Phần ĐẠI SỐ VÀ MỘT SỐ YẾU TỐ GIẢI TÍCH

Chương I MỆNH ĐỀ VÀ TẬP HỢP

Mệnh đề và tập hợp được coi là ngôn ngữ của toán học, là công cụ giúp con người diễn đạt các phát biểu toán học trở nên thống nhất, ngắn gọn, rõ ràng và chính xác.

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu về hai khái niệm mệnh đề và tập hợp, cũng như một số khái niệm cơ bản liên quan và làm quen với việc sử dụng chúng trong học tập và cuộc sống.



Sách ở thư viện được sắp xếp như thế nào để thuận tiện cho việc quản lí và tìm kiếm?

Học xong chương này, bạn có thể:

* Nhận biết và lấy được ví dụ về mệnh đề mệnh đề phủ đinh, mệnh để kéo theo, mệnh để đảo, mệnh để tương đương, mệnh đề chứa kí hiệu và ; sử dụng đúng các thuật ngữ điều kiện cần, điều kiện đủ, điều kiện cần và đủ.
* Xác định được tính đúng sai của mệnh để trong những trường hợp đơn giản
* Nhận biết được các khải niệm cơ bản về tập hợp (tập hợp, phần tử, tập con, hai tập hợp bằng nhau, tập rỗng); sử dụng đúng các kí hiệu
* Thực hiện được phép toán trên tập hợp (hợp, giao, hiệu của hai tập hợp, phần bù của tập con); minh hoạ được bằng biểu đồ Ven.
* Giải quyết được một số vấn để thực tiễn liên quan đến số phần tử của tập hợp và các phép toán trên tập hợp

Bài 1. Mệnh đề

Từ khoá: Mệnh đề; Mệnh đề phủ định; Mệnh đề kéo theo; Mệnh đề đảo; Mệnh đề tương đương; Mệnh đề chứa kí hiệu và ; Điều kiện cần; Điều kiện đủ; Điều kiện cần và đủ



1. Mệnh đề

Xét các câu sau đây:

(1) 1+ 1 =2.

(2) Dân ca Quan họ là di sản văn hoá phi vật thể đại diện của nhân loại.

(3) Dơi là một loài chim.

(4) Nấm có phải là một loài thực vật không?

(5) Hoa hồng đẹp nhất trong các loài hoa.

(6) Trời ơi, nóng quá!

Trong những câu trên,

a) Câu nào là khẳng định đúng, câu nào là khẳng định sai?

b) Câu nào không phải là khẳng định?

c) Câu nào là khắng định, nhưng không thể xác định nó đúng hay sai?

Trong khoa học cũng như trong đời sống hằng ngày, người ta thường dùng các câu nêu lên một khẳng định. Những khẳngđịnh có tính hoặc đúng hoặc sai, như các câu (1),(2), (3) ở trên được gọi là mệnh đề logic (hay mệnh để).

**Mệnh đề** là một khẳng định đúng hoặc sai.

Một khẳng định đúng gọi là **mệnh đề đúng**.

Một khẳng định sai gọi là **mệnh đề sai**.

Một mệnh đề không thể vừa đúng vừa sai.

***Chú ý***: Người ta thường sử dụng các chữ cái in hoa P, Q, R, ... để kí hiệu mệnh đề

**Ví dụ 1**

Trong các câu sau đây, câu nào là mệnh đề?

a) 3 là số lẻ; b) 1+ 2>3;

c) là số vô tỉ phải không? d) 0,0001 là số rất bé;

e) Đến năm 2050, con người sẽ đặt chân lên Sao Hoà.

**Giải**

a) “3 là số lẻ” là mệnh đề (là mệnh đề đúng).

b) “1 + 2 > 3” là mệnh đề (là mệnh đề sai).

c) “ là một số vô tỉ phải không?” là câu hỏi, không phải mệnh đề.

d) Câu “0,0001 là số rất bé” không có tính hoặc đúng hoặc sai (do không đưa ra tiêu chí thể nào là số rất bé). Do đó, nó không phải là mệnh đề.

e) “Đến năm 2050, con người sẽ đặt chân lên Sao Hỏa” là một khẳng định chưa thể chắc chắn là đúng hay sai. Tuy nhiên, nó chắc chắn chỉ có thể hoặc đúng hoặc sai. Do đó, nó là một mệnh đề.

