

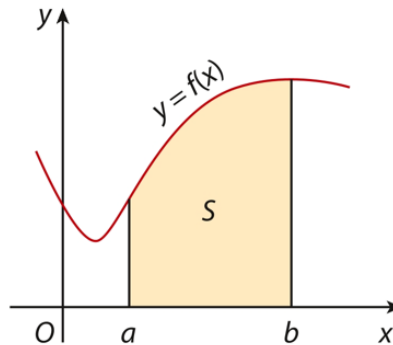
PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 1. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$

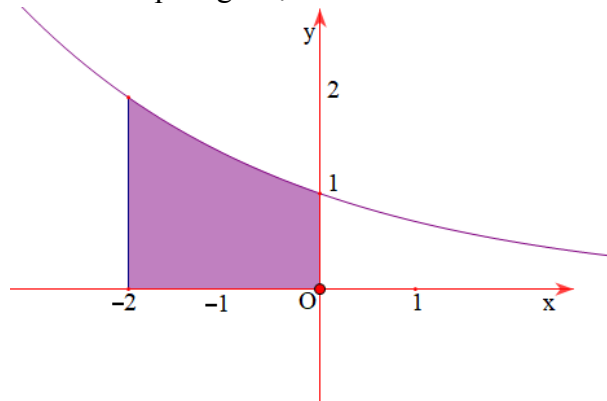
Phương pháp:

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và các đường thẳng $x = a, x = b$ được tính theo công thức

$$S = \int_a^b |f(x)| dx$$



Câu 1. Cho đồ thị hàm số $y = 2^{-\frac{x}{2}}$ và hình phẳng được tô màu như Hình.

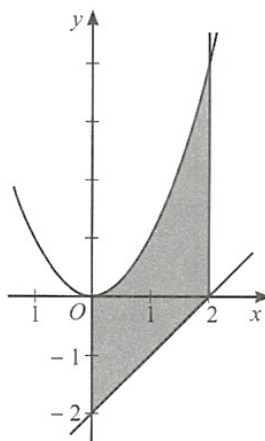


Hình phẳng đó được giới hạn bởi các đường nào?

Lời giải

Hình phẳng đã cho được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2^{-\frac{x}{2}}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -2, x = 0$.

Câu 2. Cho đồ thị hàm số $y = x^2$ và hình phẳng được tô màu như Hình.



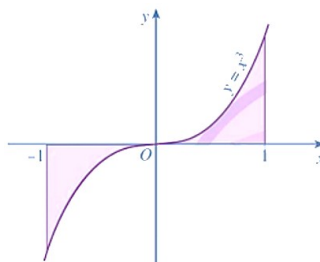
Hình phẳng đó được giới hạn bởi các đường nào?

Lời giải

Đường thẳng đi qua các điểm có tọa độ $(0; -2)$ và $(2; 0)$ có phương trình $y = x - 2$.

Hình phẳng đã cho được giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = x^2, y = x - 2$ và hai đường thẳng $x = 0, x = 2$.

Câu 3. Cho hàm số $y = x^3$ có đồ thị như Hình.



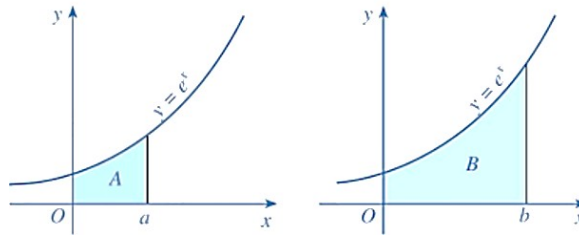
Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = x^3$, trục Ox và hai đường thẳng $x = -1, x = 1$.

Lời giải

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = x^3$, trục Ox và hai đường thẳng $x = -1, x = 1$ là:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 |x^3| dx &= \int_{-1}^0 |x^3| dx + \int_0^1 |x^3| dx \\ &= \int_{-1}^0 (-x^3) dx + \int_0^1 x^3 dx = -\frac{x^4}{4} \Big|_{-1}^0 + \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 \\ &= \left[0 - \left(-\frac{1}{4} \right) \right] + \left(\frac{1}{4} - 0 \right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Câu 4. Giả sử A, B lần lượt là diện tích các hình được tô màu ở Hình.



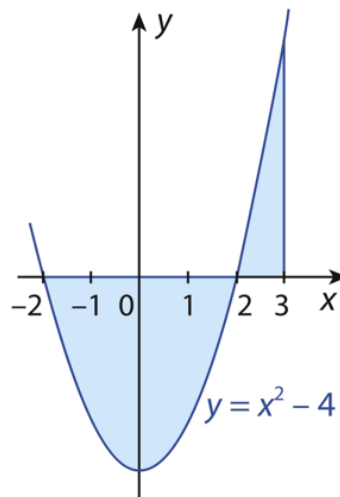
- a) Tính các diện tích A, B .
- b) Biết $B = 3A$. Biểu diễn b theo a .

Lời giải

a) $A = \int_0^a e^x dx$; $B = \int_0^b e^x dx$

b) $B = 3A \Leftrightarrow \int_0^b e^x dx = 3 \int_0^a e^x dx \Leftrightarrow e^x \Big|_0^b = 3e^x \Big|_0^a \Leftrightarrow e^b - 1 = 3e^a - 3 \Leftrightarrow b = \ln(3e^a - 2)$

Câu 5. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 4$, trục hoành và các đường thẳng $x = -2, x = 3$ (Hình).



Lời giải

Gọi S là diện tích hình phẳng cần tìm. Ta có:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^3 |x^2 - 4| dx = \int_{-2}^2 |x^2 - 4| dx + \int_2^3 |x^2 - 4| dx \\ &= \int_{-2}^2 (-x^2 + 4) dx + \int_2^3 (x^2 - 4) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 4x \right) \Big|_{-2}^2 + \left(\frac{x^3}{3} - 4x \right) \Big|_2^3 \\ &= 13 \text{ (đvdt)}. \end{aligned}$$

Câu 6. Tính diện tích S của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 3x^2 + 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 2$.

Lời giải

Diện tích S của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 3x^2 + 1$, trục hoành và hai đường

thẳng $x = 0, x = 2$ là
$$S = \int_0^2 (3x^2 + 1) dx = (x^3 + x) \Big|_0^2 = 10$$

Vậy diện tích hình phẳng cần tính là $S = 10$.

Câu 7. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi

a) Đồ thị của hàm số $y = 3x(2 - x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1, x = 1$.

b) Đồ thị của hàm số $y = \frac{4 - x}{x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 2$.

c) Đồ thị của hàm số $y = x^3 - x^2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 2$.

Lời giải

a) Diện tích cần tìm là
$$S = \int_{-1}^1 |3x(2 - x)| dx = \int_{-1}^1 |6x - 3x^2| dx$$

Ta có $3x(2 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.

Phương trình chỉ có một nghiệm thuộc đoạn $[-1; 1]$ là $x = 0$.

Do đó,
$$S = \int_{-1}^1 |(6x - 3x^2)| dx = \left| \int_{-1}^0 (6x - 3x^2) dx \right| + \left| \int_0^1 (6x - 3x^2) dx \right|$$

$$= \left| (3x^2 - x^3) \Big|_{-1}^0 \right| + \left| (3x^2 - x^3) \Big|_0^1 \right| = 4 + 2 = 6.$$

b) Ta có $y = \frac{4 - x}{x} > 0$ với mọi $x \in [1; 2]$. Do đó, diện tích cần tìm là

$$S = \int_1^2 \frac{4 - x}{x} dx = 4 \int_1^2 \frac{1}{x} dx - \int_1^2 dx = 4 \ln x \Big|_1^2 - x \Big|_1^2 = 4 \ln 2 - 1$$

c) Ta có $x^3 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 0$.

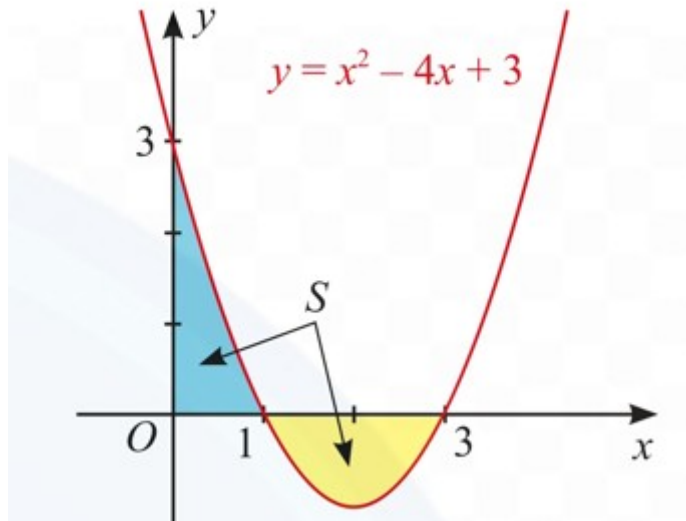
Với $x \in [0; 1]$ thì $y \leq 0$; với $x \in [1; 2]$ thì $y \geq 0$.

Do đó, diện tích cần tìm là

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 |x^3 - x^2| dx = \int_0^1 (x^2 - x^3) dx + \int_1^2 (x^3 - x^2) dx \\ &= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 + \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{12} + \frac{17}{12} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Câu 8. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = x^2 - 4x + 3$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 3$.

Lời giải



$$S = \int_0^3 |x^2 - 4x + 3| dx$$

Diện tích cần tìm là

Ta có: $x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 3$.

Với $x \in [0; 1]$ thì $f(x) \geq 0$. Với $x \in [1; 3]$ thì $f(x) \leq 0$.

$$S = \int_0^3 |x^2 - 4x + 3| dx$$

Vậy

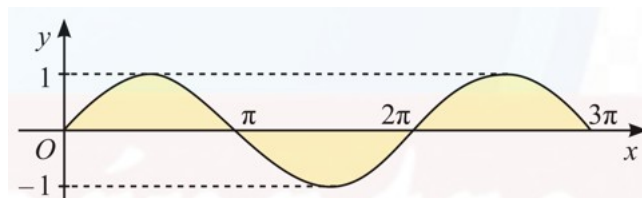
$$\begin{aligned} &= \int_0^1 (x^2 - 4x + 3) dx + \int_1^3 -(x^2 - 4x + 3) dx \\ &= \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right) \Big|_0^1 - \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right) \Big|_1^3 = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Câu 9. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = \sin x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 3\pi$.

