

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THANH HÓA
TRƯỜNG THPT QUẢNG XƯƠNG 1

SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

PHÁT TRIỂN TƯ DUY CHO HỌC SINH LỚP 12
QUA CÁC BÀI TOÁN ỨNG DỤNG TỈ SỐ THỂ TÍCH
TRONG HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Người thực hiện:

Chức vụ:

SKKN môn:

Trịnh Thị Thu Huyền

Giáo viên

Toán học

THANH HÓA NĂM 2016

MỤC LỤC

Mục lục.....	trang 1
1- Mở đầu	trang 2
2- Nội dung.	trang 3
2.1 - Cơ sở lý luận	trang 3
2.2 - Thực trạng của vấn đề.....	trang 5
2.3- Các biện pháp đã tiến hành để giải quyết vấn đề.....	trang 5
2.4 - Hiệu quả của sáng kiến kinh nghiệm.....	trang 17
3- Kết luận, kiến nghị.....	trang 17
Tài liệu tham khảo.....	trang 19

1-MỞ ĐẦU

1.1 Lý do chọn đề tài

Trong chương trình môn Toán bậc THPT hiện nay phần hình học không gian là phần kiến thức khó đối với nhiều học sinh. Hơn nữa trong cấu trúc đề thi trung học phổ thông quốc gia câu hình học không gian trong là bắt buộc trong đó thường có một ý tính thể tích khối đa diện và khoảng cách. Để làm các bài toán hình không gian đòi hỏi học sinh phải nắm vững kiến thức cơ bản, vận dụng tổng hợp kiến thức của hình không gian và hình học phẳng kết, hợp thao tác cụ thể để dựng hình, tính toán. Có nhiều bài toán chỉ cần vận dụng đúng các bước theo lý thuyết là ta có thể đi đến kết quả, nhưng có nhiều bài toán để dựng được hình theo lý thuyết rất khó khăn và khi dựng được rồi thì tính toán quá phức tạp. Khi đó buộc học sinh phải tìm con đường khác để giải quyết. Cụ thể là vấn đề tính thể tích khối đa diện, tính khoảng cách trong một số bài toán học sinh tỏ ra rất lúng túng trong việc xác định đường cao của đa diện hoặc diện tích đáy hoặc xác định hình chiếu một điểm lên một mặt phẳng. Học sinh buộc phải tính thể tích hoặc xác định khoảng cách thông qua thể tích của một khối đa diện khác có thể tính thể tích một cách dễ dàng. Qua các bài tập này học sinh tự hình thành cho mình các tư duy toán học, thói quen đào sâu suy nghĩ, luôn tìm tòi, phát hiện ra các cách mới mẻ để giải quyết một công việc. Lâu nay trong quá trình dạy tôi cũng như các đồng nghiệp khác có dạy học sinh các bài toán loại này nhưng chỉ dạy xen kẽ và không chú trọng đến nên học sinh cũng không quan tâm nhiều đến hiệu quả của nó. Trước tình hình đó cùng với quá trình giảng dạy và nghiên cứu, tôi đã thử giải các bài toán tính thể tích khối đa diện bằng phương pháp tỉ số thể tích thấy có hiệu quả và cho được lời giải ngắn gọn rất nhiều; hơn nữa học sinh chỉ cần những kiến thức cơ bản về hình học không gian ở lớp 11 là có thể làm được. Với suy nghĩ nhằm giúp các em tìm tòi, phát hiện và tạo hứng thú trong quá trình học bộ môn Toán và hơn nữa là góp phần nâng cao chất lượng giảng dạy, trang bị đầy đủ kiến thức về hình học không gian, tôi viết đề tài sáng kiến kinh nghiệm: ***“Phát triển tư duy cho học sinh lớp 12 qua các bài toán ứng dụng tỉ số thể tích trong hình học không gian”***.

1.2. Mục đích nghiên cứu :

Đề tài này góp phần trang bị đầy đủ kiến thức về hình học không gian đồng thời phát triển tư duy cho học sinh : tư duy sáng tạo, tư duy phân tích, tổng hợp, tư duy trừ tượng, và thói quen đặt câu hỏi ngược khi giải quyết một vấn đề, nhìn nhận vấn đề dưới nhiều góc cạnh từ đó tìm phương án nhanh gọn để giải quyết hiệu quả nhất. Những yếu tố trên cũng rất cần thiết trên con đường thành công của mỗi học sinh trong tương lai.

