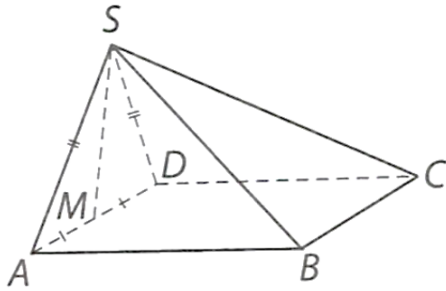


## PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

### Dạng 1. Hai đường thẳng vuông góc

- Câu 1.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành, tam giác  $SAD$  là tam giác đều và  $M$  là trung điểm của cạnh  $AD$ . Tính góc giữa hai đường thẳng  $BC$  và  $SA$ ;  $BC$  và  $SM$ .

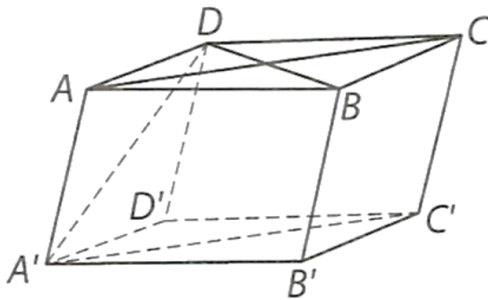
**Lời giải**



Vì  $BC \parallel AD$  nên  $(BC, SA) = (AD, SA) = \angle SAD = 60^\circ$  và  $(BC, SM) = (AD, SM) = 90^\circ$ .

- Câu 2.** Cho hình hộp  $ABCD \cdot A'B'C'D'$  có tất cả các cạnh bằng nhau và góc  $A'AD$  bằng  $120^\circ$ . Tính góc giữa các cặp đường thẳng sau:  $A'C'$  và  $BD$ ;  $AD$  và  $BB'$ ;  $A'D$  và  $BB'$ .

**Lời giải**

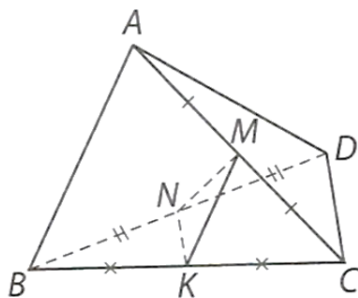


Vì  $ABCD$  là hình thoi và  $A'C' \parallel AC$  nên  $(A'C', BD) = (AC, BD) = 90^\circ$ .

Vì  $BB' \parallel AA'$  nên  $(AD, BB') = (AD, AA') = 180^\circ - \angle A'AD = 60^\circ$  và  $(A'D, BB') = (A'D, AA') = \angle AA'D = 30^\circ$ .

- Câu 3.** Cho tứ diện  $ABCD$ , gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $AC$  và  $BD$ . Biết  $MN = a\sqrt{3}$ ;  $AB = 2\sqrt{2}a$  và  $CD = 2a$ . Chứng minh rằng đường thẳng  $AB$  vuông góc với đường thẳng  $CD$ .

**Lời giải**



Lấy  $K$  là trung điểm của cạnh  $BC$ , ta có:  $NK$  và  $MK$  lần lượt là đường trung bình của tam giác  $BCD$  và tam giác  $ABC$  nên  $NK = a$  và  $MK = a\sqrt{2}$ .

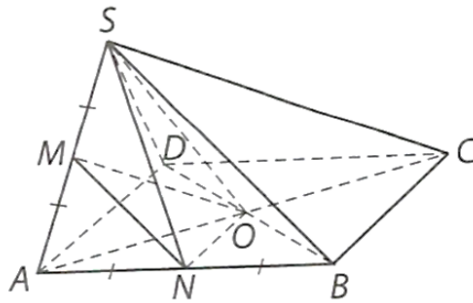
Do đó,  $MN^2 = 3a^2 = MK^2 + NK^2$  suy ra tam giác  $MNK$  vuông tại  $K$ , hay  $MK \perp NK$  mà  $MK \parallel AB$  và  $NK \parallel CD$  nên  $(AB, CD) = (MK, NK) = 90^\circ$ , hay  $AB \perp CD$ .

**Câu 4.** Cho hình chóp  $S \cdot ABCD$  có đáy là hình vuông tâm  $O$  và tất cả các cạnh của hình chóp đều bằng  $a$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $SA, AB$ .

a) Tính góc giữa các cặp đường thẳng sau:  $MN$  và  $SD$ ;  $MO$  và  $SB$ .

b) Tính tang của góc giữa hai đường thẳng  $SN$  và  $BC$ .

**Lời giải**



a) Ta có:  $BD^2 = SB^2 + SD^2 = 2a^2$  nên  $\triangle SBD$  vuông tại  $S$ , mà  $MN \parallel SB$ , suy ra  $(MN, SD) = (SB, SD) = 90^\circ$ .

Với  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$  thì  $MO \parallel SC$ .

Khi đó  $(MO, SB) = (SC, SB) = \angle BSC = 60^\circ$ .

b) Vì  $ON \parallel BC$  nên  $(SN, BC) = (SN, ON) = \angle SNO$ .

Ta có  $SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ ;  $ON = \frac{a}{2}$  và tam giác  $SNO$

vuông tại  $O$  nên  $\tan \angle SNO = \frac{SO}{ON} = \sqrt{2}$ . Vậy  $\tan(SN, BC) = \sqrt{2}$ .

### **Dạng 2. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng**

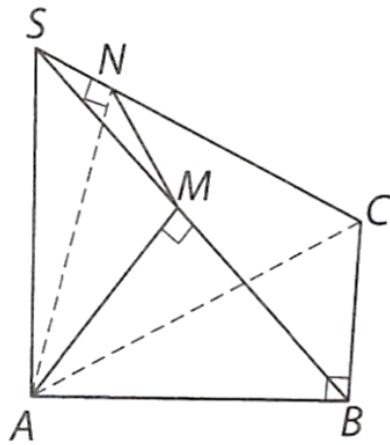
**Câu 5.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $SA$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABC)$  và đáy là tam giác  $ABC$  vuông tại  $B$ . Kẻ  $AM$  vuông góc với  $SB$  tại  $M$  và  $AN$  vuông góc với  $SC$  tại  $N$ . Chứng minh rằng:

a)  $BC \perp (SAB)$ ;

b)  $AM \perp (SBC)$ ;

c)  $SC \perp (AMN)$ .

**Lời giải**



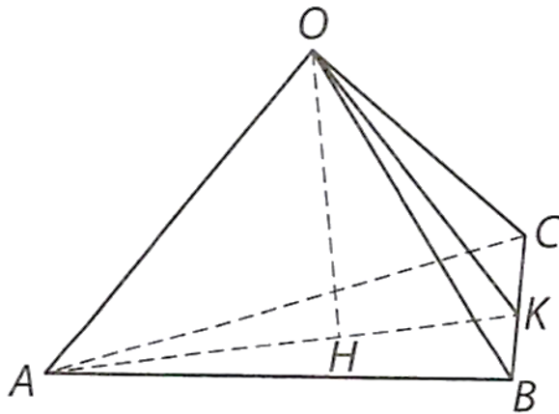
- a) Ta có:  $BC \perp AB$  và  $SA \perp (ABC)$  nên  $SA \perp BC$ , suy ra  $BC \perp (SAB)$ .
- b) Vì  $BC \perp (SAB)$  nên  $BC \perp AM$ , mà  $AM \perp SB$ , suy ra  $AM \perp (SBC)$ .
- c) Vì  $AM \perp (SBC)$  nên  $AM \perp SC$ , mà  $AN \perp SC$ , suy ra  $SC \perp (AMN)$ .

**Câu 6.** Cho tứ diện  $OABC$  có ba cạnh  $OA, OB, OC$  đôi một vuông góc với nhau. Gọi  $H$  là chân đường vuông góc hạ từ  $O$  đến mặt phẳng  $(ABC)$ . Chứng minh rằng:

- a)  $BC \perp (OAH)$ ;
- b)  $H$  là trực tâm của tam giác  $ABC$ ;

c)  $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$ .

**Lời giải**



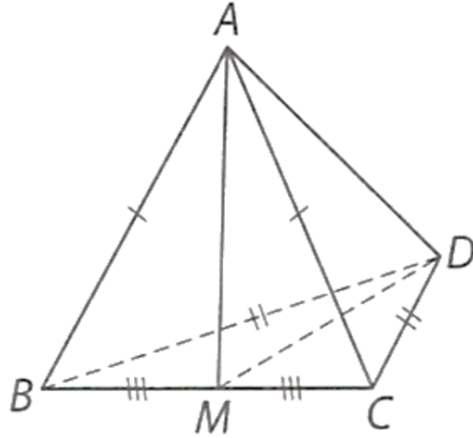
- a) Vì  $OA \perp OB, OA \perp OC$  nên  $OA \perp (OBC)$ , suy ra  $OA \perp BC$ .
- Vì  $OH \perp (ABC)$  nên  $OH \perp BC$ , suy ra  $BC \perp (OAH)$ .
- b) Vì  $BC \perp (OAH)$  nên  $BC \perp AH$ . Tương tự,  $CA \perp BH$ , do đó  $H$  là trực tâm của tam giác  $ABC$ .
- c) Gọi  $K$  là giao điểm của  $AH$  và  $BC$ , ta có:  $OK \perp BC$  và  $OA \perp OK$  nên  $OK$  là đường cao của tam giác vuông  $OBC$  và  $OH$  là đường cao của tam giác vuông  $OAK$ .
- Áp dụng hệ thức lượng trong các tam giác vuông  $OBC$  và  $OAK$ , ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OK^2} \text{ và } \frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}.$$

Từ đó suy ra:  $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}.$

**Câu 7.** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AB = AC$  và  $DB = DC$ . Chứng minh rằng  $AD \perp BC$ .