***Chú ý***: Những mệnh đề liên quan đến toán học (như các mệnh đề ở câu a) và b) trong Ví dụ 1) còn được gọi là **mệnh đề toán học**.

1.Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề?

a) là số vô tỉ b) ;

c) 100 tỉ là số rất lớn; d) Trời hôm nay đẹp quá!

2.Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

**Hình 2. Vịnh Hạ Long**

a) Vịnh Hạ Long là di sản thiên nhiên thế giới;

b) = -5;

c) 52 + 122 = 132.

2. **Mệnh đề chứa biến**

Xét câu “n chia hết cho 5” (n là số tự nhiên).

a) Có thể khẳng định câu trên là đúng hay sai không?

b) Tìm hai giá trị của n sao cho câu trên là khẳng định đúng, hai giá trị của n sao cho câu trên là khẳng định sai.

Câu “n chia hết cho 5” là một khắng định, nhưng không là mệnh đề, vì khẳng định này có thể đúng hoặc sai, tuỳ theo giá trị của n. Tuy vậy, khi thay n bằng một số tự nhiên cụ thể thì ta nhận được một mệnh đề. Người ta gọi “n chia hết cho 5” là một **mệnh đề chứa biến** (biến n), kí hiệu P(n). Ta viết P(n): “n chia hết cho 5” (n là số tự nhiên).

Một mệnh đề chứa biến có thể chứa một biến hoặc nhiều biến.

***Ví dụ 2***

Cho các mệnh đề chứa biến:

a) P(x): “2x = 1”;

b) R(x, y): “2x + y = 3” (mệnh đề này chứa hai biến x và y);

c) T(n): “2n + 1 là số chắn” (n là số tự nhiên).

Với mỗi mệnh đề chứa biến trên, tìm những giá trị của biến để nhận được một mệnh đề đúng và một mệnh đề sai.

**Giái**

a. Với x= thì P(): “2. = 1” là mệnh đề đúng. Với x=1 thì P(1): “2 . 1 = 1” là mệnh đề sai.

b) Với x = 1, y = 1 thì *R*(1, 1): “2.1 + 1 = 3” là mệnh đề đúng. Với x = 1, y = 2 thì *R*(1, 2): “2.1 + 2 = 3” là mệnh đề sai.

c)Lấy số tự nhiên no bất kì ta đều được 2no + 1 là một số lẻ, nghĩa là T(no): “2no + 1 là số chẵn” là mệnh đề sai. Do đó, không có giá trị *no* của n để T(*no*) là mệnh đề đúng.T(*no*) là mệnh đề sai với số tự nhiên no bất kì.

Với mỗi mệnh đề chứa biến sau, tìm những giá trị của biến để nhận được một mệnh đề đúng và một mệnh đề sai.

a) P(x): “x2 = 2”.

b) Q(x): “x2 + 1> 0”;

c) R(n): “n + 2 chia hết cho 3” (n là số tự nhiên).

**3. Mệnh đề phủ định**

Xét các cặp mệnh đề nằm cùng dòng của bảng (có hai cột P và ) sau đây.

|  |  |
| --- | --- |
| P |  |
| Dơi là một loài chim | Dơi không phải là một loài chim |
| không phải là một số hữu tỉ. | là một số hữu tỉ |
| + > | + ≤ . |
| . = 6 | . ≠ 6 |

Nêu nhận xét về tính đúng sai của hai mệnh đề cùng cặp.

Với từng cặp mệnh đề P và ở3 ta thấy chúng có tính đúng sai trái ngược nhau (P đúng thì sai và ngược lại). Ta nói mệnh đề là **mệnh đề phủ định** (hoặc **phủ định**) của mệnh đề P.

***Nhận xét***: Thông thường, để phủ định một mệnh đề, người ta thường thêm (hoặc bớt) từ “không” hoặc “không phải” vào trước vị ngữ của mệnh đề đó, như hai cặp mệnh đề đầu tiên ở 3. Tuy nhiên, ta cũng thường gặp cách diễn đạt khác, như hai cặp mệnh đề sau ở 3

Mỗi mệnh đề P có mệnh đề phủ định, kí hiệu là .

Mệnh đề P và mệnh đề phủ định của nó có tính đúng sai trái ngược nhau. Nghĩa là

khi P đúng thì sai, khi P sai thì đúng.