Lời giải

$$S = \int_0^{3\pi} |\sin x| dx$$

Diện tích cần tìm là



Trên khoảng $(0; 3\pi)$, phương trình $\sin x = 0$ chỉ có hai nghiệm là $x = \pi$ và $x = 2\pi$.

$$S = \int_0^{3\pi} |\sin x| dx = \int_0^{\pi} \sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} -\sin x dx + \int_{2\pi}^{3\pi} \sin x dx$$

Vậy

$$= \left| \int_0^{\pi} \sin x \, dx \right| + \left| \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx \right| + \left| \int_{2\pi}^{3\pi} \sin x \, dx \right| = |(-\cos x)|_0^{\pi}| + |(-\cos x)|_{\pi}^{2\pi}| + |(-\cos x)|_{2\pi}^{3\pi}|$$

$$= |2| + |-2| + |2| = 6.$$

Câu 10. Tìm giá trị dương của tham số m sao cho diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = 2x + 3$ và các đường thẳng $y = 0, x = 0, x = m$ bằng 10

Lời giải

Vì $m > 0$ nên $2x + 3 > 0, \forall x \in [0; m]$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2x + 3$ và các đường thẳng $y = 0, x = 0, x = m$ là:

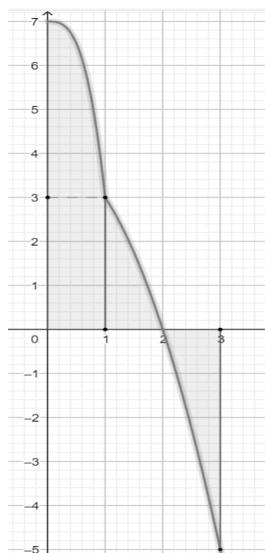
$$S = \int_0^m (2x + 3) \, dx = (x^2 + 3x) \Big|_0^m = m^2 + 3m$$

Theo giả thiết ta có:

$$S = 10 \Leftrightarrow m^2 + 3m = 10 \Leftrightarrow m^2 + 3m - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -5 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2 \text{ (do } m > 0)$$

Câu 11. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 7 - 4x^3 & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 4 - x^2 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và các đường thẳng $x = 0, x = 3, y = 0$.

Lời giải



$$S = \int_0^1 (7 - 4x^3) \, dx + \int_1^2 (4 - x^2) \, dx + \int_2^3 (x^2 - 4) \, dx$$

$$= (7x - x^4) \Big|_0^1 + \left(4x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^2 + \left(\frac{x^3}{3} - 4x \right) \Big|_2^3 = 6 + 4 - \frac{7}{3} - 3 - \frac{8}{3} + 8 = 10.$$

Câu 12. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = x^3 - 2x^2 + x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1, x = 1$.

Lời giải

$$S = \int_{-1}^1 |x^3 - 2x^2 + x| dx$$

Diện tích cần tìm là

$$\text{Ta có } x^3 - 2x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 1.$$

$$\text{Với } x \in [-1; 0] \text{ thì } f(x) \leq 0; \text{ với } x \in [0; 1] \text{ thì } f(x) \geq 0.$$

$$\text{Vậy } S = \int_{-1}^1 |x^3 - 2x^2 + x| dx = \int_{-1}^0 (-x^3 + 2x^2 - x) dx + \int_0^1 (x^3 - 2x^2 + x) dx$$

$$= \left(-\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-1}^0 + \left(\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{17}{12} + \frac{1}{12} = \frac{3}{2}.$$

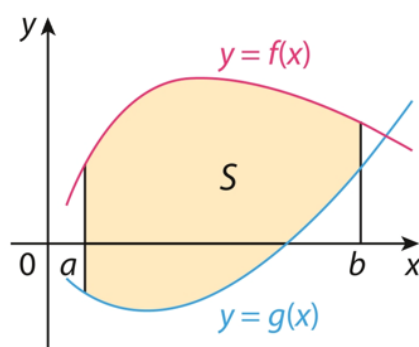
Dạng 2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y = f(x), y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a, x = b$

Phương pháp:

Cho các hàm số $y = f(x), y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = f(x), y = g(x)$ và các đường thẳng $x = a, x = b$ được tính theo công

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

thức

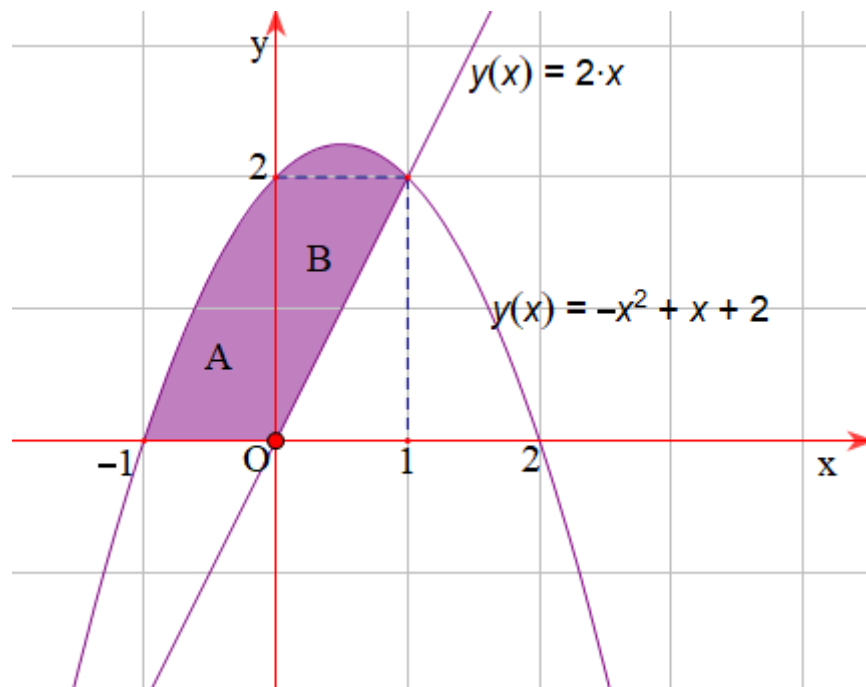


Ghi chú: Nếu hàm số $f(x) - g(x)$ không đổi dấu trên đoạn $[a; b]$ thì:

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx = \left| \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \right|$$

Trường hợp: Để không cho các đường thẳng $x = a, x = b$ thì chúng ta tìm tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = f(x), y = g(x)$

Câu 13. Tính diện tích S của hình phẳng được gạch chéo ở trong Hình.



Lời giải

Trục tung chia hình phẳng được gạch chéo thành hai phần là A và B lần lượt nằm bên trái và bên phải của trục tung.

$$S_A = \int_{-1}^0 (-x^2 + x + 2) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_{-1}^0 = \frac{7}{6}.$$

Diện tích của A là

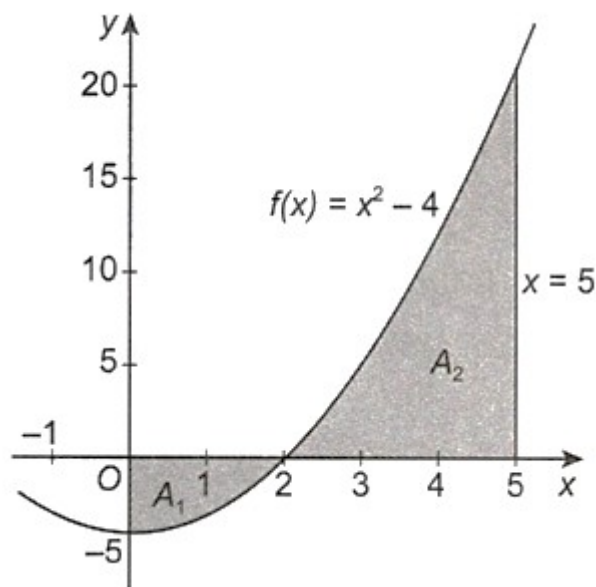
$$S_B = \int_0^1 (-x^2 + x + 2 - 2x) dx = \int_0^1 (-x^2 - x + 2) dx = \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_0^1 = \frac{7}{6}.$$

Diện tích của B là

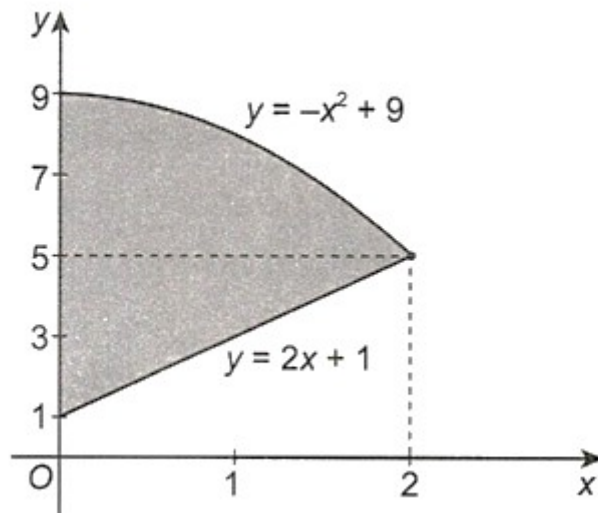
$$S = S_A + S_B = \frac{7}{6} + \frac{7}{6} = \frac{7}{3}.$$

Vậy diện tích cần tìm là

Câu 14. Tính diện tích của các hình phẳng được tô màu dưới đây:



a)



b)

Lời giải

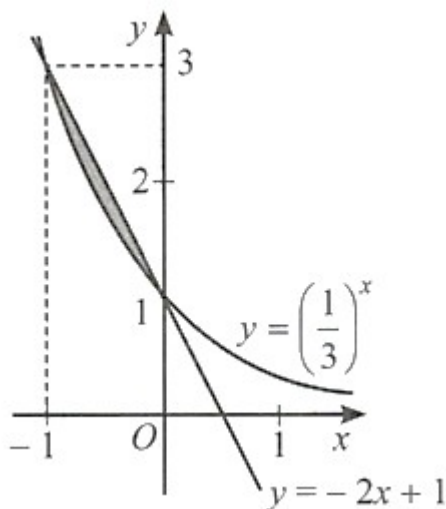
a) Diện tích cần tính là

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^5 |x^2 - 4| dx = \int_0^2 |x^2 - 4| dx + \int_2^5 |x^2 - 4| dx \\
 &= \int_0^2 (4 - x^2) dx + \int_2^5 (x^2 - 4) dx \\
 &= \left(4x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 + \left(\frac{x^3}{3} - 4x \right) \Big|_2^5 = \frac{97}{3}
 \end{aligned}$$

b) Diện tích cần tính là

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^2 |-x^2 + 9 - (2x + 1)| dx = \int_0^2 |-x^2 - 2x + 8| dx \\
 &= \int_0^2 (-x^2 - 2x + 8) dx = \left(-\frac{x^3}{3} - x^2 + 8x \right) \Big|_0^2 = \frac{28}{3}.
 \end{aligned}$$

Câu 15. Cho hình phẳng được tô màu như Hình.



a) Hình phẳng đó được giới hạn bởi các đường nào?

b) Tính diện tích hình phẳng đó.