**Lời giải**



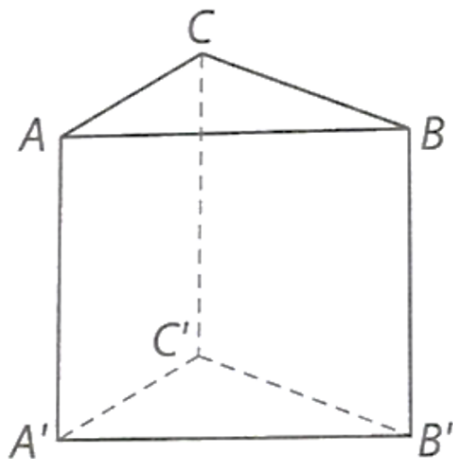
Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ , ta có:  $BC \perp AM, BC \perp MD$ . Do đó  $BC \perp (AMD)$ , suy ra  $BC \perp AD$ .

**Câu 8.** Cho hình lăng trụ tam giác  $ABC \cdot A'B'C'$  có  $AA'$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABC)$  và đáy là tam giác  $ABC$  vuông tại  $B$ . Chứng minh rằng:

a)  $BB' \perp (A'B'C')$ ;

b)  $B'C' \perp (ABB'A')$ .

**Lời giải**



a) Vì  $AA' \perp (ABC), AA' \parallel BB'$  và  $(ABC) \parallel (A'B'C')$  nên  $BB' \perp (A'B'C')$ .

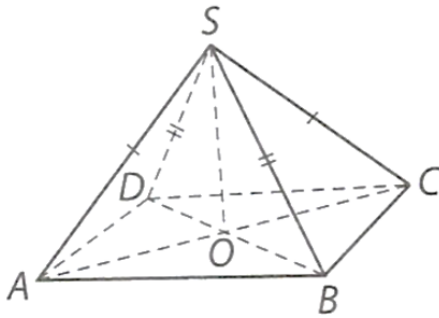
b) Vì  $BC \perp AB, BC \perp BB'$  nên  $BC \perp (ABB'A')$ , mà  $BC \parallel B'C'$ , suy ra  $B'C' \perp (ABB'A')$ .

**Câu 9.** Cho hình chóp  $S \cdot ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thoi tâm  $O$  và  $SA = SC, SB = SD$ . Chứng minh rằng:

a)  $SO \perp (ABCD)$ ;

b)  $AC \perp (SBD)$  và  $BD \perp (SAC)$ .

**Lời giải**



a) Vì  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$  nên  $O$  là trung điểm của  $AC$  và  $BD$ , suy ra  $SO \perp AC, SO \perp BD$ . Do đó  $SO \perp (ABCD)$ .

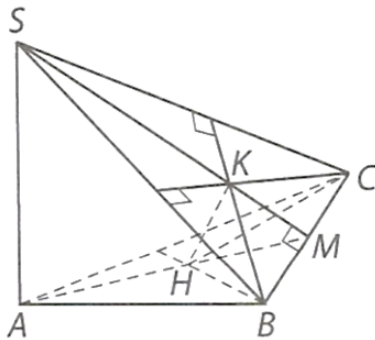
b) Vì  $AC \perp BD, AC \perp SO$  nên  $AC \perp (SBD)$ . Tương tự, ta được  $BD \perp (SAC)$ .

**Câu 10.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $SA \perp (ABC)$ , tam giác  $ABC$  nhọn. Gọi  $H, K$  lần lượt là trực tâm của tam giác  $ABC$  và  $SBC$ . Chứng minh rằng:

a)  $BC \perp (SAH)$  và các đường thẳng  $AH, BC, SK$  đồng quy;

b)  $SB \perp (CHK)$  và  $HK \perp (SBC)$ .

**Lời giải**



a) Vì  $BC \perp SA, BC \perp AH$  nên  $BC \perp (SAH)$ . Gọi  $M$  là giao điểm của  $AH$  và  $BC$ , ta có:  $BC \perp (SAM)$ , suy ra  $BC \perp SM$ , mà  $K$  là trực tâm của tam giác  $SBC$  nên  $SM$  đi qua  $K$ . Do đó,  $SK, AH, BC$  đồng quy tại  $M$ .

b) Vì  $SA \perp (ABC)$  nên  $SA \perp CH$ , mà  $CH \perp AB$ , suy ra  $CH \perp (SAB)$ . Do đó  $CH \perp SB$ , lại có  $SB \perp CK$  nên

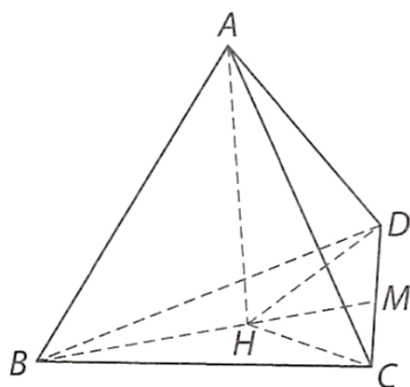
$SB \perp (CHK)$ . Từ đó ta có  $SB \perp HK$ , tương tự, ta chứng minh được

$SC \perp (BHK)$ , suy ra  $SC \perp HK$ . Do đó  $HK \perp (SBC)$ .

### Dạng 3. Góc của đường thẳng với mặt phẳng

**Câu 11.** Cho tứ diện  $ABCD$  có tất cả các cạnh bằng nhau và bằng  $a$ . Tính cosin của góc giữa đường thẳng  $AB$  và mặt phẳng  $(BCD)$ .

**Lời giải**



Kẻ  $AH \perp (BCD)$  tại  $H$ , ta có  $BH$  là hình chiếu vuông góc của  $AB$  trên mặt phẳng  $(BCD)$  nên góc giữa đường thẳng  $AB$  và mặt phẳng  $(BCD)$  bằng góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $BH$ , mà  $(AB, BH) = \angle ABH$ .

Vì  $AB = AC = AD$  nên  $HD = HB = HC$ , hay  $H$  là tâm của tam giác  $BCD$ , suy ra  $BH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ .

Từ đó ta tính được:  $\cos \angle ABH = \frac{BH}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

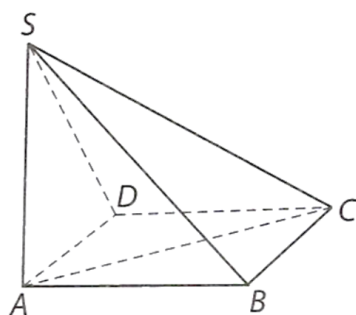
Vậy cosin của góc giữa đường thẳng  $AB$  và mặt phẳng  $(BCD)$  bằng  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

**Câu 12.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh bằng  $a$ ,  $SA \perp (ABCD)$ ,  $SA = a\sqrt{2}$ .

a) Tính góc giữa đường thẳng  $SC$  và mặt phẳng  $(ABCD)$ .

b) Tính tang của góc giữa đường thẳng  $SC$  và mặt phẳng  $(SAB)$ .

**Lời giải**



a) Vì  $SA \perp (ABCD)$  nên  $AC$  là hình chiếu vuông góc của  $SC$  trên mặt phẳng  $(ABCD)$ , do đó góc giữa đường thẳng  $SC$  và mặt phẳng  $(ABCD)$  bằng góc giữa hai đường thẳng  $SC$  và  $AC$ , mà  $(SC, AC) = \angle SCA$ . Vì tam giác  $SAC$  vuông cân tại  $A$  nên  $\angle SCA = 45^\circ$ . Vậy góc giữa đường thẳng  $SC$  và mặt phẳng  $(ABCD)$  bằng  $45^\circ$ .

b) Ta có:  $BC \perp AB, BC \perp SA$  nên  $BC \perp (SAB)$ , suy ra  $SB$  là hình chiếu vuông góc của  $SC$  trên mặt phẳng  $(SAB)$ , góc giữa đường thẳng  $SC$  và mặt phẳng  $(SAB)$  bằng góc giữa hai đường thẳng  $SC$  và  $SB$ .

Ta có:  $(SB, SC) = \widehat{BSC}$ . Xét tam giác  $SBC$  vuông tại  $B$ , có:

$$SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{3}, BC = a.$$

Do đó,  $\tan \widehat{BSC} = \frac{BC}{SB} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

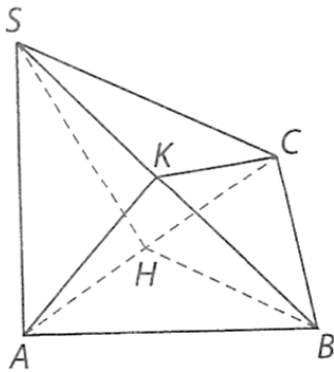
Vậy tang của góc giữa đường thẳng  $SC$  và mặt phẳng  $(SAB)$  bằng  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

**Câu 13.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $SA \perp (ABC)$ , đáy là tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $B$ , biết  $AB = a, SA = a\sqrt{6}$ .

a) Tính tang của góc giữa đường thẳng  $SB$  và mặt phẳng  $(SAC)$ .

b) Tính sin của góc giữa đường thẳng  $AC$  và mặt phẳng  $(SBC)$ .

**Lời giải**



a) Kẻ  $BH \perp AC$  tại  $H$ , mà  $SA \perp (ABC)$  nên  $SA \perp BH$ , suy ra  $BH \perp (SAC)$ . Do đó,  $SH$  là hình chiếu vuông góc của  $SB$  trên mặt phẳng  $(SAC)$  nên góc giữa

đường thẳng  $SB$  và mặt phẳng  $(SAC)$  bằng góc giữa hai đường thẳng  $SB$  và  $SH$ , mà  $(SB, SH) = \widehat{BSH}$ .

