếu một trong hai điểm a, b là điểm Fourier, thì điểm kia không là Fourier. (Vì f(a) và f(b) trái dấu, còn $f''(x_0)$ không đổi dấu).

Phương pháp tiếp tuyến hay còn gọi là phương pháp Fourier có tốc độ hội tụ cao. Ý tưởng của thuật toán như sau: Ở bước lặp thứ k ta thay hàm $f(x)$ bởi tiếp tuyến với đồ thị tại điểm x_k. Nghiệm xấp xỉ tiếp theo là giao điểm của tiếp tuyến với trục hoành.

Xấp xỉ ban đầu x_0 được chọn là một điểm Fourier thuộc [a,b] kể cả a và b.

Phương trình tiếp tuyến với đồ thị y = $f(x)$ tại x_k là:

$$y = f'(x_k)\,(x - x_k) + f(x_k)$$

Nghiệm xấp xỉ ở bước k+1 sẽ là nghiệm của phương trình:

$$f'(x_k)\,(x - x_k) + f(x_k) = 0$$

hay ta có công thức lặp:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \tag{4.12}$$

Ta có thể chứng minh dãy trên đơn điệu và hội tụ đến nghiệm phương trình (4.1).

Ước lượng sai số:

Giả sử x* là nghiệm của (4.1), đặt $m = \min\{|f'(x)| \mid x \in [a,b]\}$. Ta có ước lượng sau:

$$\left|x_n - x^*\right| \le \frac{\left|f(x_n)\right|}{m} \tag{4.13}$$

Thật vậy, ta có

$$f(x_n) = f(x_n) - f(x^*) = f'(c)\,(x_n - x^*)$$

nên

$$\left|x_n - x^*\right| = \frac{\left|f(x_n)\right|}{\left|f'(c)\right|} \le \frac{\left|f(x_n)\right|}{m}$$

Vì các đạo hàm $f'(x)$ và $f''(x)$ không đổi dấu trên [a,b] nên

$$m = \min \{ |f'(a)|, |f'(b)| \} > 0$$

Ví dụ: Để tính gần đúng $\sqrt[3]{15}$ ta giải phương trình $x^3 - 15 = 0$ trên đoạn [2,3]. Dễ kiểm tra thấy $f(2).f(3) < 0$; $f'(x) = 3x^2 > 0$; $f''(x) = 6x > 0$ trên đoạn [2,3] và $x_0 = 3$ là điểm Fourier và $m = \min\{12, 27\} = 12$

Công thức (4.12) có dạng:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 - 15}{3x^2} = \frac{2}{3}x_k + \frac{5}{x_k^2}$$

Ta có $x_1 = 2{,}5556$; $x_2 = 2{,}4693$

Sai số $|x_2 - x^*| < |f(x_2)|/m = 0{,}005$

1.2.4. Phương pháp dây cung

Giả sử:

- Phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất ξ trong đoạn [a,b]
- $f(x)$ liên tục trên khoảng [a,b] và $f'(x), f''(x)$ không đổi dấu trên [a,b]

Giả sử $f''(x) > 0$ và $f'(x) < 0$, khi đó $f(a) > f(\xi) = 0$, tức là điểm a là điểm Fourier.

Ý tưởng của phương pháp dây cung như sau:

Chọn xấp xỉ ban đầu $x_0 = b$

Gọi N_0 là điểm có tọa độ (b, f(b)); xấp xỉ bậc 1 của nghiệm được chọn là hoành độ của giao điểm của dây cung MN_0 với trục hoành Ox.

Giả giử x_k là xấp xỉ bậc k. Ta lập công thức tính xấp xỉ bậc k+1. Tức là ta tìm hoành độ giao điểm của dây cung MN_k với trục hoành Ox. Vậy ở mỗi bước ta xấp xỉ cung MN_k với dây cung MN_k (nên có tên là phương pháp dây cung).

Phương trình đường thẳng qua M và N_k là

$$y = f(a) + \frac{f(x_k) - f(a)}{x_k - a}(x - a) \tag{4.14}$$

Cho y = 0 ta tìm hoành độ x_{k+1} của giao điểm của MN_k với Ox:

$$x_{k+1} = a - \frac{f(a)}{f(x_k) - f(a)}(x_k - a) \tag{4.15}$$

Từ đó suy ra:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(a)}(x_k - a)$$

Tương tự như vậy, nếu $f''(x) > 0$ và $f'(x) > 0$ thì b là điểm Fourier. Xấp xỉ ban đầu là $x_0 = a$ và ta có phép lặp:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(b)}(x_k - b)$$

Ước lượng sai số:

Sai số ở bước k được tính nhờ công thức (4.13) là:

$$|x_k - \xi| \le \frac{|f(x_k)|}{m}$$

2. GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Trong mục này ta xét hệ n phương trình tuyến tính n ẩn số.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (4.16)$$

hay dưới dạng ma trận:

$$A\,x = b \qquad (4.17)$$

trong đó A là ma trận các hệ số:

$$A = (a_{ij})$$

còn x và b là các vec tơ cột.