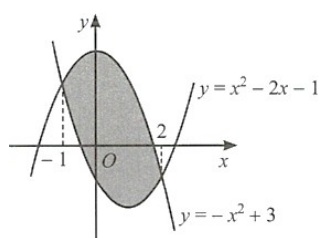
Lời giải

a) Hình phẳng đó được giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y = -2x + 1$ và hai đường thẳng $x = -1, x = 0$ và hai đường thẳng $x = -1, x = 0$.

b) Diện tích hình phẳng đó là:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^0 \left| \left(\frac{1}{3}\right)^x - (-2x + 1) \right| dx = \int_{-1}^0 \left[-2x + 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^x \right] dx = \left[-x^2 + x + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^x}{\ln 3} \right]_{-1}^0 \\ &= \frac{1}{\ln 3} - \left(-2 + \frac{3}{\ln 3} \right) = 2 - \frac{2}{\ln 3} \end{aligned}$$

Câu 16. Cho hình phẳng được tô màu như Hình.



a) Hình phẳng đó được giới hạn bởi các đường nào?

b) Tính diện tích hình phẳng đó.

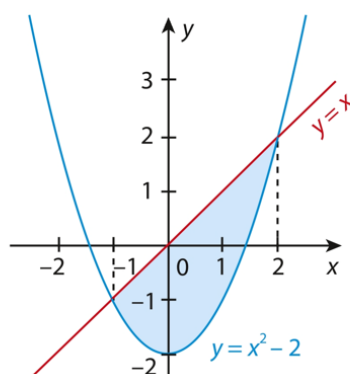
Lời giải

a) Hình phẳng đó được giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x - 1$, $y = -x^2 + 3$ và hai đường thẳng $x = -1, x = 2$.

b) Diện tích hình phẳng đó là:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 \left| (-x^2 + 3) - (x^2 - 2x - 1) \right| dx = \int_{-1}^2 \left[(-x^2 + 3) - (x^2 - 2x - 1) \right] dx \\ &= \int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x \right]_{-1}^2 = 9 \end{aligned}$$

Câu 17. Tính diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = x^2 - 2$, $y = x$ và các đường thẳng $x = -1, x = 2$ như Hình.



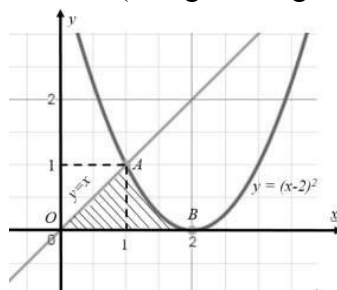
Lời giải

Ta có $x \geq x^2 - 2$ với $x \in [-1; 2]$.

Diện tích hình phẳng đã cho là:

$$S = \int_{-1}^2 |x^2 - 2 - x| dx = \int_{-1}^2 (-x^2 + x + 2) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_{-1}^2 = \frac{9}{2} \text{ (đvdt)}.$$

Câu 18. Tính diện tích phần hình phẳng gạch chéo (tam giác cong OAB) trong hình vẽ bên.



Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x = (x-2)^2 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=4 \end{cases}$$

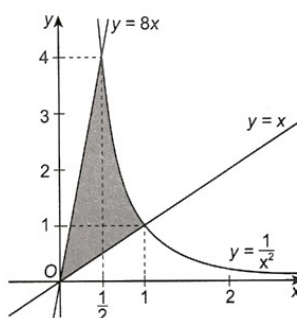
Dựa vào đồ thị, khi đó diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S = \int_0^1 x dx + \int_1^2 (x-2)^2 dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

Vậy $S = \frac{5}{6}$.

Câu 19. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x, y = 8x$ và $y = \frac{1}{x^2}$.

Lời giải



Ta chia hình phẳng đã cho thành hai hình, trong đó hình thứ nhất được giới hạn bởi các đường

$y = 8x, y = x, x = 0, x = \frac{1}{2}$ và hình thứ hai được giới hạn bởi các đường

$y = \frac{1}{x^2}, y = x, x = \frac{1}{2}, x = 1$.

Như vậy diện tích cần tính là

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^{\frac{1}{2}} |8x - x| dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left| \frac{1}{x^2} - x \right| dx = \int_0^{\frac{1}{2}} 7x dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{x^2} - x \right) dx \\
 &= \frac{7x^2}{2} \Big|_0^{\frac{1}{2}} + \left(-\frac{1}{x} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{3}{2}.
 \end{aligned}$$

Câu 20. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số

a) $y = x^2 + 2x + 1, y = 1 - 2x$ và hai đường thẳng $x = -1$ và $x = 2$.

b) $y = x - 4x^3, y = 2x$ và hai đường thẳng $x = 1, x = 4$.

Lời giải

a) Diện tích cần tìm là
$$S = \int_{-1}^2 |(x^2 + 2x + 1) - (1 - 2x)| dx = \int_{-1}^2 |x^2 + 4x| dx.$$

Ta có $x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = -4$.

Phương trình chỉ có một nghiệm $x = 0$ thuộc $[-1; 2]$.

Do đó,
$$S = \int_{-1}^0 |x^2 + 4x| dx + \int_0^2 |x^2 + 4x| dx = \left| \int_{-1}^0 (x^2 + 4x) dx \right| + \left| \int_0^2 (x^2 + 4x) dx \right|$$

$$= \left| \left(\frac{x^3}{3} + 2x^2 \right) \Big|_{-1}^0 \right| + \left| \left(\frac{x^3}{3} + 2x^2 \right) \Big|_0^2 \right| = \frac{5}{3} + \frac{32}{3} = \frac{37}{3}.$$

b) Diện tích cần tìm là
$$S = \int_1^4 |(x - 4x^3) - 2x| dx = \int_1^4 |-(4x^3 + x)| dx = \int_1^4 |4x^3 + x| dx$$

Ta có $4x^3 + x > 0$ với mọi $x \in [1; 4]$.

Do đó,
$$S = \int_1^4 (4x^3 + x) dx = \left(x^4 + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^4 = \frac{525}{2}.$$

Câu 21. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường sau:

a) $y = (x - 1)^3, y = x - 1, x = 0, x = 1$

b) $y = x^3 + 2x^2 - 3x, y = x^2 + 3x, x = -3, x = 0$.

Lời giải

a) Do $(x - 1)^3 \geq x - 1, \forall x \in [0; 1]$, nên diện tích cần tính là

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^1 |(x-1)^3 - (x-1)| dx = \int_0^1 [(x-1)^3 - (x-1)] dx \\
 &= \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx = \left(\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

b) Ta có:

$$x^3 + 2x^2 - 3x - x^2 - 3x = x^3 + x^2 - 6x = x(x-2)(x+3) \geq 0, \forall x \in [-3; 0]$$

Vậy diện tích cần tính là

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-3}^0 |x^3 + 2x^2 - 3x - x^2 - 3x| dx = \int_{-3}^0 |x^3 + x^2 - 6x| dx \\
 &= \int_{-3}^0 (x^3 + x^2 - 6x) dx = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 3x^2 \right) \Big|_{-3}^0 = \frac{63}{4}.
 \end{aligned}$$

Câu 22. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường sau:

a) $y = e^x, y = \sqrt{x}, x = 0, x = 1$.

b) $y = \cos x, y = \frac{1}{2}, x = 0, x = \frac{\pi}{3}$.

Lời giải

a) Vì $e^x \geq 1 \geq \sqrt{x}, \forall x \in [0; 1]$, nên diện tích cần tính là

$$S = \int_0^1 |e^x - \sqrt{x}| dx = \int_0^1 (e^x - \sqrt{x}) dx = \left(e^x - \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_0^1 = e - \frac{5}{3}.$$

b) Vì $\cos x \geq \frac{1}{2}, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{3} \right]$, nên diện tích cần tính là

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left| \cos x - \frac{1}{2} \right| dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\cos x - \frac{1}{2} \right) dx = \left(\sin x - \frac{1}{2} x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}.$$

Câu 23. Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = x^3 + 2x + 1, y = x^3 + x + 3$ và hai đường thẳng $x = 1, x = 3$.