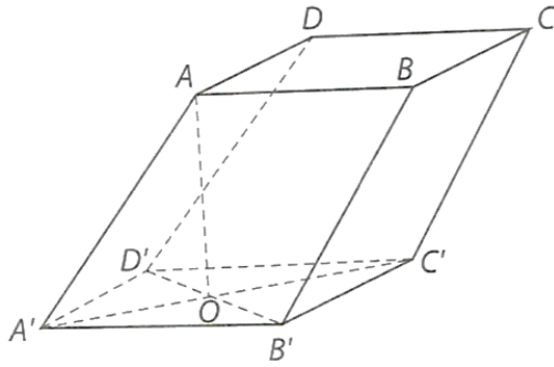
Ta tính được:  $BH = \frac{a\sqrt{2}}{2}, SH = \frac{a\sqrt{26}}{2}$ , suy ra  $\tan \widehat{BSH} = \frac{BH}{SH} = \frac{\sqrt{13}}{13}$ .

b) Kẻ  $AK \perp SB$  tại  $K$ , mà  $BC \perp (SAB)$  nên  $BC \perp AK$ , suy ra  $AK \perp (SBC)$ . Do đó  $CK$  là hình chiếu vuông góc của  $AC$  trên  $(SBC)$ , suy ra góc giữa đường thẳng  $AC$  và  $(SBC)$  bằng góc giữa hai đường thẳng  $AC$  và  $CK$ , mà  $(AC, CK) = \widehat{ACK}$ .

Ta có:  $AK = \frac{SA \cdot AB}{SB} = a\sqrt{\frac{6}{7}}$ , suy ra  $\sin \widehat{ACK} = \frac{AK}{AC} = \sqrt{\frac{3}{7}}$ .

**Câu 14.** Cho hình hộp  $ABCD \cdot A'B'C'D'$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $a$  và  $AA' = a\sqrt{2}$ , hình chiếu vuông góc của  $A$  trên mặt phẳng  $(A'B'C'D')$  trùng với trung điểm của  $B'D'$ . Tính góc giữa đường thẳng  $AA'$  và mặt phẳng  $(A'B'C'D')$ .

**Lời giải**



Gọi  $O$  là giao điểm của  $A'C'$  và  $B'D'$ . Ta có:  $AO$  là hình chiếu vuông góc của  $AA'$  trên mặt phẳng  $(A'B'C'D')$ , góc giữa đường thẳng  $AA'$  và mặt phẳng  $(A'B'C'D')$  bằng góc giữa  $AA'$  và  $AO$ . Mà  $(AA', AO) = \angle AAO$ , ta lại có  $AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ . Do đó  $\cos \angle AAO = \frac{AO}{AA'} = \frac{1}{2}$ , suy ra  $\angle AAO = 60^\circ$ .

Vậy góc giữa đường thẳng  $AA'$  và mặt phẳng  $(A'B'C'D')$  bằng  $60^\circ$ .

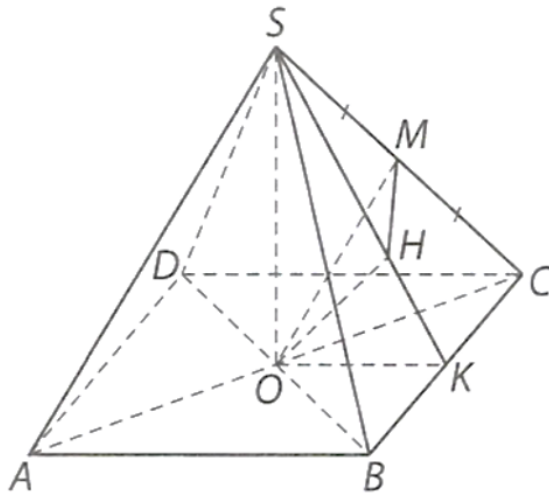
**Câu 15.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông tâm  $O$  và các cạnh đều bằng  $a$ .

a) Chứng minh rằng  $SO \perp (ABCD)$ .

b) Tính góc giữa đường thẳng  $SA$  và mặt phẳng  $(SBD)$ .

c) Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $SC$  và  $\alpha$  là góc giữa đường thẳng  $OM$  và mặt phẳng  $(SBC)$ . Tính  $\sin \alpha$ .

**Lời giải**



a) Ta có:  $SO \perp AC$ ;  $SO \perp BD$  nên  $SO \perp (ABCD)$ .

b) Vì  $AO \perp (SBD)$  nên  $SO$  là hình chiếu vuông góc của  $SA$  trên mặt phẳng  $(SBD)$ , do đó góc giữa đường thẳng  $SA$  và mặt phẳng  $(SBD)$  bằng góc giữa hai đường thẳng  $SA$  và  $SO$ . Mà  $(SA, SO) = \angle ASO$  nên góc giữa đường thẳng  $SA$  và mặt phẳng  $(SBD)$  bằng góc  $ASO$ . Xét tam giác  $SAC$  có  $SA^2 + SC^2 = AC^2$  và  $SA = SC$  nên tam giác  $SAC$  vuông cân tại  $S$ , suy ra  $\angle ASO = 45^\circ$ . Vậy góc giữa đường thẳng  $SA$  và mặt phẳng  $(SBD)$  bằng  $45^\circ$ .

c) Kẻ  $OK \perp BC$  tại  $K, OH \perp SK$  tại  $H$  thì ta chứng minh được  $OH \perp (SBC)$ , suy ra  $HM$  là hình chiếu vuông góc của  $OM$  trên mặt phẳng  $(SBC)$ , do đó góc giữa đường thẳng  $OM$  và mặt phẳng  $(SBC)$  bằng góc giữa hai đường thẳng  $OM$  và  $MH$ , mà  $(OM, MH) = \widehat{OMH}$  nên góc giữa đường thẳng  $OM$  và mặt phẳng  $(SBC)$  bằng góc  $OMH$  hay  $\widehat{OMH} = \alpha$ .

Ta có:  $OM = \frac{a}{2}, OK = \frac{a}{2}, SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

Tam giác  $SOK$  vuông tại  $O$ , đường cao  $OH$  nên  $OH = \frac{SO \cdot OK}{SK} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$ .

Vì tam giác  $OMH$  vuông tại  $H$  nên  $\sin \alpha = \sin \widehat{OMH} = \frac{OH}{OM} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ .

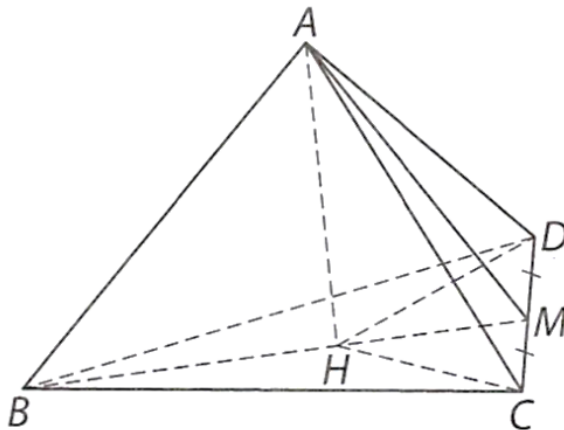
#### Dạng 4. Hai mặt phẳng vuông góc. Góc nhị diện

**Câu 16.** Cho tứ diện đều  $ABCD$  có độ dài các cạnh bằng  $a$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $CD$ , kẻ  $AH$  vuông góc với  $BM$  tại  $H$ .

a) Chứng minh rằng  $AH \perp (BCD)$ .

b) Tính cosin của góc giữa mặt phẳng  $(BCD)$  và mặt phẳng  $(ACD)$ .

**Lời giải**



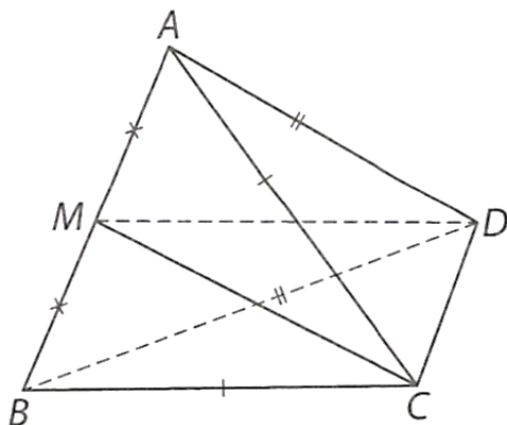
a) Vì  $M$  là trung điểm của  $CD$  nên  $CD \perp BM$ ,  $CD \perp AM$ , do đó  $CD \perp (ABM)$ , suy ra  $CD \perp AH$ , ta lại có  $AH \perp BM$  nên  $AH \perp (BCD)$ .

b) Vì  $AM \perp CD, BM \perp CD$  nên góc giữa hai mặt phẳng  $(ACD)$  và  $(BCD)$  bằng góc giữa hai đường thẳng  $AM$  và  $BM$ , mà  $(AM, BM) = \widehat{AMB}$  nên góc giữa hai mặt phẳng  $(ACD)$  và  $(BCD)$  bằng  $\widehat{AMB}$ .

Ta có:  $HM = \frac{1}{3}BM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$  và  $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ , tam giác  $AHM$  vuông tại  $H$  nên  $\cos \widehat{AMB} = \frac{HM}{AM} = \frac{1}{3}$ .

**Câu 17.** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AC = BC, AD = BD$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$ . Chứng minh rằng  $(CDM) \perp (ABC)$  và  $(CDM) \perp (ABD)$ .

**Lời giải**



Vì  $M$  là trung điểm của  $AB$  nên  $AB \perp CM$ ,  $AB \perp DM$ , suy ra  $AB \perp (CDM)$ .