***Ví dụ 3***

Phát biểu mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau:

P: “Tháng 12 dương lịch có 31 ngày”;

Q: “910 ≥ 109”;

R: Phương trình x2 + 1 = 0 có nghiệm”.

**Giải**

Mệnh đề phủ định của các mệnh đề trên là:

: “Không phải tháng 12 dương lịch có 31 ngày”;

: “910 < 109”;

: “Phương trình x2 + 1 = 0 vô nghiệm”.

Phát biểu mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau. Xét tính đúng sai của mỗi mệnh đề và mệnh đề phủ định của nó

a) Paris là thủ đô của nước Anh;

b) 23 là số nguyên tố;

c) 2021 chia hết cho 3;

d) Phương trình x2 - 3x + 4 = 0 vô nghiệm

**4. Mệnh đề kéo theo**

Xét hai mệnh đề sau:

(1) Nếu ABC là tam giác đều thì nó là tam giác cân;

(2) Nếu 2a – 4 > 0 thì a > 2.

a) Xét tính đúng sai của mỗi mệnh đề trên.

b) Mỗi mệnh đề trên đều có dạng “Nếu P thì Q”. Chỉ ra P và Q ứng với mỗi mệnh đề đó

Mỗi mệnh đề ở trên đều có dạng “Nếu P thì Q”. Chúng là những mệnh đề kéo theo.

Cho hai mệnh đề P và Q. Mệnh đề “Nếu P thì Q” được gọi là **mệnh đề kéo theo**, kí hiệu là P Q

Mệnh đề P Q chỉ sai khi P đúng và Q sai.

10

***Nhận xét***:

a) Mệnh đề P Q còn được phát biểu là “P kéo theo Q” hoặc “Từ P suy ra Q”.

b) Để xét tính đúng sai của mệnh đề P Q, ta chỉ cần xét trường hợp P đúng. Khi đó, nếu Q đúng thì mệnh đề đúng, nếu Q sai thi mệnh đề sai. Ta đã quen với điều này khi chứng minh nhiều định lí ở Trung học cơ sở.

**Ví dụ 4**

Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) R: “Nếu tam giác ABC có hai góc bằng 60o thì nó là tam giác đều”;

B) T: “Từ - 3 < -2 suy ra (-3)2 < (-2)2”.

**Giải**

a) R là mệnh đề có dạng P Q, với P: “Tam giác ABC có hai góc bằng 60o” và Q: “Tam giác ABC là tam giác đều”. Ta thấy khi P đúng thì Q cũng đúng. Do đó, P Q đúng hay R đúng.

b) T là mệnh đề có dạng P Q, với P: “-3 < -2” và Q: “(-3)2 < (-2)2” (hay “9 < 4”). Ta thấy mệnh đề P đúng, còn mệnh đề Q sai, Do đó, P Q sai. Vậy T là mệnh đề sai.

Trong toán học, **định lí** là mệnh đề đúng. Các định lí trong toán học thường có dạng P Q

Khi mệnh đề P Q là định lí, ta nói:

P là **giả thiết**, Q là **kết luận** của định lí;

P là **điều kiện đủ** để có Q;

Q là **điều kiện** cần đề có P.

**Ví dụ 5**

Sử dụng các thuật ngữ “điều kiện cần”, “điều kiện đủ” để phát biểu lại định lí; “Nếu tứ

giác ABCD là hình chữ nhật thì hai đường chéo bằng nhau”.

**Giải**

Ta có thể phát biểu lại định lí đã cho như sau:

“Tứ giác ABCD có hai đường chéo bằng nhau là điều kiện cần để nó là hình chữ nhật” hoặc “Tứ giác ABCD là hình chữ nhật là điều kiện đủ để hai đường chẻo bằng nhau”

11

Xét hai mệnh đề:

P: “Hai tam giác ABC và A’B’C bằng nhau”;

Q: “Hai tam giác ABC và A’B’C có diện tích bằng nhau”.

a) Phát biểu mệnh đề P Q.

b) Mệnh đề P Q có phải là một định lí không? Nếu có, sử dụng thuật ngữ “điều kiện cần”, “điều kiện đủ” để phát biểu định lí này theo hai cách khác nhau.