Lời giải

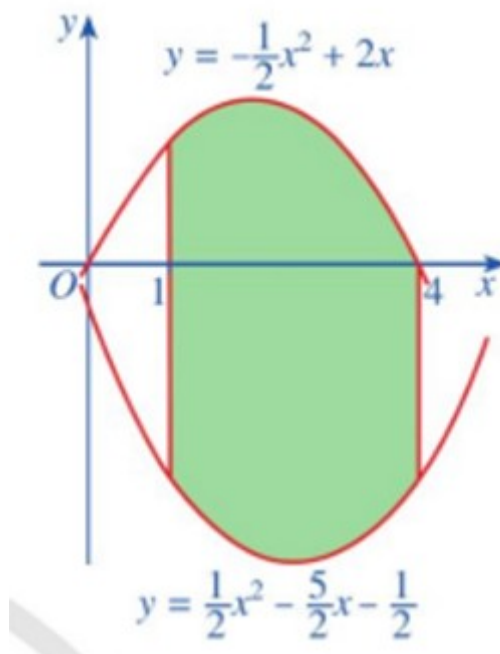
Diện tích hình phẳng đã cho là:

$$\begin{aligned}
 S &= \int_1^3 |(x^3 + 2x + 1) - (x^3 + x + 3)| dx = \int_1^3 |x - 2| dx = \int_1^2 |x - 2| dx + \int_2^3 |x - 2| dx \\
 &= \int_1^2 (2 - x) dx + \int_2^3 (x - 2) dx = \left(2x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^2 + \left(\frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_2^3 = 1.
 \end{aligned}$$

Câu 24. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$, $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}$ và hai đường thẳng $x=1, x=4$.

Lời giải

Ta có: $-\frac{1}{2}x^2 + 2x > \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}$ với mọi $x \in [1; 4]$



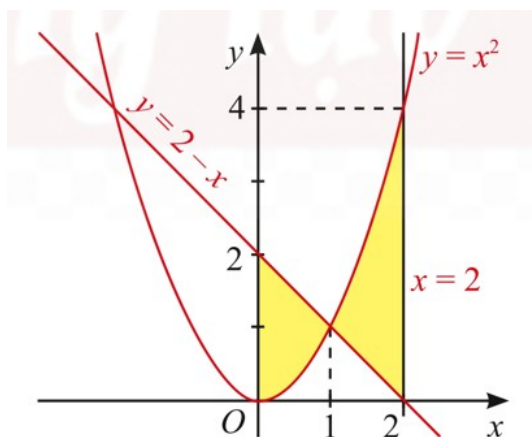
Vậy diện tích hình phẳng đó là:

$$S = \int_1^4 \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2x - \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{1}{2} \right) \right) dx = \int_1^4 \left(-x^2 + \frac{9}{2}x + \frac{1}{2} \right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{9x^2}{4} + \frac{x}{2} \right]_1^4 = -21 + \frac{135}{4} + \frac{3}{2} = \frac{57}{4}.$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}$$

Câu 25. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y = x^2$, $y = 2 - x$ và hai đường thẳng $x=0, x=2$.

Lời giải



Diện tích cần tìm là

$$S = \int_0^2 |x^2 - (2 - x)| dx = \int_0^2 |x^2 + x - 2| dx.$$

Ta có $x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -2$.

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 |x^2 + x - 2| dx + \int_1^2 |x^2 + x - 2| dx \\ \text{Vậy} \quad &= \left| \int_0^1 (x^2 + x - 2) dx \right| + \left| \int_1^2 (x^2 + x - 2) dx \right| \\ &= \left| \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x \right) \right|_0^1 + \left| \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x \right) \right|_1^2 = \left| -\frac{7}{6} \right| + \left| \frac{11}{6} \right| = 3 \end{aligned}$$

Câu 26. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y = x^3 - 3x$, $y = x$ và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 3$.

Lời giải

$$S = \int_{-1}^3 |x^3 - 3x - x| dx = \int_{-1}^3 |x^3 - 4x| dx$$

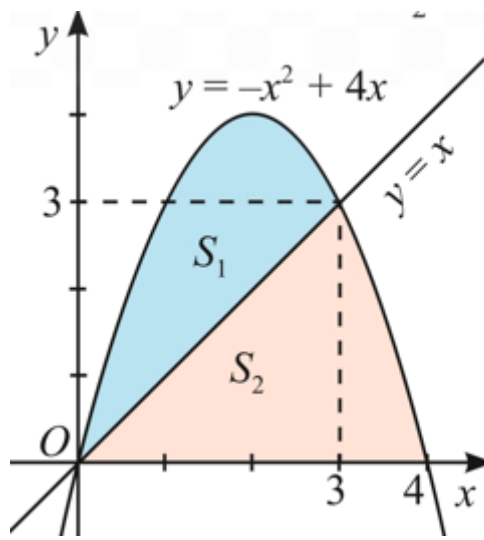
Diện tích cần tìm là

Ta có $x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = -2$ hoặc $x = 2$.

Phương trình chỉ có hai nghiệm thuộc đoạn $[-1; 3]$ là $x = 0$ và $x = 2$.

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^0 |x^3 - 4x| dx + \int_0^2 |x^3 - 4x| dx + \int_2^3 |x^3 - 4x| dx \\ \text{Vậy} \quad &= \left| \int_{-1}^0 (x^3 - 4x) dx \right| + \left| \int_0^2 (x^3 - 4x) dx \right| + \left| \int_2^3 (x^3 - 4x) dx \right| \\ &= \left| \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right) \right|_{-1}^0 + \left| \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right) \right|_0^2 + \left| \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right) \right|_2^3 \\ &= \left| \frac{7}{4} \right| + \left| -4 \right| + \left| \frac{25}{4} \right| = 12 \end{aligned}$$

Câu 27. Cho S_1, S_2 là diện tích các hình phẳng được mô tả trong Hình. Tính $\frac{S_1}{S_2}$.



Lời giải

Diện tích $S_1 + S_2$ chính là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2 + 4x$, trục hoành và các đường thẳng $x=0, x=4$. Do đó

$$S_1 + S_2 = \int_0^4 (-x^2 + 4x) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2 \right) \Big|_0^4 = \frac{32}{3}$$

Hình phẳng S_1 được giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = -x^2 + 4x, y = x$ và các đường thẳng $x=0, x=3$. Do đó

$$S_1 = \int_0^3 [(-x^2 + 4x) - x] dx = \int_0^3 (-x^2 + 3x) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \right) \Big|_0^3 = \frac{9}{2}$$

$$\text{Suy ra } S_2 = \frac{32}{3} - \frac{9}{2} = \frac{37}{6} \quad \text{và} \quad \frac{S_1}{S_2} = \frac{9}{2} : \frac{37}{6} = \frac{27}{37}$$

Câu 28. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = x^2 + 2x, y = 2x - 1$ và các đường thẳng $x = -1, x = 2$.

Lời giải

Diện tích hình phẳng đã cho là:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 |(x^2 + 2x) - (2x - 1)| dx = \int_{-1}^2 |x^2 + 2x - 2x + 1| dx \\ &= \int_{-1}^2 |x^2 + 1| dx = \int_{-1}^2 (x^2 + 1) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_{-1}^2 = 6 \end{aligned}$$

Câu 29. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = 4x - x^2$ và đường thẳng $y = 2x$

Lời giải

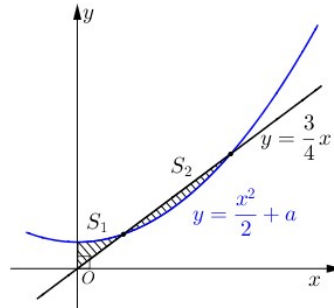
$$4x - x^2 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$S = \int_0^2 |x^2 - 2x| dx = \int_0^2 (2x - x^2) dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \frac{4}{3}$$

Khi đó diện tích hình phẳng cần tìm là

Câu 30. (Mã 102 - 2019) Cho đường thẳng $y = \frac{3}{4}x$ và parabol $y = \frac{1}{2}x^2 + a$, (a là tham số thực dương). Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1 = S_2$ tìm a ?



Lời giải

Ta có phương trình hoành độ giao điểm $\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + a = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 4a = 0$.

Theo đề bài phương trình có hai nghiệm $0 < x_1 < x_2$ thỏa mãn
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{3}{2} & (*) \\ x_1 x_2 = 2a & (**) \end{cases}$$

$$S_1 - S_2 = 0 \Leftrightarrow \int_0^{x_1} \left| \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + a \right| dx + \int_{x_1}^{x_2} \left| \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + a \right| dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^{x_2} \left| \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + a \right| dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + ax \right| \Big|_0^{x_2} = 0 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{6}x_2^3 - \frac{3}{8}x_2^2 + ax_2 \right| = 0 \Rightarrow a = -\frac{x_2^2}{6} + \frac{3x_2}{8} \quad (***)$$

Từ $(*) \Rightarrow x_1 = \frac{3}{2} - x_2$, thay vào $(**) \Rightarrow \left(\frac{3}{2} - x_2 \right) x_2 = -\frac{x_2^2}{3} + \frac{3x_2}{4} \Leftrightarrow \frac{2x_2^2}{3} - \frac{3x_2}{4} = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{9}{8}$
 $\text{---} (***) \Rightarrow a = \frac{27}{128}$

Câu 31. (Mã 101-2022) Biết $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và

$$\int_0^3 f(x) dx = F(3) - G(0) + a \quad (a > 0)$$

. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = F(x), y = G(x), x = 0$ và $x = 3$. Khi $S = 15$ thì a bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có:

$F(x), G(x)$ là nguyên hàm của $f(x) \Rightarrow F(x) = G(x) + C$

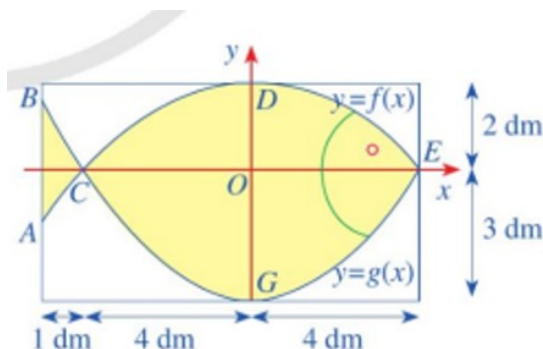
$$\Rightarrow S = \int_0^3 |F(x) - G(x)| dx = \int_0^3 |C| dx = \left| \int_0^3 C dx \right| = |3C| = 15 \Rightarrow |C| = 5 \Rightarrow C = \pm 5$$

$$\int_0^3 f(x) dx = F(3) - F(0) = F(3) - (G(0) + C) = F(3) - G(0) - C = F(3) - G(0) + a$$

$$\Rightarrow a = -C = 5 \text{ (do } a > 0 \text{)}$$

Dạng 3. Giải quyết một số bài toán thực tế liên quan

Câu 32. Trên cửa sổ có dạng hình chữ nhật, họa sĩ thiết kế logo hình con cá cho một doanh nghiệp kinh doanh hải sản. Logo là hình phẳng giới hạn bởi hai parabol với các kích thước được cho trong Hình (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là decimét).



a) Lập phương trình các parabol $y = f(x)$ và $y = g(x)$.

b) Tính diện tích của logo.

c) Logo chỉ cho phép 50% lượng ánh sáng đi qua. Lượng ánh sáng đi qua toàn bộ cửa sổ sau khi làm logo sẽ giảm bao nhiêu phần trăm (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Lời giải

a) - Giả sử parabol $y = f(x)$ cho bởi $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$. Do parabol $y = f(x)$ đi qua điểm $D(0; 2)$ nên $c = 2$, suy ra $f(x) = ax^2 + bx + 2 (a \neq 0)$. Vì parabol $y = f(x)$ đi qua các điểm $C(-4; 0), E(4; 0)$ nên ta có:

$$\begin{cases} 16a - 4b + 2 = 0 \\ 16a + 4b + 2 = 0 \end{cases}$$

Hệ phương trình trên có nghiệm là $a = -\frac{1}{8}, b = 0$.