Vì hai mặt phẳng  $(ABC)$  và  $(ABD)$  đều chứa đường thẳng  $AB$  nên  $(ABC) \perp (CDM)$ ,  $(ABD) \perp (CDM)$ .

**Câu 18.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thoi tâm  $O$ , cạnh bằng  $a$ , góc  $BAD$  bằng  $60^\circ$ .

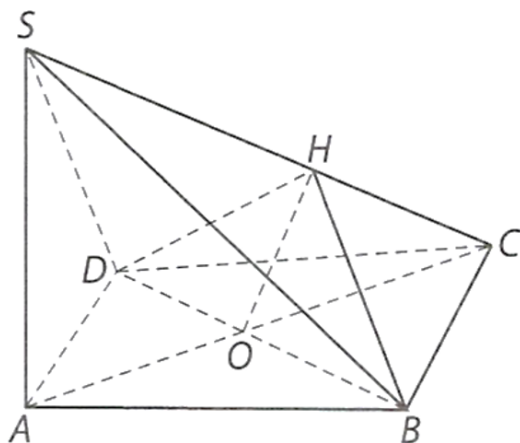
Kẻ  $OH$  vuông góc với  $SC$  tại  $H$ . Biết  $SA \perp (ABCD)$  và  $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ . Chứng minh rằng:

a)  $(SBD) \perp (SAC)$ ;

b)  $(SBC) \perp (BDH)$ ;

c)  $(SBC) \perp (SCD)$ .

**Lời giải**



a) Ta có  $SA \perp (ABCD)$  nên  $SA \perp BD$  mà  $BD \perp AC$ , do đó  $BD \perp (SAC)$ .

Vì mặt phẳng  $(SBD)$  chứa  $BD$  nên  $(SBD) \perp (SAC)$ .

b) Ta có  $BD \perp (SAC)$  nên  $BD \perp SC$  mà  $SC \perp OH$ , do đó  $SC \perp (BDH)$ .

Vì mặt phẳng  $(SBC)$  chứa  $SC$  nên  $(SBC) \perp (BDH)$ .

c) Ta có:  $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$ .

Vì  $\triangle CHO \sim \triangle CAS$  nên  $\frac{HO}{AS} = \frac{CO}{CS}$ , suy ra  $HO = \frac{CO \cdot AS}{CS} = \frac{a}{2} = \frac{BD}{2}$ .

Do đó, tam giác  $BDH$  vuông tại  $H$ , suy ra  $\angle BHD = 90^\circ$ .

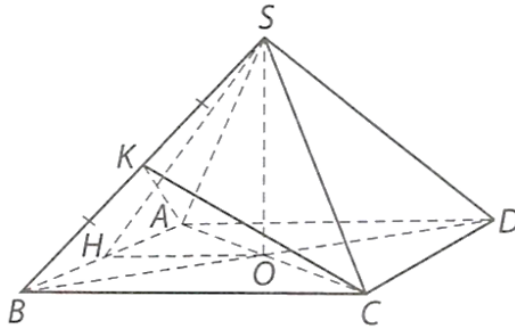
Ta lại có  $BH \perp SC, DH \perp SC$  nên  $(SBC) \perp (SCD)$ .

**Câu 19.** Cho hình chóp đều  $S.ABCD$  có tất cả các cạnh bằng  $a$ . Tính cosin góc giữa hai mặt phẳng sau:

a) Mặt phẳng  $(SAB)$  và mặt phẳng  $(ABCD)$ ;

b) Mặt phẳng  $(SAB)$  và mặt phẳng  $(SBC)$ .

**Lời giải**



a) Gọi  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ . Khi đó  $SO \perp (ABCD)$  nên  $SO \perp AB$ , kẻ  $OH \perp AB$  tại  $H$  thì  $AB \perp (SOH)$ , suy ra  $AB \perp SH$ . Do đó, góc giữa hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(ABCD)$  bằng góc giữa hai đường thẳng  $SH$  và  $HO$ , mà  $(SH, HO) = \angle SHO$  nên góc giữa hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(ABCD)$  bằng  $\angle SHO$ .

Ta tính được  $OH = \frac{a}{2}, SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ , suy ra  $\cos \angle SHO = \frac{OH}{SH} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

b) Gọi  $K$  là trung điểm của  $SB$ . Khi đó  $AK \perp SB, CK \perp SB$ , suy ra góc giữa hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(SBC)$  bằng góc giữa hai đường thẳng  $AK$  và  $CK$ .

Ta có:  $AK = CK = \frac{a\sqrt{3}}{2}, AC = a\sqrt{2}$ .

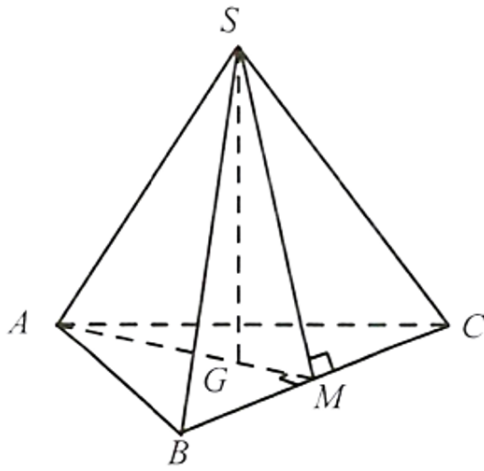
Áp dụng định lý cosin trong tam giác  $ACK$ , ta có:

$$\cos \angle AKC = \frac{AK^2 + CK^2 - AC^2}{2 \cdot AK \cdot CK} = \frac{-1}{3}, \text{ suy ra } \cos(AK, CK) = -\cos \angle AKC = \frac{1}{3}.$$

Vậy cosin góc giữa hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(SBC)$  bằng  $\frac{1}{3}$ .

**Câu 20.** Cho hình chóp tam giác đều  $S.ABC$ , cạnh đáy bằng  $a$ , cạnh bên bằng  $\frac{a\sqrt{15}}{6}$ . Tính số đo góc phẳng nhị diện  $[S, BC, A]$ .

**Lời giải**



Gọi  $M$  là trung điểm  $BC$ ,  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ . Ta có  $SG \perp (ABC)$ ,  $SM \perp BC$ ,  $AM \perp BC$ , suy ra  $\widehat{SMG}$  là góc phẳng nhị diện  $[S, BC, A]$

Ta tính được

$$AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}, GM = \frac{a\sqrt{3}}{6},$$

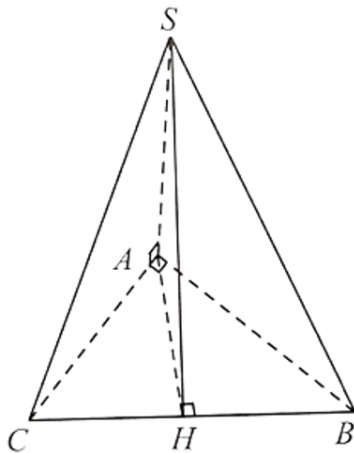
$$SM = \sqrt{SB^2 - BM^2} = \frac{a\sqrt{6}}{6},$$

$$SG = \sqrt{SM^2 - GM^2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Ta có tam giác  $SMG$  vuông cân tại  $G$ , suy ra số đo góc phẳng nhị diện  $[S, BC, A] = \widehat{SMG} = 45^\circ$ .

**Câu 21.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $SA \perp (ABC)$ . Tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ ,  $\widehat{ABC} = 30^\circ$ ,  $AC = a$ ,  $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ . Tính số đo góc phẳng nhị diện  $[S, BC, A]$ .

**Lời giải**



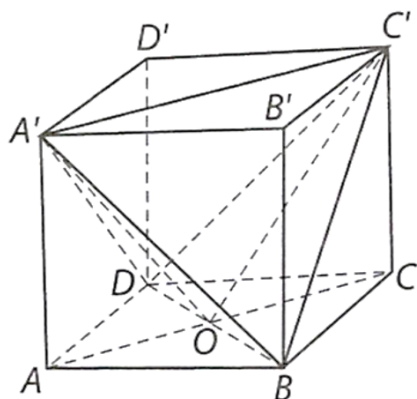
Vẽ  $AH \perp BC (H \in BC)$ , ta có  $SH \perp BC$ , suy ra  $\widehat{SHA}$  là góc phẳng nhị diện  $[S, BC, A]$ . Ta có  $AH = AC \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} = SA$ , suy ra  $\widehat{SHA} = 45^\circ$ .

**Câu 22.** Cho hình lập phương  $ABCD \cdot A'B'C'D'$  có cạnh bằng  $a$ .

a) Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng  $(A'BD)$  và  $(ABCD)$ .

b) Tính cosin của số đo góc nhị diện  $[A', BD, C']$ .

**Lời giải**



a) Gọi  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ , ta có:  $AO \perp BD, A'O \perp BD$  nên góc giữa hai mặt phẳng  $(A'BD)$  và  $(ABCD)$  bằng góc giữa hai đường thẳng  $AO, A'O$  mà

$(AO, A'O) = \angle OA'A$  nên góc giữa hai mặt phẳng  $(A'BD)$  và  $(ABCD)$  bằng  $\angle OA'A$ . Ta có:

$$OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}, OA' = \sqrt{OA^2 + AA'^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

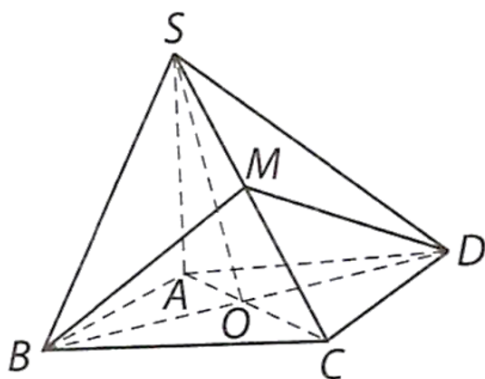
Suy ra  $\cos \angle OA'A = \frac{AO}{OA'} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

b) Vì  $A'O \perp BD, CO' \perp BD$  nên góc nhị diện  $[A', BD, C']$  bằng  $\angle A'OC'$ .