**5. Mệnh đề đảo. Hai mệnh đề tương đương**

Xét hai mệnh đề dạng P + O sau:

“Nếu tam giác ABC là đều thì nó có hai góc bằng 60o”;

“Nếu a2 - 4 = 0 thì a = 2”.

a) Chỉ ra P Q và xét tính đúng sai của mỗi mệnh đề trên.

b) Với mỗi mệnh đề đã cho, phát biểu mệnh đề Q P và xét tính đúng sai của nó.

Mệnh đề Q P được gọi là **mệnh đề đảo** của mệnh đề P Q

***Chú ý:*** Mệnh đề đáo của một mệnh đề đúng không nhất thiết là đúng.

Nếu cả hai mệnh đề P Q và Q P đều đúng thì ta nói P và Q là **hai mệnh đề tương đương** đương, kí hiệu là P Q (đọc là “P tương đương Q” hoặc “P khi và chỉ khi Q”).

Khi đó, ta cũng nới P là **điều kiện cần và đủ** đề có Q thay Q là điều kiện cần và đủ để có P).

**Nhận xét**: Hai mệnh đề P và Q tương đương khi chúng cùng đúng hoặc cùng sai.

**Ví dụ 6**

Xét hai mệnh đề:

P: “Tam giác ABC vuông tại A”;

Q: “Tam giác ABC có AB2 + AC2 = BC2”.

Hai mệnh đề P và Q có tương đương không? Nếu có, hãy phát biểu một định lí thể hiện điều này, trong đó có sử dụng thuật ngữ “khi và chỉ khi” hoặc “điều kiện cần và đủ”.

12

**Giải**

Theo định lí Pythagore, hai mệnh đề P => Q và Q => P đều đúng. Do đó, P và Q là hai mệnh đề tương đương. Ta có thể phát biểu thành định lí như sau:

“Tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi AB2 + AC2 = BC2” hoặc “Để tam giác ABC vuông tại A, điều kiện cần và đủ là AB2 + AC2 = BC2”.

Xét hai mệnh đề:

P: “Tứ giác ABCD là hình vuông”.

Q: “Tứ giác ABCD là hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau”.

a) Phát biểu mệnh đề P => Q và mệnh đề đảo của nó.

b) Hai mệnh đề P và Q có tương đương không? Nều có, sử dụng thuật ngữ “điều kiện cần và đủ” hoặc “khi và chỉ khi” đề phát biểu định lí P <=> Q theo hai cách khác nhau.

6. **Mệnh đề chứa kí hiệu ,**

Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

(1) Với mọi số tự nhiên x, và là số vô tỉ;

2) Bình phương của mọi số thực đều không âm;

(3) Có số nguyên cộng với chính nó bằng 0;

(4) Có số tự nhiên n sao cho 2n - 1 = 0.

Trong toán học, để ngắn ngọn, người ta dùng các kí hiệu (đọc là *với mọi*) và (đọc là *tồn tại*) để phát biểu những mệnh đề như ở trên. Chẳng hạn, có thể viết lại các mệnh đề trên lần lượt như sau:

(1) **x**  N, là số vô tí; (2) x R, x2 ≥ 0;

(3) x Z, x +x = 0; (4) n N, 2n - 1= 0.

Ta nói (1), (2) là **mệnh đề chứa kí hiệu**  ; (3), (4) là **mệnh đề chứa kí hiệu** .

Tổng quát hơn, có thể phát biểu hai loại mệnh đề này như sau:

“x M, P(x)” và “x M, P(x)”,

với M là một tập hợp, P(x) là một mệnh đề chứa biến nào đó.

Mệnh đề “x M, P(x)” đúng nếu với mọi xo M, P(xo) là mệnh đề đúng.

Mệnh đề “x M, P(x)” đúng nếu có xo M sao cho P(xo) là mệnh đề đúng.

**Ví dụ 7**

Xét tính đúng sai và viết mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau:

a) “x R, x2 + 2x + 2 > 0; b) x R, x2 + 3x + 4 = 0.

**Giải**

a) Mệnh đề đúng, vì x2 + 2x + 2 = (x2 + 2x + 1) + 1 = (x + 1)2 + 1 > 0 với mọi số thực x. Mệnh đề phủ định của mệnh đề này là: x R, x2 + 2x + 2 ≤ 0.

b) Mệnh đề sai, vì phương trình x2 + 3x + 4 = 0 vô nghiệm (= -7 < 0). Mệnh đề phủ định của mệnh đề này là: x R, x2 + 3x + 4 0.