Vậy $f(x) = -\frac{1}{8}x^2 + 2$.

- Giả sử parabol $y = g(x)$ cho bởi $g(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1 (a_1 \neq 0)$. Do parabol $y = g(x)$ đi qua điểm $G(0; -3)$ nên $c_1 = -3$, suy ra $g(x) = a_1x^2 + b_1x - 3 (a_1 \neq 0)$. Vì parabol $y = g(x)$ đi qua các điểm $C(-4; 0), E(4; 0)$ nên ta có:

$$\begin{cases} 16a_1 - 4b_1 - 3 = 0 \\ 16a_1 + 4b_1 - 3 = 0 \end{cases}$$

Hệ phương trình trên có nghiệm là $a_1 = \frac{3}{16}, b_1 = 0$.

Vậy $g(x) = \frac{3}{16}x^2 - 3$.

b) Diện tích của logo là: $S = S_1 + S_2$, trong đó S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các parabol $f(x) = -\frac{1}{8}x^2 + 2, g(x) = \frac{3}{16}x^2 - 3$ và hai đường thẳng $x = -5, x = -4$; S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các parabol $f(x) = -\frac{1}{8}x^2 + 2, g(x) = \frac{3}{16}x^2 - 3$ và hai đường thẳng $x = -4, x = 4$.

Do đó, ta có:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-5}^{-4} |f(x) - g(x)| dx + \int_{-4}^4 |f(x) - g(x)| dx \\ S &= \int_{-5}^{-4} [g(x) - f(x)] dx + \int_{-4}^4 [f(x) - g(x)] dx \\ &= \int_{-5}^{-4} \left(\frac{5}{16}x^2 - 5 \right) dx + \int_{-4}^4 \left(-\frac{5}{16}x^2 + 5 \right) dx = \frac{5}{48}x^3 \Big|_{-5}^{-4} - 5x \Big|_{-5}^{-4} - \frac{5}{48}x^3 \Big|_{-4}^4 + 5x \Big|_{-4}^4 \\ &= \frac{305}{48} - 5 - \frac{640}{48} + 40 = \frac{1345}{48}. \\ \Rightarrow S &= \frac{1345}{48} (\text{dm}^2). \end{aligned}$$

c) Gọi t là lượng ánh sáng đi qua mỗi dm^2 của logo. Suy ra lượng ánh sáng đi qua logo là $\frac{1345}{48}t$. Mặt khác, diện tích của cửa sổ là $(8+1)(2+3) = 45 (\text{dm}^2)$ và lượng ánh sáng đi qua mỗi dm^2 của phần cửa sổ nằm ngoài logo là $2t$. Suy ra, lượng ánh sáng đi qua cửa sổ trước khi làm logo là $45 \cdot 2t = 90t$ và lượng ánh sáng đi qua phần cửa sổ nằm ngoài logo là:

$$\left(45 - \frac{1345}{48} \right) 2t = \frac{815}{24}t.$$

Do đó, tổng lượng ánh sáng đi qua cửa sổ sau khi làm logo là:

$$\frac{1345}{48}t + \frac{815}{24}t = \frac{2975}{48}t.$$

Tỉ số phần trăm của lượng ánh sáng đi qua cửa sổ sau khi làm logo so với lượng ánh sáng đi qua cửa sổ trước khi làm logo là:

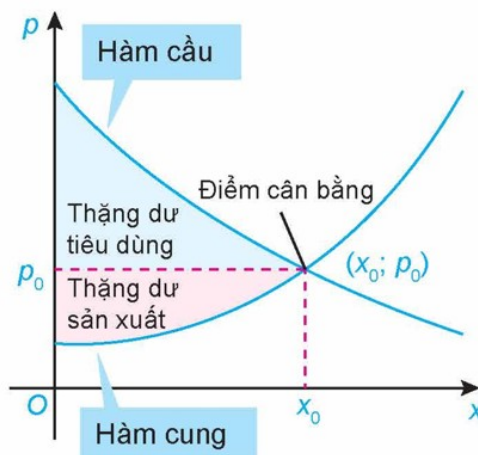
$$\left(\frac{2975}{48}t : 90t \right) \cdot 100\% = \frac{297500}{4320}\% \approx 68,9\%.$$

Vậy lượng ánh sáng khi đi qua toàn bộ cửa sổ sau khi làm logo sẽ giảm đi xấp xỉ là:

$$100\% - 68,9\% = 31,1\%.$$

Câu 33. Ta biết rằng hàm cầu liên quan đến giá p của một sản phẩm với nhu cầu của người tiêu dùng, hàm cung liên quan đến giá p của sản phẩm với mức độ sẵn sàng cung cấp sản phẩm của nhà sản xuất. Điểm cắt nhau $(x_0; p_0)$ của đồ thị hàm cầu $p = D(x)$ và đồ thị hàm cung $p = S(x)$ được gọi là điểm cân bằng.

Các nhà kinh tế gọi diện tích của hình giới hạn bởi đồ thị hàm cầu, đường ngang $p = p_0$ và đường thẳng đứng $x = 0$ là thặng dư tiêu dùng. Tương tự, diện tích của hình giới hạn bởi đồ thị của hàm cung, đường nằm ngang $p = p_0$ và đường thẳng đứng $x = 0$ được gọi là thặng dư sản xuất, như trong Hình.



Giả sử hàm cung và hàm cầu của một loại sản phẩm được mô hình hoá bởi:

Hàm cầu: $p = -0,36x + 9$ và hàm cung: $p = 0,14x + 2$, trong đó x là số đơn vị sản phẩm. Tìm thặng dư tiêu dùng và thặng dư sản xuất cho sản phẩm này.

Lời giải

Toạ độ giao điểm của hai đồ thị hàm số đã cho là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} p = -0,36x + 9 \\ p = 0,14x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 14 \\ p = 3,96. \end{cases}$$

Thặng dư tiêu dùng cho sản phẩm này là

$$\int_0^{14} |-0,36x + 9 - 3,96| dx = 35,28 \quad (\text{triệu đồng})$$

Thặng dư sản xuất cho sản phẩm này là

$$\int_0^{14} |0,14x + 2 - 3,96| dx = 13,72 \quad (\text{triệu đồng})$$

Câu 34. Các nhà kinh tế sử dụng đường cong Lorenz để minh hoạ sự phân phối thu nhập trong một quốc gia. Gọi x là đại diện cho phần trăm số gia đình trong một quốc gia và y là phần trăm tổng thu nhập, mô hình $y = x$ sẽ đại diện cho một quốc gia mà các gia đình có thu nhập như nhau. Đường cong Lorenz $y = f(x)$, biểu thị phân phối thu nhập thực tế. Diện tích giữa hai mô hình này, với $0 \leq x \leq 100$,

biểu thị "sự bất bình đẳng về thu nhập" của một quốc gia. Năm 2005, đường cong Lorenz của Hoa Kỳ có thể được mô hình hoá bởi hàm số

$$y = (0,00061x^2 + 0,0218x + 1723)^2, 0 \leq x \leq 100, \text{ trong đó } x \text{ được tính từ các gia đình nghèo nhất đến giàu có nhất}$$

Tìm sự bất bình đẳng thu nhập của Hoa Kỳ vào năm 2005.

Lời giải

Sự bất bình đẳng thu nhập của Hoa Kỳ vào năm 2005 là

$$\int_0^{100} \left| (0,00061x^2 + 0,0218x + 1723)^2 - x \right| dx \approx 297945768,2.$$

Câu 35. Người ta dự định lắp kính cho cửa của một mái vòm có dạng hình parabol. Hãy tính diện tích mặt kính cần lắp vào, biết rằng vòm cửa cao $21m$ và rộng $70m$ (Hình).



Lời giải

Chọn hệ tọa độ O_{xy} với gốc tọa độ O trùng với chân cửa bên trái

Đồ thị hàm số biểu thị cho cửa trên hệ tọa độ có dạng: $y = ax^2 + bx + c$

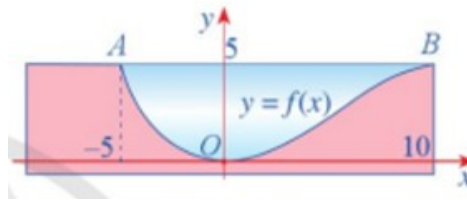
Đồ thị hàm số này đi qua điểm $(0;0)$ và có đỉnh là $(35;21)$ nên:

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = c \\ -\frac{b}{2a} = 35 \\ -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = c \\ -\frac{b}{2a} = 35 \\ -\frac{b^2}{4a} = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = c \\ b = \frac{6}{5} \\ a = -\frac{3}{175} \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{3}{175}x^2 + \frac{6}{5}x$$

Diện tích kính cần lắp là: $\int_0^{70} \left(-\frac{3}{175}x^2 + \frac{6}{5}x \right) dx = \left(-\frac{x^3}{175} + \frac{3x^2}{5} \right) \Big|_0^{70} = 980m^2$

Câu 36. Hình minh họa mặt cắt đứng của một con kênh đặt trong hệ trục tọa độ O_{xy} . Đáy của con kênh là một đường cong cho bởi phương trình

$$y = f(x) = \frac{3}{100} \left(-\frac{1}{3}x^3 + 5x^2 \right).$$



Hãy tính diện tích hình phẳng tô màu xanh trong Hình, biết đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét.