Ta có  $OA' = OC' = \frac{a\sqrt{6}}{2}, A'C' = a\sqrt{2}$  nên  $\cos \angle A'OC' = \frac{OA'^2 + OC'^2 - A'C'^2}{2 \cdot OA' \cdot OC'} = \frac{2}{9}$ .

**Câu 23.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $a$ , biết  $(SAB) \perp (ABCD)$ ,  $(SAD) \perp (ABCD)$  và  $SA = a$ . Tính cosin của số đo góc nhị diện  $[S, BD, C]$  và góc nhị diện  $[B, SC, D]$ .

**Lời giải**



Ta có  $SO \perp BD, CO \perp BD$  nên góc nhị diện  $[S, BD, C]$  bằng  $\widehat{SOC}$ . Vì tam giác  $SAO$  vuông tại

$$A \text{ nên } SO = \sqrt{SA^2 + AO^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2} \text{ và}$$

$$\cos \widehat{SOC} = -\cos \widehat{SOA} = -\frac{OA}{SO} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Kẻ  $BM \perp SC$  tại  $M$  thì  $DM \perp SC$  nên  $[B, SC, D] = \widehat{BMD}$ .

Ta có  $BC \perp (SAB)$  nên tam giác  $SBC$  vuông tại  $B$ , tính được  $SB = a\sqrt{2}$ ,  $SC = a\sqrt{3}$  và

$$DM = BM = \frac{SB \cdot BC}{SC} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Áp dụng định lí côsin trong tam giác  $BDM$ , ta có:

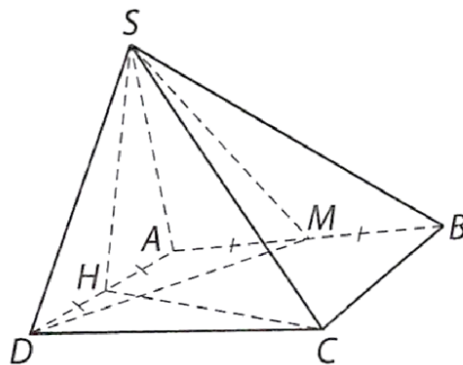
$$\cos \widehat{BMD} = \frac{BM^2 + DM^2 - BD^2}{2 \cdot BM \cdot DM} = -\frac{3}{4}.$$

**Câu 24.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $a$ , tam giác  $SAD$  đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy  $(ABCD)$ . Gọi  $H, M$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AD$  và  $AB$ .

a) Tính cosin của góc giữa đường thẳng  $SC$  và mặt đáy  $(ABCD)$ .

b) Chứng minh rằng  $(SMD) \perp (SHC)$ .

**Lời giải**



a) Ta có  $(SAD) \perp (ABCD)$  và  $SH \perp AD$  nên  $SH \perp (ABCD)$ , suy ra góc giữa đường thẳng  $SC$  và mặt phẳng  $(ABCD)$  bằng góc giữa hai đường thẳng  $SC$  và  $CH$ , mà  $(SC, CH) = \widehat{SCH}$ , t

a tính được  $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}, HC = \frac{a\sqrt{5}}{2}$  và  $SC = a\sqrt{2}$ .

$$\cos \widehat{SCH} = \frac{HC}{SC} = \frac{\sqrt{10}}{4}.$$

b) Ta có  $DM \perp CH, DM \perp SH$  nên  $DM \perp (SCH)$ . Hơn nữa, mặt phẳng  $(SDM)$  chứa đường thẳng  $DM$  nên  $(SDM) \perp (SCH)$ .

**Câu 25.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có  $ABCD$  là hình vuông,  $AC$  cắt  $BD$  tại  $O, SO \perp (ABCD)$ . Tất cả các cạnh của hình chóp bằng  $a$ .

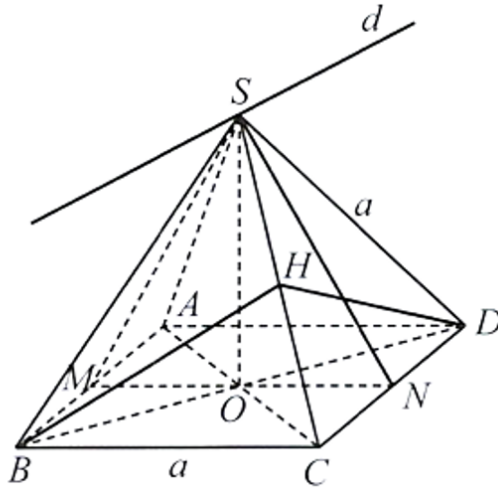
a) Tính góc giữa đường thẳng  $SB$  và mặt phẳng  $(SAC)$ .

b) Gọi  $\alpha$  là số đo của góc nhị diện  $[S, CD, A]$ . Tính  $\cos \alpha$ .

c) Gọi  $d$  là giao tuyến của hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(SCD)$ ,  $\beta$  là số đo của góc nhị diện  $[A, d, D]$ . Tính  $\cos \beta$ .

d\*) Gọi  $\gamma$  là số đo góc nhị diện  $[B, SC, D]$ . Tính  $\cos \gamma$ .

**Lời giải**



a) Vì  $BO \perp AC, BO \perp SO$  nên  $BO \perp (SAC)$ . Suy ra góc giữa đường thẳng  $SB$  và mặt phẳng  $(SAC)$  bằng góc  $BSO$ . Xét tam giác  $SBD$  có  $SB = SD$  và  $SB^2 + SD^2 = BD^2$  nên tam giác  $SBD$  vuông cân tại  $S$ . Suy ra  $\angle BSO = 45^\circ$ , hay góc giữa đường thẳng  $SB$  và mặt phẳng  $(SAC)$  bằng  $45^\circ$ .

b) Gọi  $N$  là hình chiếu của  $S$  trên  $CD$ . Khi đó, số đo của  $[S, CD, A]$  bằng  $\angle SNO$ , hay  $\angle SNO = \alpha$ . Ta có:

$$\cos \alpha = \frac{ON}{SN} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

c) Gọi  $M$  là hình chiếu của  $S$  trên  $AB$ . Vì  $AB \parallel CD$  nên  $d \parallel AB$  và  $d \parallel CD$ . Khi đó  $SM \perp d, SN \perp d$ . Suy ra số đo của  $[A, d, D]$  bằng  $\angle MSN$ , hay  $\angle MSN = \beta$ .

$$\cos \beta = \frac{SM^2 + SN^2 - MN^2}{2SM \cdot SN} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - a^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3}$$

Ta có:

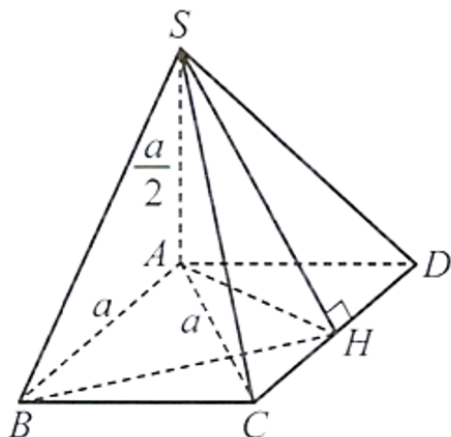
d\*) Gọi  $H$  là hình chiếu của  $B$  trên  $SC$ . Vì  $BD \perp (SAC)$  nên  $BD \perp SC$ . Suy ra  $SC \perp (BHD)$  nên  $SC \perp HD$ . Vậy số đo của  $[B, SC, D]$  bằng  $\angle BHD$ , hay  $\angle BHD = \gamma$ .

Vì hai tam giác  $SBC, SCD$  đều nên  $BH = DH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ . Khi đó, ta có:

$$\cos y = \frac{HB^2 + HD^2 - BD^2}{2HB \cdot HD} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - (a\sqrt{2})^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{-1}{3}$$

**Câu 26.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có  $SA \perp (ABCD)$ ,  $ABCD$  là hình thoi cạnh  $a$ ,  $AC = a$ ,  $SA = \frac{a}{2}$ . Tính số đo của góc nhị diện  $[S, CD, A]$ .

**Lời giải**



Gọi  $H$  là hình chiếu của  $A$  trên  $CD$ . Khi đó,  $AH \perp CD$ . Vì  $SA \perp (ABCD)$  nên  $SA \perp CD$ . Suy ra  $CD \perp (SAH)$ . Khi đó,  $SH \perp CD$ . Như vậy, số đo của  $[S, CD, A]$  bằng  $\widehat{SHA}$ . Ta có:

$$AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}, SA = \frac{a}{2}$$

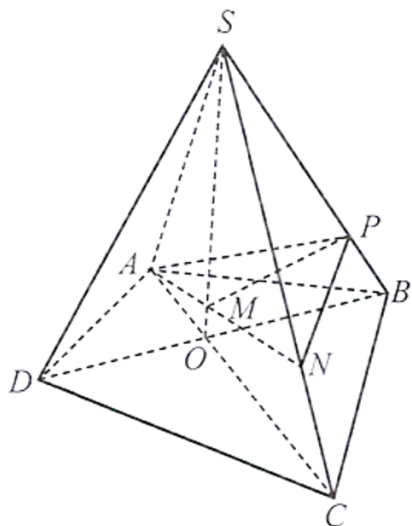
nên

$$\tan \widehat{SHA} = \frac{SA}{AH} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy số đo của góc nhị diện  $[S, CD, A]$  bằng  $\widehat{SHA} = 30^\circ$ .