Trong trường hợp Cramer tức là khi det A ≠ 0 thì hệ (4.16) có duy nhất nghiệm:

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$$

trong đó A_i là ma trận nhận được từ ma trận A nhờ thay vectơ b vào cột hệ số thứ i của A.

Nếu det A = 0 và hạng của A khác hạng của ma trận mở rộng (A,b) thì hệ vô nghiệm. Còn nếu hạng của A bằng hạng của ma trận mở rộng (A,b) thì hệ có vô số nghiệm.

Tuy nhiên khi n lớn thì việc tính các định thức rất khó khăn và sai số lớn. Khi đó người ta dùng phương pháp Gauss để giải hệ phương trình này.

2.1. Phương pháp Gauss.

Khi dùng phương pháp Gauss để giải hệ (2.16) chúng ta sử dụng 2 phép biến đổi tương đương đối với hệ phương trình đại số tuyến tính:

Nhân 1 phương trình của hệ với một số khác không

Cộng vào một phương trình của hệ một tổ hợp tuyến tính các phương trình khác.

Phương pháp Gauss gồm hai giai đoạn.

Quá trình thuận. Đưa hệ (4.16) về dạng tam giác:

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n = b_1' \\ \qquad x_2 + \ldots + b_{2n}x_n = b_2' \\ \ldots \\ \qquad\qquad x_n = b_n' \end{cases}$$

trong đó B là ma trận có các phần tử nằm dưới đường chéo chính bằng không.

Quá trình ngược.

Nếu hệ phương trình có duy nhất nghiệm thì nó nhận được bằng cách giải từ phương trình cuối cùng lên trên ta nhận được:

$$\begin{cases} x_n = b_n' \\ x_k = b_k' - \sum_{j-k+1}^{n} b_{kj}x_j \ ; \ \forall k < n \end{cases}$$

Ví dụ: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 7 \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 7 \end{cases}$$

Hệ tương đương với:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 3,5 \\ \quad -6x_2 - 4x_3 = -10 \\ \quad -3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

tương đương với:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 3,5 \\ x_2 + \frac{2}{3}x_3 = \frac{5}{3} \\ 5x_3 = 5 \end{cases}$$

Từ đó: $x_3 = 1$; $x_2 = 5/3 - 2/3 = 1$; $x_1 = 3,5 - 2 - 0,5 = 1$;

Phương páp Gauss có ưu điểm là đơn giản, dễ lập trình. Tuy nhiên thuật toán không thực hiện được nếu có phần tử dẫn a_{kk} ở bước k bằng 0.

2.2. Ứng dụng của phương pháp Gauss.

2.2.1. Tính định thức.

Giả sử cần tính định thức của ma trận A . Ta đưa A về dạng tam giác nhờ quá trình thuận. Khi đó:

$$\det(A) = a_{11}^{0} a_{22}^{1} \ldots a_{nn}^{n-1}$$

2.2.2. Tìm ma trận nghịch đảo.

Cho A là ma trận không suy biến. Ta cần tìm ma trận nghịch đảo $A^{-1} = \left(x_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$.

Do $A.A^{-1} = E$ nên

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_{kj} = \delta_{ij} \quad (i, j = 1; n)$$

Như vậy để tìm ma trận nghịch đảo ta phải giải n hệ phương trình đại số tuyến tính n ẩn với cùng một ma trận hệ số A. Ta có thể dùng chung sơ đồ Gauss.

Ví dụ: Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận A

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Ta có:

$$\left\langle \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\rangle \rightarrow \left\langle \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -7 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right\rangle \rightarrow \left\langle \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 7 & -5 & 1 \end{array} \right\rangle$$

$$\rightarrow \left\langle \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-5}{18} & \frac{1}{18} & \frac{7}{18} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{18} & \frac{7}{18} & \frac{-5}{18} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{18} & \frac{-5}{18} & \frac{1}{18} \end{array} \right\rangle \Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{-5}{18} & \frac{1}{18} & \frac{7}{18} \\ \frac{1}{18} & \frac{7}{18} & \frac{-5}{18} \\ \frac{7}{18} & \frac{-5}{18} & \frac{1}{18} \end{vmatrix}$$

2.3. Phương pháp lặp đơn.

Giả sử cần giải phương trình (4.16)

$$Ax = b$$

Nếu đưa được về dạng:

$$x = Bx + d \qquad (4.20)$$

trong đó B là ma trận vuông cấp n thỏa mãn một trong các điều kiện sau:

1) $$\sum_{i=1}^{n} |b_{ij}| \le q < 1 \quad \forall j = 1; n \qquad (4.21)$$

2) $$\sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| \le q < 1 \quad \forall i = 1; n \qquad (4.22)$$

3) $$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2} \le q < 1 \qquad (4.23)$$

Khi đó $x^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \cdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}$ tùy ý, dãy nghiệm xấp xỉ được xây dựng bởi công thức lặp:

$$x^{k+1} = Bx^k + d \qquad \text{hay} \qquad \left(x_i^{k+1} = \sum b_{ij} x_j^k + d_i \right) \qquad (4.24)$$

Sự hội tụ và sai số.

Chúng ta thừa nhận định lý sau:

Định lý. Nếu đưa được hệ (4.16) về hệ tương đương (4.20) thì hệ có duy nhất nghiệm x* và lim x^k = x* (k→∞). Hơn nữa ta có ước lượng sai số:

$$\left| x_i^* - x_i^{(k)} \right| \le \frac{q}{1-q} \max_{j \le n} \left\{ \left| x_j^k - x_j^{k-1} \right| \right\}; \ \forall i \le n \qquad (4.25)$$

Thông thường người ta chọn $x^0 = d$

Ví dụ : Hệ phương trình

$$\begin{cases} 1,02x_1 - 0,05x_2 - 0,10x_3 = 0,795 \\ -0,11x_1 + 1,03x_2 - 0,05x_3 = 0,849 \\ -0,11x_1 - 0,12x_2 + 1,04x_3 = 1,398 \end{cases}$$

được đưa về dạng:

$$\begin{cases} x_1 = -0,02x_1 + 0,05x_2 + 0,10x_3 + 0,795 \\ x_2 = 0,11x_1 - 0,03x_2 + 0,05x_3 + 0,849 \\ x_3 = 0,11x_1 + 0,12x_2 - 0,04x_3 + 1,398 \end{cases}$$

lấy $x^0 = (0,80;\ 0,85;\ 1,40)^T$ ta có:

$x^1 = (0,962;\ 0,982;\ 1,532)^T$

$x^2 = (0,978;\ 1,002;\ 1,560)^T$

$x^3 = (0,980;\ 1,004;\ 1,563)^T$

sai số

$$\left|x_i^* - x_i^{(k)}\right| \le \frac{0,27}{1-0,27}.3.10^{-3} < 1,1.10^{-3}; \quad \forall i \le 3$$

2.4. Phương pháp lặp Seidel

Phương pháp này là cải tiến của phương pháp lặp đơn để có tốc độ hội tụ nhanh hơn.

Trong phương pháp này thay cho công thức lặp (4.24) ta dùng công thức sau:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{n} b_{1j} x_j^{(k)} + d_1 \\ x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j^{(k)} + d_i \end{cases} \quad (\forall i > 1), k \ge 0 \qquad (4.26)$$

So với phương pháp lặp đơn phương pháp này hợp lý hơn ở chỗ các thành phần $x_j^{(k+1)}$ $(j = 1,...,i-1)$ vừa tính được đã được huy động ngay để tính thành phần $x_j^{(k+1)}$.

Ví dụ:

$$\begin{cases} 6x_1 - x_2 - x_3 = 11,33 \\ -x_1 + 6x_2 - x_3 = 32 \\ -x_1 - x_2 + 6x_3 = 42 \end{cases}$$

ta có:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{6}(x_2 + x_3 + 11,33) \\ x_2 = \dfrac{1}{6}(x_1 + x_3 + 32) \\ x_3 = \dfrac{1}{6}(x_1 + x_2 + 42) \end{cases}$$

Giả sử $x^0 = (4,67;\ \ 7,62;\ \ \ 9,05)^T$

	x_1	x_2	x_3
x^0	4,67	7,62	9,05
x^1	4,66667	7,61944	9,04768
x^2	4,66619	7,61898	9,04753
x^3	4,66608	7,61894	9,04750
x^4	4,66607	7,61893	9,04750
x^5	4,66607	7,61893	9,04750

Vậy nghiệm xấp xỉ bằng

$x = (4,66607;\ \ 7,61893;\ \ 9,04750)^T$

với sai số $<10^{-5}$.

3. GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH PHI TUYẾN BẰNG PHƯƠNG PHÁP LẶP ĐƠN

Trong mục này ta xét hệ phương trình phi tuyến tính:

$$\begin{cases} f_1(x_1,\ldots,x_n) = 0 \\ f_2(x_1,\ldots,x_n) = 0 \\ \ldots. \\ f_n(x_1,\ldots,x_n) = 0 \end{cases} \qquad (4.27)$$

3.1. Mô tả phương pháp.

Gia sử có thể đưa (4.27) về dạng tương đương:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_1,\ldots,x_n) \\ x_2 = \varphi_2(x_1,\ldots,x_n) \\ \ldots. \\ x_n = \varphi_n(x_1,\ldots,x_n) \end{cases} \qquad (4.28)$$

hay dưới dạng vectơ

$$x = \varphi(x) \qquad (4.29)$$

trong đó $\varphi(x)$ là hàm n biến xác định trong miền $D \subset R^n$ và có các tính chất sau:

- $(x) \in D$ với mọi $x \in D$
- Trên D ma trận Jacobi của φ:

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1(x)}{\varphi x_1},\ldots,\dfrac{\partial\varphi_1(x)}{\varphi x_n} \\ \ldots. \\ \ldots. \\ \dfrac{\partial\varphi_n(x)}{\varphi x_1},\ldots,\dfrac{\partial\varphi_n(x)}{\varphi x_n} \end{pmatrix}$$

thỏa mãn

$$\|\phi\| = \max\left\{\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial\varphi_i(x)}{\partial x_j}\right| \;;\; \forall i \le n\right\} \le q < 1 \;\; \forall x \in D \qquad (4.30)$$

Khi đó nghiệm xấp xỉ của hệ phương trình (4.28) nhận được bằng phương pháp lặp sau.

Chọn xấp xỉ ban đầu $x^0 \in D$ tùy ý. Xấp xỉ thứ k+1 đươc tính theo công thức:

$$x^{k+1} = \varphi(x^k) \qquad (4.31)$$

Quá trình lặp này sẽ hội tụ tới nghiệm duy nhất trong miền D.

3.2. Sự hội tụ và sai số.

Người ta đã chứng minh hệ (4.28) có duy nhất nghiệm x* trong miền D và có ước lượng sai số tiên nghiệm:

$$\|x^* - x^n\| \le \frac{q^n}{1-q}\|x^1 - x^0\| \qquad (4.32)$$

và ước lượng sai số trong thực hành là:

$$\left\| x^* - x^n \right\| \le \frac{q^n}{1-q} \left\| x^n - x^{n-1} \right\| \qquad (4.33)$$

Ví dụ:

Xét hệ:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 - 12x + 3 = 0 \\ x^3 - y^3 - 12y + 2 = 0 \end{cases} \qquad (4.34)$$

ta đưa hệ phương trình về dạng:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x^3 + y^3}{12} + \dfrac{1}{4} = \varphi_1(x, y) \\ y = \dfrac{x^3 - y^3}{12} + \dfrac{1}{6} = \varphi_2(x, y) \end{cases}$$

Với D = [0,1] x [0,1] hàm φ thỏa mãn các điều kiện đã nêu với q = 0,5. Lấy $x_0 = y_0 = 0{,}5$ ta có:

i = 1	x = 0.27083	y = 0.16667
i = 2	x = 0.25204	y = 0.16794
i = 3	x = 0.25173	y = 0.16761
i = 4	x = 0.25172	y = 0.16760

3.3. Phương pháp Newton

Xét (4.27) có dạng:

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0 \\ f_2(x, y) = 0 \end{cases} \qquad (4.35)$$

giả sử f_1 và f_2 khả vi liên tục và định thức của ma trận Jacobi |F(x,y)| ≠0 tại nghiệm (x*,y*). Khi đó tính nghiệm gần đúng theo xấp xỉ:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \dfrac{1}{\left|F(x_n, y_n)\right|} \begin{vmatrix} f_1(x_n, y_n) & f'_{1y}(x_n, y_n) \\ f_2(x_n, y_n) & f'_{2y}(x_n, y_n) \end{vmatrix} \\ y_{n+1} = y_n - \dfrac{1}{\left|F(x_n, y_n)\right|} \begin{vmatrix} f'_{1x}(x_n, y_n) & f_1(x_n, y_n) \\ f'_{2x}(x_n, y_n) & f_2(x_n, y_n) \end{vmatrix} \end{cases} \qquad (4.36)$$

Trong đó:

$$F(x,y)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Ví dụ: Giải

$$\begin{cases} f_1(x,y) = 2x^3 - y^2 - 1 = 0 \\ f_2(x,y) = xy^3 - y - 4 \ = 0 \end{cases}$$

Bằng đồ thị ta lấy xấp xỉ ban đầu x_0=1,2; y_0=1,7

Kết quả:

i = 1	x = 1.23488,	y = 1.66098
i = 2	x = 1.23427,	y = 1.66153
i = 3	x = 1.23427,	y = 1.66153