1.3. Đối tượng nghiên cứu:

Đề tài được áp dụng trong phần tính thể tích khối đa diện và khoảng cách trong chương trình hình học lớp 12, học sinh ôn thi THPT Quốc gia.

1.4. Phương pháp nghiên cứu:

Trên cơ sở lý thuyết cơ bản trong sách giáo khoa, trước các bài toán tính thể tích khối đa diện và khoảng cách trong hình học không gian tôi hướng dẫn học

sinh tự đặt câu hỏi cho mỗi bài toán có thể tính theo cách làm thông thường không, nếu làm được thì cách giải quyết có quá khắt khe không. Từ đó học sinh tự tìm con đường khác để giải quyết bài toán trên cơ sở các yếu tố có thể giải quyết đơn giản. Thông qua hệ thống câu hỏi mang tính chất gợi mở vấn đề và đến cách giải quyết học, sinh có thể tự tìm cách làm bài toán trên những kiến thức cơ bản đã được trang bị. Để học sinh tiếp cận vấn đề tôi chia các dạng bài thành 4 dạng, hệ thống ví dụ từ dễ đến khó, trước khi giải mỗi ví dụ có câu hỏi gợi mở phân tích để hướng học sinh tới suy nghĩ tìm các giải quyết. Sau các ví dụ có lời giải là các bài tập tham khảo để học sinh tự luyện tập.

2 – NỘI DUNG SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

2.1. Cơ sở lý luận

Để thực hiện đề tài cần dựa trên những kiến thức cơ bản sau:

Bài toán 1: (Bài 4 sgk HHI2CB trang 25)

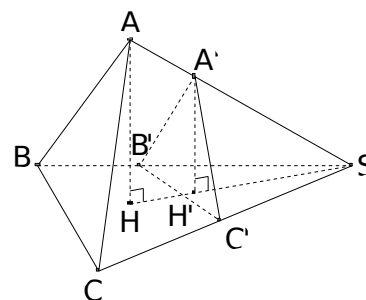
Cho khối chóp S.ABC, trên các đoạn thẳng SA, SB, SC lần lượt lấy các điểm A', B', C' khác điểm S. CMR: $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}$ (1)

Giải:

Gọi H và H' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và A' lên (SBC)

Ta có AH // A'H'. Ba điểm S, H, H' cùng thuộc hai mp (AA'H'H) và (SBC) nên chúng thẳng hàng. Xét $\triangle SAH$ ta có

$$\frac{SA'}{SA} = \frac{A'H'}{AH} \quad (*)$$



$$\text{Do đó: } \frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{\frac{1}{3} A'H' \cdot S_{\triangle SB'C'}}{\frac{1}{3} AH \cdot S_{\triangle SBC}} = \frac{A'H'}{AH} \cdot \frac{SB' \cdot SC' \cdot \sin \angle B'SC'}{SB \cdot SC \cdot \sin \angle BSC} \quad (**)$$

Từ (*) và (**) ta được đpcm

Trong công thức (1), đặc biệt hoá, cho B' $\equiv$ B và C' $\equiv$ C ta được

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \quad (1')$$

Ta lại có

$$V_{S.ABC} = V_{S.A'BC} + V_{A'.ABC}$$

$$(1') \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{SA'}{SA} \cdot V_{S.ABC} + V_{A'.ABC}$$

$$\Rightarrow \frac{V_{A'.ABC}}{V_{S.ABC}} = 1 - \frac{SA'}{SA} = \frac{A'A}{SA}$$

$$\text{Vậy: } \frac{V_{A'.ABC}}{V_{S.ABC}} = \frac{A'A}{SA} \quad (2)$$

***Nhận xét:**

1, Ta có thể chứng minh công thức (1') bằng công thức tính thể tích :
Gọi H, H' lần lượt là hình chiếu vuông góc của hình chiếu vuông góc của S và A₁ lên mp(ABC). Khi đó A, H, H' thẳng hàng và SH // A₁H₁. Do đó $\frac{A'H'}{SH} = \frac{A'A}{SA}$
mà $V_{SABC} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABC}$; $V_{A'ABC} = \frac{1}{3} A'H \cdot S_{ABC}$. Từ đó ta có : $\frac{V_{A'ABC}}{V_{SABC}} = \frac{A'A}{SA}$

2, Công thức (1) chỉ dùng cho hình chóp tam giác. Các khối chóp khác muốn sử dụng công thức này thì phải phân chia thành các khối chóp tam giác.