**Câu 30\*.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có  $AC$  cắt  $BD$  tại  $O$ . Gọi  $\alpha, \beta$  lần lượt là số đo của các nhị diện  $[A, SO, B]$  và  $[B, SO, C]$ . Tính  $\alpha + \beta$ .

**Lời giải**

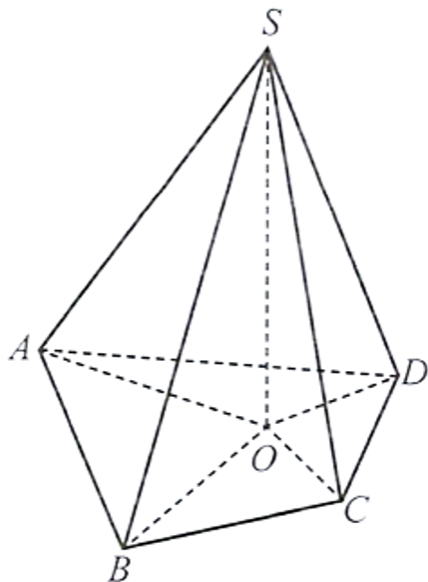


Trong mặt phẳng  $(SAC)$ , lấy đường thẳng  $AN (N \in SC)$  sao cho  $AN \perp SO$ . Gọi  $M$  là giao điểm của  $AN$  và  $SO$ . Trong mặt phẳng  $(SOB)$ , lấy đường thẳng  $MP (P \in SB)$  sao cho  $MP \perp SO$ . Khi đó, số đo của  $[A, SO, B]$  bằng  $\angle AMP$ , hay  $\angle AMP = \alpha$  và số đo của  $[B, SO, C]$  bằng  $\angle PMN$ , hay  $\angle PMN = \beta$ . Trong mặt phẳng  $(APN)$  có  $A, M, N$  thẳng hàng nên  $\alpha + \beta = 180^\circ$ .

**Câu 31\*.** Cho hình chóp  $S.ABCD$ . Gọi  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  lần lượt là góc giữa các đường thẳng  $SA, SB, SC, SD$  và mặt phẳng  $(ABCD)$ . Chứng minh rằng:

$$SA = SB = SC = SD \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4.$$

**Lời giải**



Gọi  $O$  là hình chiếu của  $S$  trên  $(ABCD)$ . Khi đó, ta có:  $\alpha_1 = \angle SAO, \alpha_2 = \angle SBO, \alpha_3 = \angle SCO, \alpha_4 = \angle SDO$ . Các tam giác  $SAO, SBO, SCO, SDO$  vuông có các góc  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  đều nhỏ hơn  $90^\circ$  nên

$$\sin \alpha_1 = \sin \alpha_2 = \sin \alpha_3 = \sin \alpha_4 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4.$$

Như vậy:

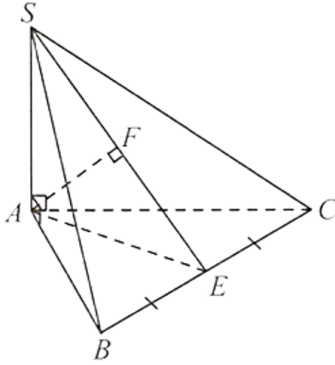
$$\begin{aligned}
SA = SB = SC = SD &\Leftrightarrow \frac{SO}{SA} = \frac{SO}{SB} = \frac{SO}{SC} = \frac{SO}{SD} \\
&\Leftrightarrow \sin \alpha_1 = \sin \alpha_2 = \sin \alpha_3 = \sin \alpha_4 \\
&\Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4.
\end{aligned}$$

### Dạng 5. Khoảng cách

**Câu 27.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác đều cạnh  $a$ , cạnh bên  $SA$  vuông góc với đáy.

Tính khoảng cách từ điểm  $A$  đến mặt phẳng  $(SBC)$  theo  $a$ , biết  $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ .

**Lời giải**



Gọi  $E$  là trung điểm của  $BC$  thì  $BC \perp AE$  (vì  $\Delta ABC$  đều). Ta có  $BC \perp SA$  và  $BC \perp AE \Rightarrow BC \perp (SAE) \Rightarrow (SBC) \perp (SAE)$ .

Trong mặt phẳng  $(SAE)$ , vẽ  $AF \perp SE (F \in SE)$ .

Suy ra  $AF \perp (SBC)$  hay  $d(A, (SBC)) = AF$ .

Xét  $\Delta SAE$  vuông tại  $A$ :

$$\frac{1}{AF^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{2}{3a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{2}{a^2} \Rightarrow AF = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

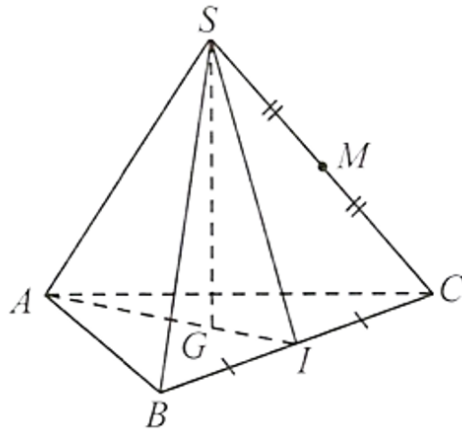
$$\text{Vậy } d(A, (SBC)) = AF = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

**Câu 28.** Cho hình chóp tam giác đều  $S.ABC$  có cạnh đáy bằng  $3a$ , cạnh bên bằng  $2a$ . Gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ ,  $M$  là trung điểm của  $SC$ .

a) Tính khoảng cách từ  $S$  đến mặt phẳng  $(ABC)$ .

b) Tính khoảng cách từ  $M$  đến mặt phẳng  $(SAG)$ .

**Lời giải**



a) Do  $S.ABC$  là hình chóp tam giác đều nên  $SG \perp (ABC)$  hay  $d(S, (ABC)) = SG$ .

Tam giác  $ABC$  là tam giác đều cạnh  $3a$  nên  $AG = \frac{2}{3} \cdot \frac{3a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$ .

Tam giác  $SAG$  vuông tại  $G$  nên

$$SG = \sqrt{SA^2 - AG^2} = \sqrt{4a^2 - 3a^2} = a.$$

Vậy  $d(S, (ABC)) = a$ .

b) Vì  $SC \cap (SAG) = S$  nên  $\frac{d(M, (SAG))}{d(C, (SAG))} = \frac{MS}{CS} = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow d(M, (SAG)) = \frac{1}{2} d(C, (SAG))$$

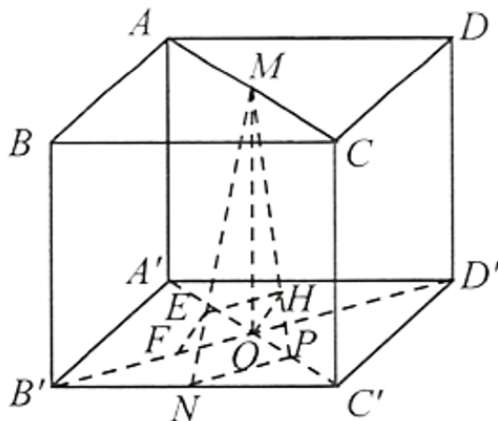
Gọi  $I$  là trung điểm của  $BC$ .

Ta có:  $CB \perp AI$  và  $CB \perp SG \Rightarrow CB \perp (SAG)$  và  $CB \cap (SAG) = I$ .

Do đó  $d(C, (SAG)) = CI = \frac{1}{2} BC = \frac{3a}{2}$ . Vậy  $d(M, (SAG)) = \frac{3a}{4}$ .

**Câu 29.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  cạnh  $a$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AC$  và  $B'C'$ . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $MN$  và  $B'D'$ .

**Lời giải**



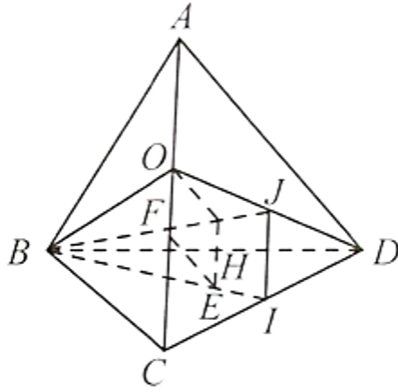
$B'D'$  cắt  $A'C'$  tại  $O$ . Gọi  $P$  là trung điểm của  $OC'$ . Vẽ  $OH \perp MP, HE \parallel NP, EF \parallel OH$ .

Ta có:  $d(MN, B'D') = EF = OH$ .

Xét tam giác vuông  $MOP$ , ta có  $OM = a, OP = \frac{a\sqrt{2}}{4}$ , suy ra  $OH = \frac{a}{3}$ .

**Câu 30.** Cho tứ diện đều  $ABCD$  có cạnh bằng  $\sqrt{11}$ . Gọi  $I$  là trung điểm của cạnh  $CD$ . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AC$  và  $BI$ .

**Lời giải**



Gọi  $O$  là trung điểm  $AC$ ,  $J$  là trung điểm  $OD$ . Vẽ  $OH \perp BJ, HE \parallel AC, EF \parallel OH$ .

Ta có  $d(AC, BI) = EF = OH$ .