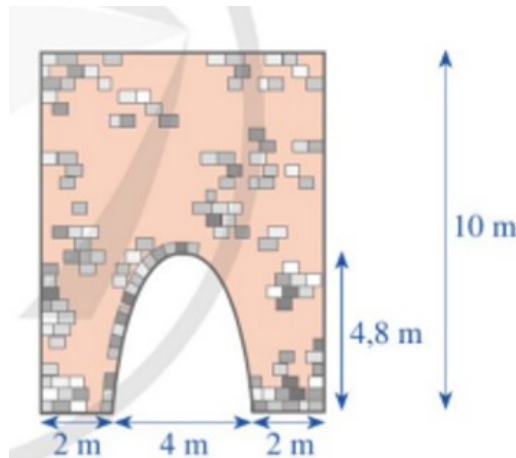
Lời giải

Hình phẳng màu xanh được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, đường thẳng $y = 5$, $x = -5$ và $x = 10$

Diện tích hình phẳng màu xanh là:

$$S = \int_{-5}^{10} \left(5 - \frac{3}{100} \left(-\frac{1}{3}x^3 + 5x^2 \right) \right) dx = \left(5x + \frac{x^4}{400} - \frac{x^3}{20} \right) \Big|_{-5}^{10} = \frac{675}{16} m^2$$

Câu 37. Hình minh họa mặt cắt đứng của một bức tường cũ có dạng hình chữ nhật với một cổng ra vào có dạng hình parabol với các kích thước được cho như trong hình đó. Người ta dự định sơn lại mặt ngoài của bức tường đó. Chi phí để sơn bức tường là 15000 đồng/ $1m^2$. Tổng chi phí để sơn lại toàn bộ mặt ngoài của bức tường đó sẽ là bao nhiêu?



Lời giải

Chọn hệ tọa độ Oxy có gốc tọa độ $O(0;0)$ tại chân bên trái của bức tường

Cổng được biểu diễn trên hệ tọa độ bằng hàm số: $y = ax^2 + b$

Đồ thị hàm số này đi qua điểm $(2;0)$ và có đỉnh là $(4;4,8)$, ta có:
$$\begin{cases} 4a + b = 0 \\ 16a + b = 4,8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,4 \\ b = -1,6 \end{cases}$$

Vậy $y = 0,4x^2 - 1,6$

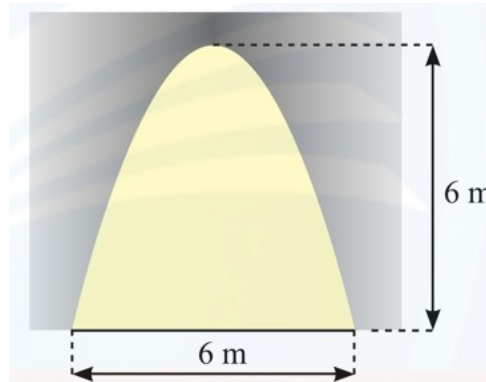
$$\text{Diện tích cánh cổng là: } \int_2^6 (0,4x^2 - 1,6) dx = \left(\frac{2}{15}x^3 - 1,6x \right) \Big|_2^6 = \frac{64}{3} m^2$$

Diện tích bức tường là: $10 \cdot 8 = 80 m^2$

$$\text{Diện tích cần sơn là: } 80 - \frac{64}{3} = \frac{176}{3} m^2$$

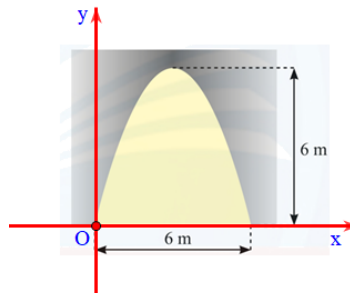
Tổng chi phí để sơn lại toàn bộ mặt ngoài của bức tường đó là: $15000 \cdot \frac{176}{3} = 880000$ (đồng)

Câu 38. Mặt cắt của một cửa hầm có dạng là hình phẳng giới hạn bởi một parabol và đường thẳng nằm ngang như Hình. Tính diện tích của cửa hầm.



Lời giải

Ta ghép mặt cắt của cửa hầm vào mặt phẳng Oxy như hình vẽ dưới đây. Diện tích của cửa hầm chính là diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 6$.



Ta nhận thấy rằng parabol đi qua các điểm có tọa độ $(0;0)$, $(6;0)$ và $(3;6)$ (trục đối xứng của parabol đi qua đỉnh), do đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 0 \\ a \cdot 6^2 + b \cdot 6 + c = 0 \\ a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 36a + 6b + c = 0 \\ 9a + 3b + c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{3} \\ b = 4 \\ c = 0 \end{cases}$$

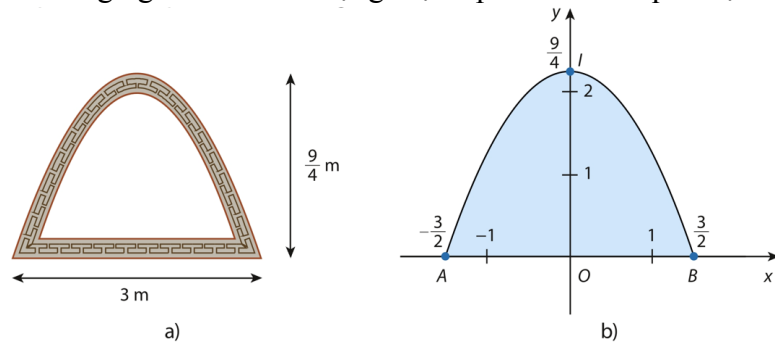
Vậy phương trình của parabol là $y = -\frac{2}{3}x^2 + 4x$.

Ta thấy rằng với $x \in [0;6]$ thì parabol nằm trên trục hoành. Do đó, diện tích của cửa hầm, cũng chính là diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = -\frac{2}{3}x^2 + 4x$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0, x = 6$ là:

$$S = \int_0^6 \left| -\frac{2}{3}x^2 + 4x \right| dx = \int_0^6 \left(-\frac{2}{3}x^2 + 4x \right) dx = \left(-\frac{2}{9}x^3 + 2x^2 \right) \Big|_0^6 = 24$$

Vậy diện tích của cửa hãm là $24m^2$.

Câu 39. Cửa vòm lấy ánh sáng của một toà nhà được thiết kế với kích thước như Hình#a. Cửa có hình dạng một parabol có đỉnh I và đi qua hai điểm A, B như Hình b. Người ta dự định lắp kính cho cửa này. Tính diện tích kính cần lắp, biết rằng người ta chỉ sử dụng một lớp kính và bỏ qua diện tích khung cửa.



Lời giải

Cửa có hình dạng một parabol (P) với phương trình $y = ax^2 + bx + c$.

Parabol (P) có đỉnh $I\left(0; \frac{9}{4}\right)$ nên $c = \frac{9}{4}$, suy ra $(P): y = ax^2 + bx + \frac{9}{4}$.

Vì parabol (P) đi qua các điểm $A\left(-\frac{3}{2}; 0\right), B\left(\frac{3}{2}; 0\right)$ nên $\begin{cases} \frac{9}{4}a - \frac{3}{2}b = -\frac{9}{4} \\ \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b = -\frac{9}{4} \end{cases}$, suy ra $\begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$.

Do đó $(P): y = -x^2 + \frac{9}{4}$.

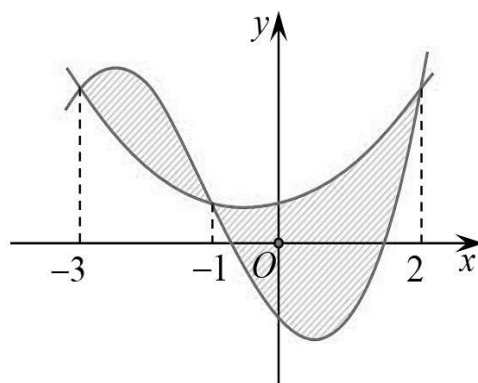
Gọi $S(m^2)$ là diện tích kính cần lắp. Ta có S bằng diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi parabol, trục hoành và các đường thẳng $x = -\frac{3}{2}, x = \frac{3}{2}$.

$$S = \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(-x^2 + \frac{9}{4}\right) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{9}{4}x\right) \Big|_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} = \frac{9}{2}(m^2).$$

Vậy diện tích kính cần lắp là $\frac{9}{2}m^2$.

Dạng 4. Giải quyết một số bài toán liên quan đến hàm ẩn

Câu 40. (Mã 103 2018) Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 1$ và $g(x) = dx^2 + ex + \frac{1}{2}$ ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt $-3; -1; 2$ (tham khảo hình vẽ).



Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng bao nhiêu?