Tổng quát hoá công thức (2) ta có bài toán sau đây:

Bài toán 2: Cho khối chóp đỉnh S, đáy là 1 đa giác lồi A₁A₂...A_n (n ≥ 3), trên đoạn thẳng SA₁ lấy điểm A₁' không trùng với A₁. Khi đó ta có

$$\frac{V_{A_1'.A_1A_2...A_n}}{V_{S.A_1A_2...A_n}} = \frac{A_1'A_1}{SA_1} \quad (2')$$

Chứng minh (2') theo 2 cách tương tự như trên (bằng phương pháp quy nạp theo n; ta chia khối chóp S.A₁A₂...A_n thành các khối chóp tam giác rồi áp dụng công thức (2) hoặc sử dụng cách xác định đường cao và công thức tính thể tích hình chóp).

Bài toán 3 (Phân chia khối đa diện SGK Hình học cơ bản lớp 12):

Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'. Tính tỉ số thể tích của khối chóp A'.ABC và khối chóp A'.BCC'B' với thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C'.

Giải : Giả sử đường cao của khối lăng trụ là h.

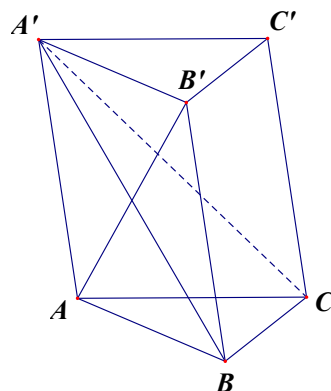
*Theo công thức tính thể tích ta có :

$$V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot h \quad ; \quad V_{A'.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot h$$

$$\text{Do đó } \frac{V_{A'.ABC}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{1}{3}$$

*Ta có

$$V_{A'.BCC'B'} = 2V_{A'.BB'C'} = 2V_{B.A'B'C'} = \frac{2}{3} V_{ABC.A'B'C'}$$



*** Một số công thức cần sử dụng:**

-Công thức hệ thức lượng trong tam giác vuông, công thức xác định đường cao, công thức hình chiếu.

-Công thức xác định đường cao của hình chóp thông qua công thức thể tích:

$$d(S, (ABC)) = \frac{3V_{S.ABC}}{S_{ABC}}$$

2.2. Thực trạng vấn đề trước khi áp dụng sáng kiến kinh nghiệm

Trường THPT Quảng Xương 1 là một ngôi trường dày truyền thống dạy và học. Nhiều năm qua trường luôn dẫn đầu trong thành tích học sinh giỏi và xếp top đầu trong kỳ thi Đại học – Cao đẳng trong tỉnh. Dưới sự lãnh đạo của Ban giám hiệu, đội ngũ giáo viên luôn trăn trở tìm tòi, đổi mới phương pháp giảng dạy nhằm nâng cao chất lượng giáo dục toàn diện cho học sinh. Nhà trường không chỉ chú trọng truyền thụ tri thức mà còn phát triển tư duy cho học sinh thông qua các bài học, làm hành trang vững chắc cho các em bước vào tương lai. Tuy nhiên trong các môn học thì hình học không gian vẫn là môn học khó đối với đại đa số học sinh đặc biệt là học sinh trung bình và yếu. Khi giải các bài toán về hình học không gian, nếu tiến hành theo các bước cơ bản không được thì tâm lý học sinh thường nản và bỏ qua. Theo số liệu thống kê trước khi dạy đề tài này ở ba lớp tôi trực tiếp giảng dạy năm học 2015-2016 : 12T4, 12T5, 12C3 trường THPT Quảng Xương 1, kết quả như sau:

Năm học	Lớp	Sĩ số	Số học sinh giải được trước khi thực hiện đề tài
2015-2016	12T4	48	15
	12T5	42	11
	12C3	44	5

Đứng trước thực trạng tên tôi nghĩ nên hướng cho các em tới một cách giải quyết khác trên cơ sở kiến thức trong SGK. Song song với việc cung cấp tri thức tôi chú trọng rèn rũa kỹ năng giải toán, phát triển tư duy cho học sinh để trên cơ sở này học sinh không chỉ học tốt phần này mà còn làm nền tảng cho các phần kiến thức khác.