Xét tam giác  $OBD$  cân tại  $O$ , ta có

$$BD = \sqrt{11}, OB = OD = \frac{\sqrt{33}}{2}, BJ = \frac{\sqrt{11}}{4},$$

$$S_{\triangle OBD} = \frac{11\sqrt{2}}{4}, OH = \sqrt{2}$$

**Câu 31.** Cho hình lập phương  $ABCD \cdot A'B'C'D'$  có cạnh bằng  $a$ . Tính theo  $a$  khoảng cách:

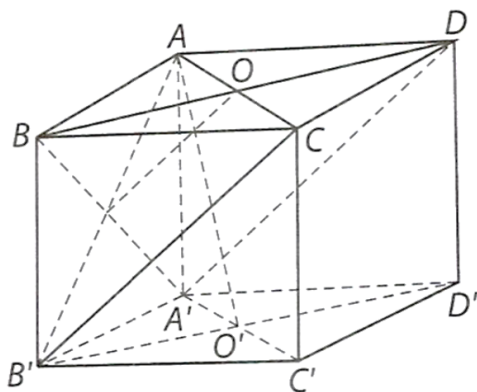
a) Giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $C'D'$ .

b) Giữa đường thẳng  $AC$  và mặt phẳng  $(A'B'C'D')$ .

c) Từ điểm  $A$  đến đường thẳng  $B'D'$ .

d) Giữa hai đường thẳng  $AC$  và  $B'D'$ .

**Lời giải**



a) Vì  $BC'$  vuông góc với cả hai đường thẳng  $AB$  và  $C'D'$  nên  $d(AB, C'D') = BC' = a\sqrt{2}$ .

b) Vì  $AC \parallel (A'B'C'D')$  nên

$$d(AC, (A'B'C'D')) = d(A, (A'B'C'D')) = AA' = a.$$

c) Gọi  $O'$  là giao điểm của  $A'C'$  và  $B'D'$ , ta có  $AO' \perp B'D'$ , theo định lý Pythagore, áp dụng cho tam giác  $AA'O'$  vuông tại  $A'$  thì  $AO' = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ . Do đó  $d(A, B'D') = AO' = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ .

d) Ta có:  $d(AC, B'D') = d(AC, (A'B'C'D')) = d(A, (A'B'C'D')) = AA' = a$ .

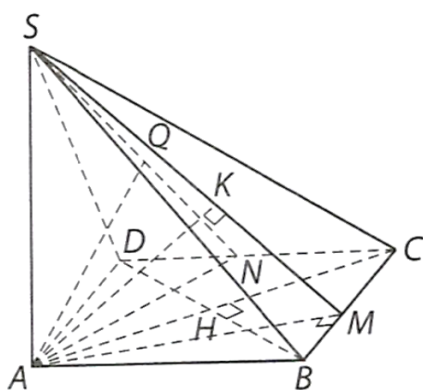
**Câu 32.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy là tam giác  $ABC$  đều cạnh bằng  $a$ ,  $SA \perp (ABC)$  và  $SA = 2a$ . Tính theo  $a$  khoảng cách:

a) Từ điểm  $B$  đến mặt phẳng  $(SAC)$ .

b) Từ điểm  $A$  đến mặt phẳng  $(SBC)$ .

c) Giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $SC$ .

**Lời giải**



a) Kẻ  $BH \perp AC$  tại  $H$ , mà  $SA \perp (ABC)$  nên  $SA \perp BH$ , suy ra  $BH \perp (SAC)$ . Do đó  $d(B, (SAC)) = BH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

b) Kẻ  $AM \perp BC$  tại  $M$  và  $AK \perp SM$  tại  $K$  thì  $AK \perp (SBC)$ , suy ra  $d(A, (SBC)) = AK$ .

Ta có:  $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{19}{12a^2}$ , suy ra  $AK = 2a\sqrt{\frac{3}{19}}$ . Vậy  $d(A, (SBC)) = 2a\sqrt{\frac{3}{19}}$ .

c) Dựng hình bình hành  $ABCD$  thì  $AB \parallel (SCD)$  và mặt phẳng  $(SCD)$  chứa  $SC$  nên  $d(AB, SC) = d(AB, (SCD))$ . Mà  $d(AB, (SCD)) = d(A, (SCD))$ , tính tương tự như câu b ta được:

$$d(A, (SCD)) = 2a\sqrt{\frac{3}{19}}. \text{ Vậy } d(AB, SC) = 2a\sqrt{\frac{3}{19}}.$$

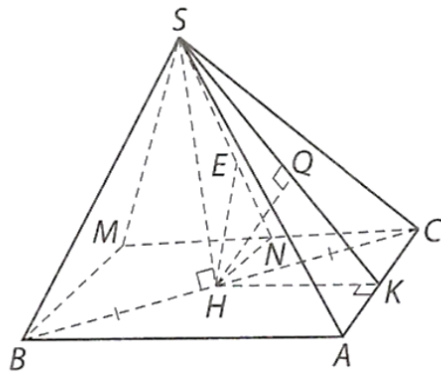
**Câu 33.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông tại  $A$ , góc  $ABC$  bằng  $60^\circ$ , biết tam giác  $SBC$  đều cạnh  $a$  và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng  $(ABC)$ . Tính theo  $a$  khoảng cách:

a) Từ điểm  $S$  đến mặt phẳng  $(ABC)$ .

b) Từ điểm  $B$  đến mặt phẳng  $(SAC)$ .

c) Giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $SC$ .

**Lời giải**



a) Kẻ  $SH$  vuông góc với  $BC$  tại  $H$  thì  $SH \perp (ABC)$ , suy ra  $d(S, (ABC)) = SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

b) Kẻ  $HK$  vuông góc với  $AC$  tại  $K$ ,  $HQ$  vuông góc với  $SK$  tại  $Q$  thì  $d(H, (SAC)) = HQ$ .

Ta có:  $AB = \frac{a}{2}$ ,  $HK = \frac{a}{4}$  và tam giác  $SHK$  vuông tại  $H$ , đường cao  $HQ$  nên  $HQ = \frac{SH \cdot HK}{SK} = \frac{a\sqrt{39}}{26}$ .

Lại có  $H$  là trung điểm của  $BC$  nên  $d(B, (SAC)) = 2d(H, (SAC)) = \frac{a\sqrt{39}}{13}$ .

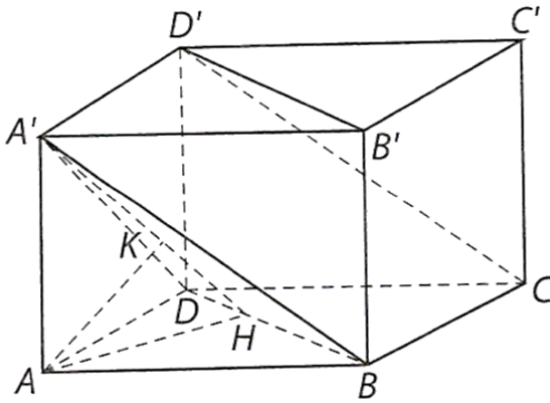
c) Dựng hình bình hành  $ABMC$ , chứng minh được  $ABMC$  là hình chữ nhật. Khi đó  $AB \parallel (SCM)$  và mặt phẳng  $(SMC)$  chứa  $SC$  nên  $d(AB, SC) = d(AB, (SCM)) = d(B, (SCM)) = 2d(H, (SCM))$ .

Kẻ  $HN$  vuông góc với  $CM$  tại  $N$ ,  $HE$  vuông góc với  $SN$  tại  $N$  thì  $HE \perp (SCM)$ , suy ra  $d(H, (SCM)) = HE$ . Ta có:  $HN = \frac{BM}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$ , tam giác  $SHN$  vuông tại  $H$ , đường cao  $HE$  nên  $HE = \frac{SH \cdot HN}{SN} = \frac{a\sqrt{15}}{10}$ . Vậy  $d(AB, SC) = \frac{a\sqrt{15}}{5}$ .

**Câu 34.** Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD \cdot A'B'C'D'$  có  $AB = a, AD = a\sqrt{2}, AA' = a\sqrt{3}$ . Tính theo  $a$  khoảng cách:

- Từ điểm  $A$  đến mặt phẳng  $(BDD'B')$ .
- Giữa hai đường thẳng  $BD$  và  $CD'$ .

**Lời giải**



- Kẻ  $AH$  vuông góc với  $BD$  tại  $H$ .

Khi đó  $AH \perp (BB'D'D)$ , suy ra  $d(A, (BB'D'D)) = AH = \frac{AB \cdot AD}{BD} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ .

- Ta có:  $CD' \parallel (A'BD)$  nên  $d(CD', BD) = d(CD', (A'BD)) = d(C, (A'BD))$ .

Vì  $AC$  cắt  $BD$  tại trung điểm của  $AC$  nên  $d(C, (A'BD)) = d(A, (A'BD))$ .

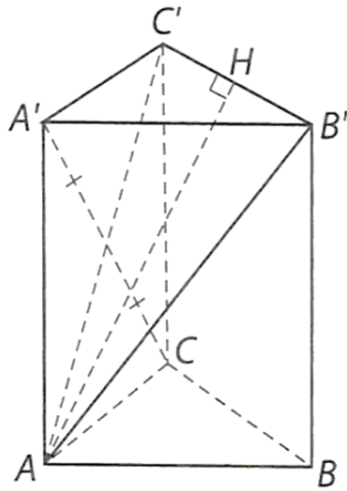
Kẻ  $AK$  vuông góc với  $A'H$  tại  $K$ . Khi đó  $AK \perp (A'BD)$ , suy ra

$$d(A, (A'BD)) = AK = \frac{AH \cdot AA'}{AH} = \frac{a\sqrt{66}}{11}. \quad \text{Vậy} \quad d(CD', BD) = \frac{a\sqrt{66}}{11}.$$

**Câu 35.** Cho hình lăng trụ đứng  $ABC \cdot A'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông tại  $A$  và  $AB = AC = AA' = a$ . Tính theo  $a$  khoảng cách:

- Từ điểm  $A$  đến đường thẳng  $B'C'$ .
- Giữa hai đường thẳng  $BC$  và  $AB'$ .