Sử dụng kí hiệu , để viết các mệnh đề sau:

a) Mọi số thực cộng với số đối của nó đều bằng 0;

b) Có một số tự nhiên mà bình phương bằng 9.

Xét tính đúng sai và viết mệnh đề phủ định của các mznh đề sau:

a) x R, x2 > 0; b) x R, x2 = 5x - 4; c) x Z, 2x + 1 = 0.

BÀI TẬP

1. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là mệnh đề, khẳng định nào là mệnh đề chứa biến?

a) 3 + 2 > 5; b) 1 – 2x = 0; c) x - y = 2; d) 1 - < 0.

2. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau và phát biểu mệnh đề phủ định của chúng.

a) 2019 chia hết cho 3;

b) < 3,15;

c) Nước ta hiện nay có 5 thành phố trực thuộc Trung ương;

d) Tam giác có hai góc bằng 45o là tam giác vuông cân.

3. Xét hai mệnh đề:

P: “Tứ giác ABCD là hình bình hành”;

Q: “Tứ giác ABCD có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường”.

a) Phát biểu mệnh đề P => Q và xét tính đúng sai của nó.

b) Phát biểu mệnh đề đảo của mệnh đề P => Q.

4. Cho các mệnh đề sau:

P: “Giá trị tuyệt đối của mọi số thực đều lớn hơn hoặc bằng chính nó”;

Q: “Có số tự nhiên sao cho bình phương của nó bằng 10”;

R: “Có số thực x sao cho x2 + 2x - 1 = 0”.

a) Xét tính đúng sai của mỗi mệnh đề trên.

b) Sử dụng kí hiệu, để viết lại các mệnh đề đã cho.

5. Xét tính đúng sai và viết mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau đây:

a) x N, X + 3 = 0; b) **x** R, x2 + 1 ≥ 2x. c) a R, = a.

6. Cho các định lí:

P: “Nếu hai tam giác bằng nhau thì diện tích của chúng bằng nhau”;

Q: “Nếu a < b thì a + c < b + c” (a, b, c R).

a) Chỉ ra giả thiết và kết luận của mỗi định lí.

b) Phát biểu lại mỗi định lí đã cho, sử dụng thuật ngữ “điều kiện cần” hoặc “điều kiện đủ”.

c) Mệnh đề đảo của mỗi định lí đó có là định lí không?

7. Sử dụng thuật ngữ “điều kiện cần và đủ”, phát biểu lại các định lí sau:

a) Một phương trình bậc hai có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi biệt thức của nó dương;

b) Một hình bình hành là hình thoi thì nó có hai đường chéo vuông góc với nhau và ngược lại

**Bạn có biết?**

**Các giả thuyết trong toán học**

Trong toán học, có những mệnh đề được tin là đúng nhưng chưa thể chứng minh hay bác

bỏ (tức chỉ ra rằng nó sai). Mệnh đề như vậy được gọi là một **giả thuyết** toán học.

Nhiều giả thuyết toán học là thách thức lớn cho các nhà toán học trong thời gian dài, cuối

cùng đã được chứng minh. Chẳng hạn, Định li lớn Fermat “Không tồn tại ba số nguyên

dương x, y, z sao cho xn + yn = zn, trong đó n là số nguyên, n > 2” được Pierre de Fermat (1607 - 1665, nhà toán học người Pháp) phát biểu vào năm 1630 trên bìa một cuồn sách, kèm theo dòng chữ nói rằng ông có phương pháp đề chứng minh nhưng không thể viết ra vì lề sách quá hẹp. Phải sau đó gần bốn thế ki, Định li lớn Fermat mới được chứng minh bởi nhà toán học người Anh Andrew Wiles vào năm 1994.

Có những giả thuyết tưởng chắc đúng, nhưng sau đó người ta chỉ ra nó sai. Cũng có những giả thuyết đến nay vẫn chưa thể chứng minh hay bác bỏ. Chẳng hạn, giả thuyết Coldbach (Christian Goldbach, 1690 - 1764, là nhà toán học người Đức) phát biểu rằng “Mọi số chẵn lớn hơn 2 là tổng của hai số nguyên tố (ví dụ: 4 = 2+2, 6 = 3+ 3, 8 = 3+5, 10 = 3+7, ...). Những giả thuyết như vậy đang chờ đợi các nhà toán học chinh phục trong tương lai.

(Theo Britannica)