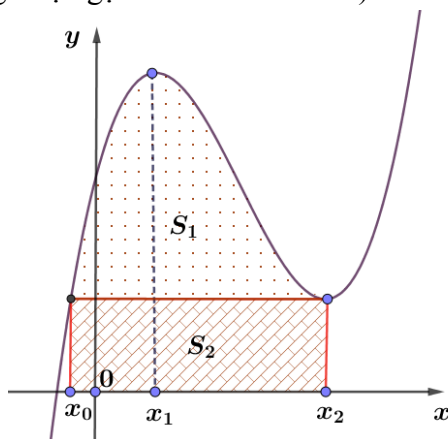
Lời giải

Vì phương trình $f(x) - g(x) = 0$ có 3 nghiệm $-3; -1; 2$ nên

$$f(x) - g(x) = a(x+3)(x-2)(x+1).$$

So sánh hệ số tự do ta được $-6a = -\frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{4}$. Do đó $S = \int_{-3}^2 \left| \frac{1}{4}(x+3)(x+1)(x-2) \right| dx = \frac{253}{48}$

Câu 41. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong ở hình bên dưới. Gọi x_1, x_2 lần lượt là hai điểm cực trị thỏa mãn $x_2 = x_1 + 2$ và $f(x_1) - 3f(x_2) = 0$. Đường thẳng song song với trục Ox và qua điểm cực tiểu cắt đồ thị hàm số tại điểm thứ hai có hoành độ x_0 và $x_1 = x_0 + 1$. Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ (S_1 và S_2 lần lượt là diện tích hai hình phẳng được gạch ở hình bên dưới).



Lời giải

+) Gọi $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, với $a > 0 \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

+) Theo giả thiết ta có

$$f'(x_1) = f'(x_2) = 0 \Rightarrow f'(x) = 3a(x - x_1)(x - x_2) = 3a(x - x_1)(x - x_1 - 2)$$

$$\Rightarrow f'(x) = 3a(x - x_1)^2 - 6a(x - x_1)$$

$$\Rightarrow f(x) = \int f'(x) dx = a(x - x_1)^3 - 3a(x - x_1)^2 + C$$

+) Ta có $f(x_1) - 3f(x_2) = 0 \Rightarrow f(x_1) - 3f(x_1 + 2) = 0$

$$\Leftrightarrow C - 3(8a - 12a + C) = 0 \Leftrightarrow -2C + 12a = 0 \Leftrightarrow C = 6a$$

Do đó $f(x) = a(x - x_1)^3 - 3a(x - x_1)^2 + 6a$.

+) S_2 là diện tích hình chữ nhật có cạnh bằng 3 và $f(x_2) = 8a - 12a + 6a = 2a$

+) S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = x_0 = x_1 - 1, x = x_2 = x_1 + 2$, $y = f(x_2) = 2a$ và $f(x) = a(x - x_1)^3 - 3a(x - x_1)^2 + 6a$ nên suy ra

$$S_1 = \int_{x_1-1}^{x_1+2} [f(x) - 2a] dx = \int_{x_1-1}^{x_1+2} [a(x - x_1)^3 - 3a(x - x_1)^2 + 4a] dx$$

$$= \left[\frac{a(x - x_1)^4}{4} - 3a \frac{(x - x_1)^3}{3} + 4ax \right]_{x_1-1}^{x_1+2} = \frac{27a}{4}$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{27}{8}$$

Vậy

Câu 42. (Chuyên Vinh – 2022) Cho hàm số $y = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e (b, c, d, e \in \mathbb{R})$ có các giá trị cực

trị là 1, 4 và 9. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $g(x) = \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$ với trục hoành

Lời giải

Gọi $m, n, p (m < n < p)$ lần lượt là các điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$.

Ta có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

Khi đó hàm số đạt cực tiểu m, p và đạt cực đại tại $x = n \Rightarrow f(n) = 9$.

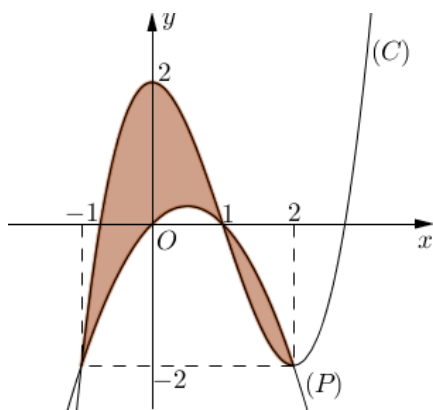
Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $g(x) = \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$ với trục hoành là

$$S = \int_m^p |g(x)| dx = \left| \int_m^n g(x) dx \right| + \left| \int_n^p g(x) dx \right| = \int_m^n g(x) dx - \int_n^p g(x) dx$$

$$= 2[\sqrt{f(x)}]_m^n - 2[\sqrt{f(x)}]_n^p$$

$$= 2[\sqrt{f(n)} - \sqrt{f(m)}] - 2[\sqrt{f(p)} - \sqrt{f(n)}] = 4\sqrt{f(n)} - 2(\sqrt{f(m)} + \sqrt{f(p)}) = 4 \cdot 3 - 2 \cdot (1 + 2) = 6.$$

Câu 43. (Sở Vĩnh Phúc 2022) Gọi (H) là phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) của hàm số đa thức bậc ba với đồ thị (P) của hàm số bậc hai (phần tô đậm) như hình vẽ bên. Tính diện tích của hình phẳng (H)



Lời giải

Dựa vào giả thiết và hình vẽ ta có:

+ (C) là đồ thị của hàm số có dạng $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 2$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$)

+ (P) là đồ thị của hàm số có dạng $g(x) = dx^2 + ex$ ($d, e \in \mathbb{R}, d \neq 0$)

Do (C) và (P) cắt nhau tại các điểm có hoành độ $x = -1; x = 1; x = 2$ nên ta có $f(x) - g(x) = a(x+1)(x-1)(x-2)$

Với $x = 0$, ta có $f(0) - g(0) = a(0+1)(0-1)(0-2) = 2 \Rightarrow a = 1$

Diện tích của hình phẳng (H) là $S = \int_{-1}^2 |f(x) - g(x)| dx = \int_{-1}^2 |(x+1)(x-1)(x-2)| dx = \frac{37}{12}$

Câu 44. (Sở Hưng Yên 2022) Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + 2x$ và $g(x) = mx^3 + nx^2 - 2x$ với $a, c, b, m, n \in \mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f(x) - g(x)$ có ba điểm cực trị là $-2; -1; 3$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$

Lời giải

+ Ta có: $f'(x) - g'(x) = 4ax^3 + 3(b-m)x^2 + 2(c-n)x + 4$. (1)

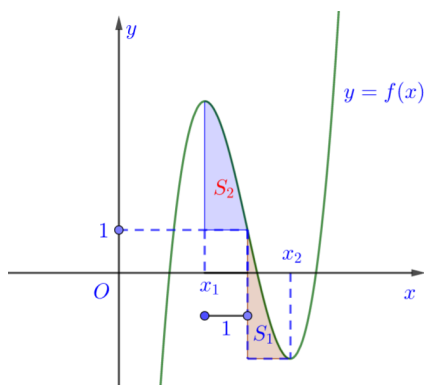
+ Mặt khác, vì hàm số $y = f(x) - g(x)$ có ba điểm cực trị là $-2; -1; 3$ nên

$$f'(x) - g'(x) = a(x+2)(x+1)(x-3) \quad (2)$$

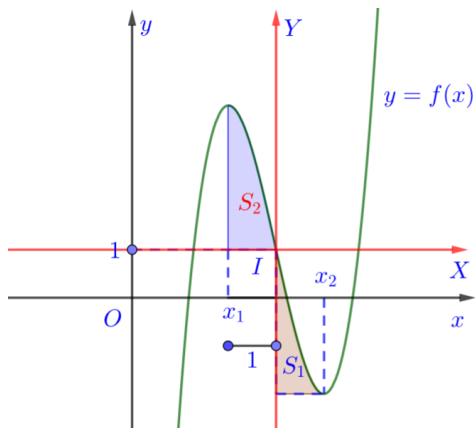
+ Từ (1), (2) suy ra: $4 = -6a \Leftrightarrow a = -\frac{2}{3}$. Do đó: $f'(x) - g'(x) = -\frac{2}{3}(x+2)(x+1)(x-3)$

Vậy diện tích hình phẳng là $S = \int_{-2}^3 |f'(x) - g'(x)| dx = \int_{-2}^3 \left| -\frac{2}{3}(x+2)(x+1)(x-3) \right| dx = \frac{131}{6}$

Câu 45. (Chuyên Thái Bình 2022) Cho hàm số bậc ba $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_2 = x_1 + 2$ và $f(x_1) + f(x_2) = 2$. Gọi S_1, S_2 là diện tích của hai hình phẳng được cho trong hình vẽ bên. Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$.



Lời giải



Từ giả thiết của bài toán, ta có I là điểm uốn của đồ thị hàm số bậc ba $f(x)$.

Gọi hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$ trong hệ trục Oxy là $A(x_1; y_1); B(x_2; y_2)$.

Tịnh tiến hệ trục Oxy sang hệ trục IXY như hình vẽ. Khi đó $A(X_1; Y_1); B(X_2; Y_2)$.

Ta có
$$\begin{cases} X_1 = -X_2 \\ X_2 = X_1 + 2 \end{cases} \Rightarrow X_2 = 1, X_1 = -1$$

Gọi hàm số có đồ thị như hình vẽ trong hệ trục IXY là $g(X)$, ta có $g(X)$ là hàm số bậc ba, là hàm số lẻ và có hai điểm cực trị là $X_2 = 1, X_1 = -1$ nên $g(X) = a(X^3 - 3X) (a > 0)$.

Ta có: (S_1) giới hạn bởi
$$\begin{cases} Y = a(X^3 - 3X) \\ Y = -2a \\ X = 0; X = 1 \end{cases}$$
, diện tích của (S_1) là

$$S_1 = \int_0^1 |a(X^3 - 3X) + 2a| dx = \int_0^1 (X^3 - 3X) + 2a dx = 2a - \frac{5}{4}a = \frac{3}{4}a$$

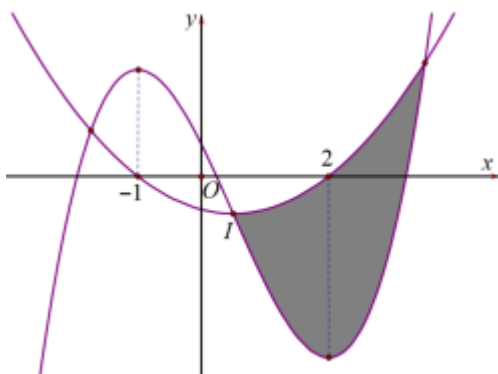
+ (S_2) giới hạn bởi
$$\begin{cases} Y = a(X^3 - 3X) \\ Y = 0 \\ X = -1; X = 0 \end{cases}$$
, diện tích của (S_2) là

$$S_2 = \int_{-1}^0 a(x^3 - 3x) dx = - \int_{-1}^0 a(x^3 - 3x) dx = \frac{5}{4}a$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{3}{4}a}{\frac{5}{4}a} = \frac{3}{5}$$

Suy ra

Câu 46. (Chuyên Lam Sơn 2022) Cho hàm số $f(x)$ với đồ thị là Parabol đỉnh I có tung độ bằng $-\frac{7}{12}$ và hàm số bậc ba $g(x)$. Đồ thị hai hàm số đó cắt nhau tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $18x_1x_2x_3 = -55$ (hình vẽ).