2.3. Các biện pháp tiến hành giải quyết vấn đề

Để tính thể tích của một khối đa diện bất kì chúng ta chia khối đa diện đó thành các khối đa diện đã biết công thức tính (Khối lăng trụ $V = B.h$, Khối chóp $V = \frac{1}{3} B.h$, Khối hộp chữ nhật $V = abc$, ...) rồi cộng các kết quả lại.

Tuy nhiên trong nhiều trường hợp, việc tính thể tích của các khối lăng trụ và khối chóp theo công thức trên lại gặp khó khăn do không xác định được đường cao hay diện tích đáy, học sinh tự đặt câu hỏi các đỉnh trong hình đa diện cần tính có xác định được không (tính theo tỉ lệ độ dài so với các cạnh đã biết) do đó có thể chuyển việc tính thể tích các khối này về việc tính thể tích của các khối đã biết thông qua tỉ số thể tích của hai khối.

Sau đây ta sẽ xét một số dạng toán ứng dụng tỉ số thể tích, mỗi dạng tôi đưa ra một số bài toán cơ bản và ví dụ minh họa, trên cơ sở lý thuyết đã có hướng dẫn học sinh tự đặt câu hỏi và lựa chọn cách giải đúng và ngắn gọn nhất.

DẠNG 1: TÍNH TỈ SỐ THỂ TÍCH CỦA CÁC KHỐI ĐA DIỆN

****Mục đích của dạng này giúp học sinh tìm được tỉ lệ thể tích của khối đa diện cần tính với thể tích của khối đa diện đã biết thể tích.***

Ví dụ 1: Cho hình chóp S.ABC có $SA \perp (ABC)$, $SA = a$, đáy ABC là tam giác vuông tại B và $AB = a; BC = 2a$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên SC, M là trung điểm của SB. Tính tỉ số thể tích hai khối chóp S.AMH và S.ABC

* **Câu hỏi gợi mở:** Theo giả thiết có thể tính được tỉ số $\frac{SH}{SC}$ và $\frac{SM}{SC}$ không? Có thể áp dụng trực tiếp được công thức (1) chưa?

Giải:

Tam giác ABC vuông tại B nên

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + 4a^2 = 5a^2$$

Tam giác SAC vuông tại A nên

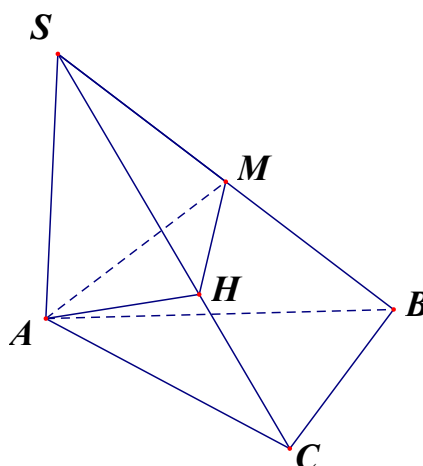
$$SC^2 = SA^2 + AC^2 = a^2 + 5a^2 = 6a^2$$

Tam giác SAC vuông tại S nên ta có

$$SH \cdot SC = SA^2 \Rightarrow SH = \frac{SA^2}{SC} = \frac{a^2}{a\sqrt{6}} = \frac{a}{\sqrt{6}}$$

$$\text{Do đó } \frac{SH}{SC} = \frac{1}{6}$$

$$\text{Vậy } \frac{V_{S.AMH}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SH}{SC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$



Ví dụ 2: Cho khối chóp S.ABCD có $SA \perp (ABCD)$ và đáy ABCD là hình chữ nhật $AB = a; AD = 2a; SA = 2a$. Mặt phẳng (α) qua A vuông góc với SC cắt SB, SC, SD tại lần lượt là B', C', D'. Tính tỉ số thể tích của hai khối chóp được chia bởi mp (α) .