**Lời giải**



a) Kẻ  $AH$  vuông góc với  $BC'$  tại  $H$  thì  $d(A, B'C') = AH$ .

Ta có:  $AB' = AC' = B'C' = a\sqrt{2}$  nên  $AH = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ . Vậy  $d(A, B'C') = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ .

b) Vì  $BC \parallel (A'B'C')$  nên  $d(BC, AB') = d(BC, (A'B'C')) = d(C, (A'B'C'))$ . Mà  $CA'$  cắt  $AC'$  tại trung điểm của  $CA'$  nên  $d(C, (A'B'C')) = d(A', (A'B'C'))$ .

Đặt  $d(A', (A'B'C')) = h$  thì  $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{A'A^2} + \frac{1}{A'B'^2} + \frac{1}{A'C'^2} = \frac{3}{a^2}$ , suy ra  $h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ . Vậy  $d(BC, AB') = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ .

**Câu 36.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $SA \perp (ABC)$ ,  $AB \perp BC$ ,  $SA = AB = 3a$ ,  $BC = 4a$ . Tính khoảng cách:

a) Từ điểm  $C$  đến mặt phẳng  $(SAB)$ ;

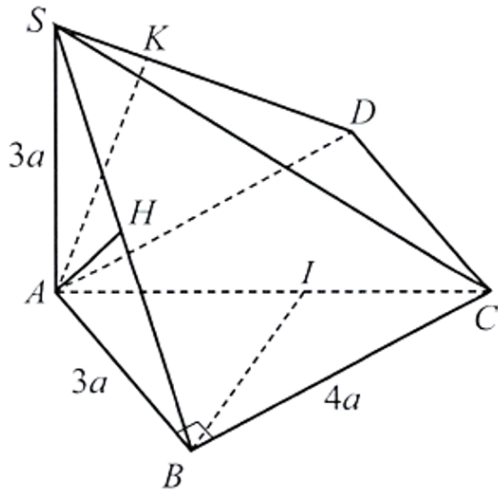
b) Giữa hai đường thẳng  $SA$  và  $BC$ ;

c) Từ điểm  $A$  đến mặt phẳng  $(SBC)$ ;

d) Từ điểm  $B$  đến mặt phẳng  $(SAC)$ ;

e\*) Giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $SC$ .

**Lời giải**



a)  $d(C, (SAB)) = BC = 4a$ .

b)  $d(SA, BC) = AB = 3a$ .

c) Gọi  $H$  là hình chiếu của  $A$  trên  $SB$ . Khi đó,  $AH \perp (SBC)$ . Suy ra  $d(A, (SBC)) = AH = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$ .

d) Gọi  $I$  là hình chiếu của  $B$  trên  $AC$ . Khi đó,  $BI \perp (SAC)$ . Suy ra

$$d(B, (SAC)) = BI = \frac{AB \cdot BC}{AC} = \frac{3a \cdot 4a}{5a} = 2,4a.$$

e\*) Lấy điểm  $D$  sao cho  $ABCD$  là hình bình hành, gọi  $K$  là hình chiếu của  $A$  trên  $SD$ . Ta có  $ABCD$  là hình chữ nhật do  $AB \perp BC$ . Suy ra  $CD \perp (SAD)$  nên  $CD \perp AK$ . Do đó,  $AK \perp (SDC)$ .

Vì  $AB \parallel (SCD)$  nên  $d(AB, SC) = d(AB, (SCD)) = d(A, (SCD)) = AK$ .

Xét tam giác  $SAD$  vuông tại  $A$  có:

$$AK = \frac{SA \cdot AD}{SD} = \frac{3a \cdot 4a}{\sqrt{(3a)^2 + (4a)^2}} = 2,4a$$

Vậy  $d(AB, SC) = 2,4a$ .

**Câu 37.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có  $ABCD$  là hình chữ nhật,  $AB = 2a, AD = 3a$ , tam giác  $SAB$  vuông cân tại  $S$  và nằm trong mặt phẳng vuông góc với  $(ABCD)$ . Tính khoảng cách:

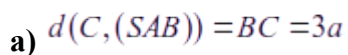
a) Từ điểm  $C$  đến mặt phẳng  $(SAB)$ ;

b) Giữa hai đường thẳng  $SB$  và  $CD$ ;

c) Giữa hai đường thẳng  $BC$  và  $SA$ ;

d) Từ điểm  $S$  đến mặt phẳng  $(ABCD)$ .

**Lời giải**


$$d(SB, CD) = d(CD, (SAB)) = BC = 3a. \text{ c) Vì } BC \parallel (SAD) \text{ nên } d(BC, SA) = d(B, (SAD)).$$

Ta có:  $AB^2 = 2SB^2 \Rightarrow SB = \sqrt{\frac{AB^2}{2}} = \sqrt{\frac{(2a)^2}{2}} = a\sqrt{2}.$

**d)** Gọi  $H$  là trung điểm  $AB$ . Vì tam giác  $SAB$  cân nên  $SH \perp AB$ .

Mà  $(SAB) \perp (ABCD)$  nên  $SH \perp (ABCD)$ . Vậy  $d(S, (ABCD)) = SH = \frac{AB}{2} = a$ .

**a) Từ điểm  $A$  đến mặt phẳng  $(SBD)$ ;**

**b)** Giữa hai đường thẳng  $SO$  và  $CD$ ;

c) Từ điểm  $O$  đến mặt phẳng ( $SCD$ );

d\*) Giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $SD$ .

### Lời giải



$$\text{a)} \quad d(A, (SBD)) = AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

**b)** Gọi  $M$  là hình chiếu của  $O$  trên  $CD$ . Khi đó,

$$d(SO, CD) = OM = \frac{a}{2}$$

**c)** Gọi  $H$  là hình chiếu của  $O$  trên  $SM$ . Khi đó,  $OH \perp (SCD)$  nên  $d(O, (SCD)) = OH$ . Ta có:

$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{14}}{2}$$

$$\text{và } OH = \frac{SO \cdot OM}{SM} = \frac{\frac{a\sqrt{14}}{2} \cdot \frac{a}{2}}{\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{14}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}} = \frac{a\sqrt{210}}{30}.$$

**d\*)** Vì  $AB \parallel (SCD)$  nên  $d(AB, SD) = d(AB, (SCD)) = d(A, (SCD))$ . Gọi  $K$  là hình chiếu của  $A$  trên  $(SCD)$ . Vì  $H$  là hình chiếu của  $O$  trên  $(SCD)$  mà  $C, O, A$  thẳng hàng nên  $C, H, K$

thẳng hàng. Ngoài ra, ta có  $OH \parallel AK$ . Do đó,  $\frac{OH}{AK} = \frac{OC}{AC} = \frac{1}{2}$ .

$$\text{Suy ra} \quad d(AB, SD) = d(A, (SCD)) = AK = 2OH = \frac{a\sqrt{210}}{15}.$$

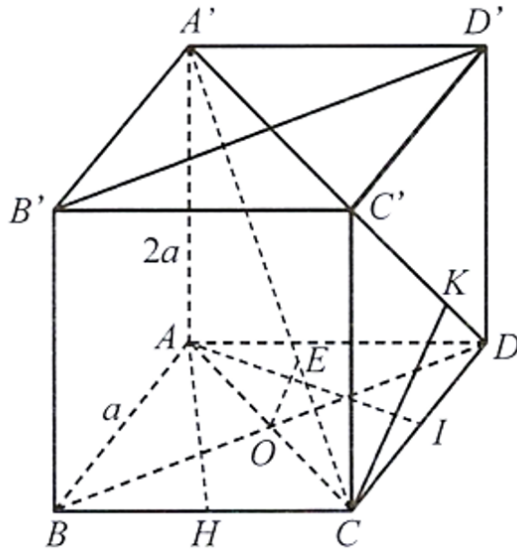
**Câu 39.** Cho hình hộp  $ABCD \cdot A'B'C'D'$  có  $ABCD$  là hình thoi cạnh  $a, AA' \perp (ABCD)$ ,  $AA' = 2a, AC = a$ . Tính khoảng cách:

**a)** Từ điểm  $A$  đến mặt phẳng  $(BCC'B')$ ;

**b)** Giữa hai mặt phẳng  $(ABB'A')$  và  $(CDD'C')$ ;

**c\*)** Giữa hai đường thẳng  $BD$  và  $A'C$ .

**Lời giải**



a) Gọi  $H$  là hình chiếu của  $A$  trên  $BC$ . Khi đó,  $AH \perp (BCC'B')$ . Vì tam giác  $ABC$  đều cạnh  $a$  nên  $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

Vậy  $d(A, (BCC'B')) = AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

b) Vì  $ABCD.A'B'C'D'$  là hình hộp nên  $(ABB'A') \parallel (CDD'C')$ .

Gọi  $I$  là hình chiếu của  $A$  trên  $CD$ . Vì tam giác  $ACD$  đều cạnh  $a$  nên  $AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

Khi đó,  $d((ABB'A'), (CDD'C')) = AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

c\*) Gọi  $E$  là hình chiếu của  $O$  trên  $A'C$ . Vì  $BD \perp (AA'C)$  nên  $BD \perp OE$ . Suy ra  $d(BD, AA'C) = OE$ . Ta có:

$$A'C = \sqrt{AA'^2 + AC^2} = \sqrt{(2a)^2 + a^2} = a\sqrt{5}.$$

Vì  $\triangle CEO \sim \triangle CAA'$  nên

$$\frac{OE}{AA'} = \frac{OC}{A'C} \Rightarrow OE = \frac{AA' \cdot OC}{A'C} = \frac{2a \cdot \frac{a}{2}}{a\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

Vậy  $d(BD, AA'C) = OE = \frac{a\sqrt{5}}{5}$ .