Tính diện tích miền tô đậm? (làm tròn kết quả đến số thập phân thứ nhất)

Lời giải

Để thấy $I\left(\frac{1}{2}, -\frac{7}{12}\right)$ và $f(x) = \frac{7}{27}(x+1)(x-2)$

Hàm số $g(x)$ đạt cực trị tại $x = -1, x = 2$ nên

$$g'(x) = a(x+1)(x-2) \Rightarrow g(x) = a\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right) + b$$

Đồ thị hàm số $g(x)$ đi qua I nên $g\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{7}{12} \Leftrightarrow -\frac{7}{12} = -\frac{13}{12}a + b$, (1).

Phương trình hoành độ giao điểm: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow a\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right) + b = \frac{7}{27}(x+1)(x-2)$

$$18x_1x_2x_3 = -55 \Leftrightarrow 18 \cdot \frac{b + \frac{14}{27}}{\frac{a}{3}} = -55 \Rightarrow 18b + \frac{28}{3} = -\frac{55a}{3}$$

Theo định lý Viet ta có:

$$a = 1, b = \frac{1}{2} \Rightarrow g(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{2}$$

Từ (1), (2) ta được

Từ đó suy ra diện tích miền tô đậm xấp xỉ 5,7.

Câu 47. (Chuyên Hùng Vương – Gia Lai 2022) Biết hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + 3x + 1 (a, b \in \mathbb{R}$ và $a \neq 0)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 4$ và $f(x_1) + f(x_2) = \frac{10}{3}$. Gọi $y = g(x)$ là hàm số bậc nhất có đồ thị đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = f(x)$ và $y = g(x)$

Lời giải

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + 3x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 3$$

Giả sử hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 ta có: $x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a} = 4 \Rightarrow b = -6a$

Mặt khác: $f(x_1) + f(x_2) = a(x_1^3 + x_2^3) + b(x_1^2 + x_2^2) + 3(x_1 + x_2) + 2 = \frac{10}{3}$

$$\Leftrightarrow a[(x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)] + b[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2] + \frac{32}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow a\left(64 - \frac{12}{a}\right) + b\left(16 - \frac{2}{a}\right) + \frac{32}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow a\left(64 - \frac{12}{a}\right) + b\left(16 - \frac{2}{a}\right) + \frac{32}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow -32a + \frac{32}{3} = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{3} \Rightarrow b = -2$$

Vậy: hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$

Tọa độ các điểm cực trị $\left(1; \frac{7}{3}\right)$ và $(3; 1)$ suy ra phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị $g(x) = -\frac{2}{3}x + 3$

Hoành độ giao điểm của đồ thị $f(x)$ và $g(x)$ là $x = 1; x = 2; x = 3$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $f(x)$ và $g(x)$ là

$$S = \int_1^2 \left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1 - \left(-\frac{2}{3}x + 3 \right) \right) dx + \int_2^3 \left(-\frac{2}{3}x + 3 - \left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1 \right) \right) dx = \frac{1}{6}$$

Câu 48. (Sở Quảng Bình 2022) Cho hàm số $y = f(x) = -4x^3 + ax^2 + bx + c$ có đồ thị cắt trục hoành tại 3 điểm có hoành độ lần lượt là $-1; 1; 3$. $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $y = g(x)$ là hàm số bậc hai đi qua ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = F(x)$ và $y = g(x)$

Lời giải

Ta có: $f(x) = -4(x^2 - 1)(x - 3) \Rightarrow F(x) = \int f(x)dx = -x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 12x + d$. Với $F(-1) = 9 + d$, $F(1) = -7 + d$, $F(3) = 9 + d$ ta suy ra ba điểm cực trị của hàm số $y = F(x)$ có tọa độ lần lượt là $(-1; 9 + d)$, $(1; -7 + d)$ và $(3; 9 + d)$. Xét hàm số bậc hai $y = mx^2 + nx + p (m, n, p \in \mathbb{R})$ đi qua ba điểm $(-1; 9)$, $(1; -7)$ và $(3; 9)$. Từ đó ta có hệ phương

$$\begin{cases} m - n + p = 9 \\ m + n + p = -7 \\ 9m + 3n + p = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ n = -8 \\ p = -3 \end{cases} \Rightarrow y = 4x^2 - 8x - 3$$

trình sau: Suy ra $g(x) = 4x^2 - 8x - 3 + d$. Ta có $F(x) - g(x) = -x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 12x - (4x^2 - 8x - 3) = -x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 4x + 3$.

Giải phương trình $F(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1; x = 1; x = 3$

Vậy diện tích giới hạn bởi hai đường $y = F(x)$ và $y = g(x)$ là

$$S = \int_{-1}^3 |F(x) - g(x)| dx = \int_{-1}^3 |-x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 4x + 3| dx = \frac{128}{15}$$

Câu 49. (Sở Cần Thơ 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) + (x+1)f'(x) = 4x^3 + 2, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng $y = f(x)$ và $y = f'(x)$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } f(x) + (x+1)f'(x) &= 4x^3 + 2 \Leftrightarrow f'(x) \cdot (x+1) + f(x) \cdot (x+1)' = 4x^3 + 2 \\ &\Leftrightarrow [f(x) \cdot (x+1)]' = 4x^3 + 2, \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Lấy nguyên hàm hai vế ta được:

$$\int [f(x) \cdot (x+1)]' dx = \int (4x^3 + 2) dx \Leftrightarrow f(x) \cdot (x+1) = x^4 + 2x + C$$

$$\text{Với } x = -1 \Rightarrow C = 1. \text{ Khi đó } f(x) = \frac{x^4 + 2x + 1}{x+1} = x^3 - x^2 + x + 1, f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$$

$$x^3 - x^2 + x + 1 = 3x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Xét phương trình hoành độ giao điểm

Diện tích hình phẳng hạn bởi các đường thẳng $y = f(x)$ và $y = f'(x)$ bằng:

$$S = \int_0^3 (x^3 - 4x^2 + 3x) dx = \frac{9}{4}$$

Câu 50. (THPT Phan Huy Chú - Hà Nội 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[-1; 2]$

$$\text{thỏa mãn } f(2) = 6, \int_{-1}^2 f(x) dx = 0 \quad \text{và} \quad \int_{-1}^2 [f'(x)]^2 dx = 36$$

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$ và $y = f'(x)$

Lời giải

$$\int_{-1}^2 f(x) dx = 0 \Leftrightarrow \int_{-1}^2 f(x) d(x+1) = 0 \Leftrightarrow (x+1)f(x) \Big|_{-1}^2 - \int_{-1}^2 (x+1)f'(x) dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^2 (x+1)f'(x) dx = 3f(2) = 18$$

Xét tích phân $\int_{-1}^2 [f'(x) - k(x+1)]^2 dx = 0$

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^2 [f'(x)]^2 dx - 2k \int_{-1}^2 f'(x) (x+1) dx + k^2 \int_{-1}^2 (x+1)^2 dx = 0$$

$$\Leftrightarrow 9k^2 - 36k + 36 = 0 \Leftrightarrow k = 2.$$

Suy ra $\int_{-1}^2 [f'(x) - 2(x+1)]^2 dx = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2(x+1) \Rightarrow f(x) = x^2 + 2x + C$

Mà $f(2) = 6 \Rightarrow C = -2$. Suy ra $f(x) = x^2 + 2x - 2$. Khi đó $f'(x) = 2x + 2$.

Xét phương trình $f(x) = f'(x) \Leftrightarrow x = \pm 2$.

$$S = \int_{-2}^2 |f(x) - f'(x)| dx = \frac{32}{3}$$

Câu 51. (Chuyên Hạ Long - Quảng Ninh 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số bậc ba thỏa mãn: $f(1) = 0$ và $2(x+3)f'(x) - f(x) = (5x^2 + 3x - 16)(x+3), \forall x \in \mathbb{R}$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục hoành.

Lời giải

Từ giả thiết $2(x+3)f'(x) - f(x) = (5x^2 + 3x - 16)(x+3) \Rightarrow f(x) = (x+3)(ax^2 + bx + c) (a \neq 0)$

$$\Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + (2b+6a)x + 3b+c$$

Vì $f(1) = 0$ nên $a + b + c = 0 (*)$

Khi đó

$$2(x+3)f'(x) - f(x) = (5x^2 + 3x - 16)(x+3), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow 2f'(x) - (ax^2 + bx + c) = 5x^2 + 3x - 16$$

$$\Leftrightarrow 2[3ax^2 + (2b+6a)x + 3b+c] - (ax^2 + bx + c) = 5x^2 + 3x - 16$$

$$\Leftrightarrow 5ax^2 + (3b+12a)x + 6b+c = 5x^2 + 3x - 16$$

Đồng nhất hệ số ta được

$$\begin{cases} 5a = 5 \\ 3b + 12a = 3 \\ 6b + c = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \text{ (t/m (*))} \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = (x+3)(x^2 - 3x + 2)$$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của $y = f(x)$ và trục hoành:

$$(x+3)(x^2 - 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Diện tích hình phẳng cần tìm là } S = \int_{-3}^2 |(x+3)(x^2 - 3x + 2)| = \frac{131}{4} .$$