* **Câu hỏi gợi mở:**

- Hai khối đa diện được phân chia có phải là khối chóp đa giác không?

- Phân chia khối chóp tứ giác thế nào để có thể áp dụng bài toán tỉ lệ cơ bản

- Tỉ lệ các đoạn thẳng chia trên các cạnh bên có xác định được không?

Giải:

Ta có: $AB' \perp SC; BC \perp AB'$ (vì $BC \perp (SAB)$)

$$\Rightarrow AB' \perp (SBC) \Rightarrow AB' \perp SB$$

Tương tự $AD' \perp SC$

Do ABCD là hình chữ nhật nên

$$AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = a\sqrt{5}$$

Tam giác SAC là tam giác vuông nên

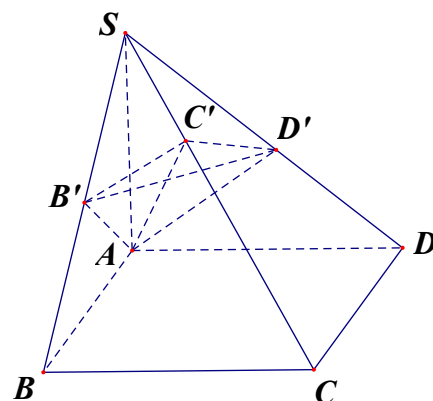
$$SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 3a \Rightarrow SC' \cdot SC = SA^2 \Rightarrow SC' = \frac{SA^2}{SC} = \frac{4a}{3}$$

Tam giác SAB vuông tại A nên

$$SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{5} \Rightarrow SB' \cdot SB = SA^2 \Rightarrow SB' = \frac{SA^2}{SB} = \frac{4a}{\sqrt{5}}$$

Tam giác SAD vuông tại A nên

$$SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = 2a\sqrt{2} \Rightarrow AD' \cdot SD = SA^2 \Rightarrow SD' = \frac{SA^2}{SD} = \frac{2a}{\sqrt{2}}$$



Ta có $V_{S.AB'C'D'} = V_{S.AB'C'} + V_{S.AC'D'}$

Mặt khác $\frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{9} = \frac{16}{45}$ mà $V_{S.ABC} = \frac{1}{2} V_{S.ABCD} \Rightarrow$

$$\frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{8}{45}$$

$$\frac{V_{S.AC'D'}}{V_{S.ACD}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SD'}{SD} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} = \frac{2}{9} \text{ mà } V_{S.ACD} = \frac{1}{2} V_{S.ABCD} \Rightarrow \frac{V_{S.AC'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{9}$$

$$\text{Vậy } \frac{V_{S.AB'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{9} + \frac{8}{45} = \frac{13}{45}$$

Ví dụ 3:

Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi B', D' lần lượt là trung điểm của SB và SD . Mặt phẳng $(AB'D')$ cắt SC tại C' . Tính tỉ số thể tích của hai khối chóp được chia bởi mp $(AB'D')$

Giải:

Gọi O là giao điểm của AC và BD và I là giao điểm của SO và $B'D'$. Khi đó AI cắt SC tại C'

Ta có

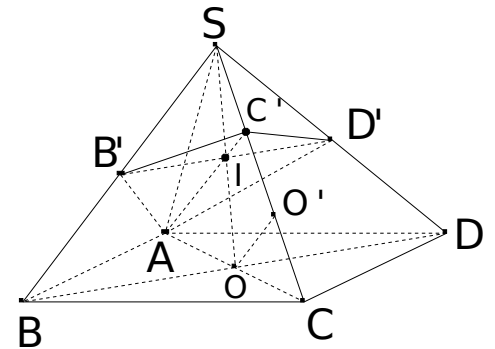
$$\frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{SC'}{SC},$$

$$\frac{V_{S.AC'D'}}{V_{S.ACD}} = \frac{SC'}{SC} \cdot \frac{SD'}{SD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{SC'}{SC}$$

Suy ra $V_{S.AB'C'} + V_{S.AC'D'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{SC'}{SC} (V_{S.ABC} + V_{S.ACD}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{SC'}{SC} \cdot V_{S.ABCD}$

Kẻ $OO' \parallel AC'$ ($O' \in SC$). Do tính chất các đường thẳng song song cách đều nên ta có $SC' = C'O' = O'C$

$$\text{Do đó } V_{S.A'B'C'D'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot V_{S.ABCD} \text{ hay } \frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{6}$$



Ví dụ 4: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M là trung điểm của CC' , I là giao điểm của $B'M$ và BC' . Tính tỉ số thể tích của tứ diện $A'ABI$ và thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

***Câu hỏi gợi mở:**

- Vị trí điểm I có gì đặc biệt. Có thể xác định vị trí của nó so với các điểm đã biết không?

- Tứ diện $A'ABI$ đưa về hình chóp tam giác với đỉnh nào cho phù hợp?

-Mối quan hệ giữa mặt đáy với các mặt của hình lăng trụ? Thiết lập mối quan hệ với thể tích của tứ diện với thể tích của các khối chóp có thể tính theo tỉ lệ trong các bài cơ bản

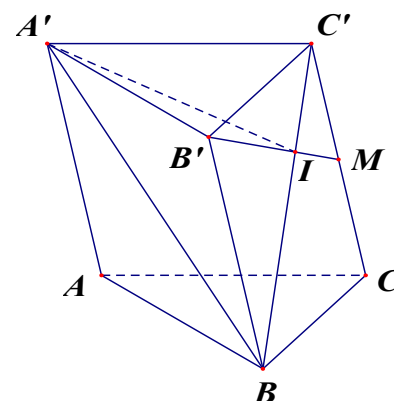
Giải:

$$\text{Vì } BB' \parallel CC' \text{ nên } \frac{C'I}{IB} = \frac{C'M}{BB'} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{IB}{C'B} = \frac{2}{3}$$

Ta có

$$\begin{aligned} V_{A'ABI} &= V_{I.A'AB} = V_{I.A'B'B} = \frac{2}{3} V_{C.A'B'B} = \frac{2}{3} V_{B.A'B'C'} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} V_{ABC}. \\ &= \frac{2}{9} V_{ABC.A'B'C'}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \frac{V_{A'ABI}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{2}{9}$$



*** Bài tập tham khảo:**

Bài 1: Cho hình chóp tam giác đều S.ABC, đáy ABC là tam giác đều có trục tâm H và cạnh bằng a. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CA và M, N, P lần lượt là trung điểm các đoạn SI, SJ, SK. Tính tỉ số thể tích của hai khối chóp H.MNP và S.ABC. Từ đó tính thể tích khối chóp H.MNP

$$\text{ĐS: } \frac{V_{H.MNP}}{V_{S.ABC}} = \frac{1}{32}$$

Bài 2:

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Một mặt phẳng (α) qua AB cắt SC, SD lần lượt tại M và N. Tính $\frac{SM}{SC}$ để mặt phẳng (α) chia hình chóp thành hai phần có thể tích bằng nhau.

$$\text{ĐS: } \frac{SM}{SC} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

DẠNG 2: ỨNG DỤNG TỈ SỐ THỂ TÍCH ĐỂ TÍNH THỂ TÍCH

Ví dụ 1: Cho khối chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, DA = 2a và DA vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên các đường thẳng DB và DC. Tính thể tích khối chóp A.BCNM theo a

***Câu hỏi gợi mở:** Dựa vào giả thiết ta có thể tính diện tích hình chóp D.AMN không?

-Xác định đường cao DH của hình chóp D.AMN và tính diện tích tam giác AMN khó khăn vì không có sẵn yếu tố vuông góc

-Vì vậy nên dùng tỉ số thể tích để tính thể tích khối chóp D.AMN thông qua thể tích khối chóp D.ABC.

Giải:

$$\text{Ta có } \frac{V_{DAMN}}{V_{DABC}} = \frac{DM}{DB} \cdot \frac{DN}{DC}$$

AM và AN lần lượt là các đường cao trong các tam giác vuông DAB và DAC bằng nhau nên ta có :

$$\frac{DM}{MB} = \frac{DA^2}{AB^2} = \frac{4a^2}{a^2} = 4 \Rightarrow \frac{DM}{DB} = \frac{4}{5}$$

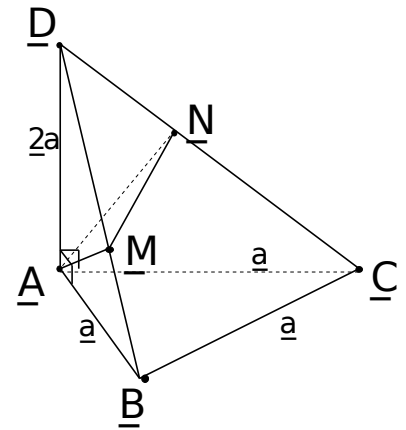
Tương tự $\frac{DN}{DC} = \frac{4}{5}$

Do đó $V_{D.AMN} = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot V_{D.ABC} = \frac{16}{25} \cdot V_{D.ABC}$.

Suy ra $V_{A.BCMN} = \frac{9}{25} \cdot V_{D.ABC}$

Mà $V_{D.ABC} = \frac{1}{3} \cdot 2a \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{6}$.

Vậy $V_{A.BCMN} = \frac{3a^3 \sqrt{3}}{50}$



Ví dụ 2: Cho hình chóp S.ABCD có, $SA \perp (ABCD)$, $SA = 2a$; đáy ABCD là hình thoi cạnh a, $\angle BAD = 120^\circ$. Gọi I là trung điểm của SC. Mặt phẳng đi qua AI và song song với BD cắt SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P. Tính thể tích hình chóp S.MNPI

***Câu hỏi gợi mở:**

-Dựng các điểm M, N, P theo giả thiết bài toán sử dụng quan hệ song song

-Ta có thể dựng đường cao SH của khối chóp S.AMNP không? (Ta có thể dựng được vì có $MP \parallel BD$ mà $BD \perp AC \Rightarrow BD \perp SC \Rightarrow MP \perp SA, MP \perp SI$. ; kẻ $SH \perp AI \Rightarrow SH \perp (AMNI)$)

-Ta có thể tính SH và diện tích tứ giác AMNI không? (Có thể nhưng tính toán khá phức tạp)

-Nhận thấy các điểm M, N, P, I nằm trên các cạnh bên của hình chóp và có thể xác định được tỉ lệ chia các đoạn thẳng đó. Vậy ta có thể giả quyết bài toán này theo cách dùng tỉ lệ để đơn giản bài toán.

Giải:

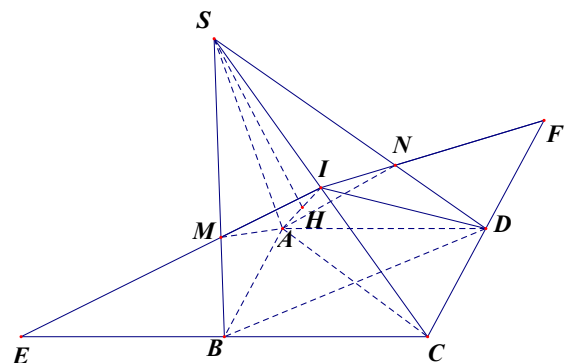
Trong mặt phẳng (ABCD) kẻ đường thẳng đi qua A và song song với BD cắt BC và CD lần lượt tại E và F. Ta có $IM \cap SD = N, IF \cap SB = N$

Vì N là trọng tâm tam giác SCD và M là trọng tâm tam giác SCE nên $\frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SD} = \frac{2}{3}$

Khi đó $V_{SAMNI} = V_{S.AMI} + V_{S.ANI}$

Mà $\frac{V_{S.AMI}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SI}{SC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{S.AMI} = \frac{1}{6} V_{S.ABCD}$

$\frac{V_{S.ANI}}{V_{S.ADC}} = \frac{SN}{SD} \cdot \frac{SI}{SC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{S.ANI} = \frac{1}{6} V_{S.ABCD}$



Vậy $V_{SAMNI} = \frac{1}{3} V_{S.ABCD}$. Mặt khác $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SA.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.2a.a.2a.\sin 120^\circ = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$

Vậy $V_{S.AMNI} = \frac{2a^3\sqrt{3}}{9}$

Ví dụ 3: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình chữ nhật, AB = SA = a, AD = a√2. SA vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và SC, gọi I là giao điểm của BM và AC. Tính thể tích khối tứ diện ANIM theo a.

***Câu hỏi gợi mở:**

-Chọn đỉnh phù hợp để xác định đường cao của tứ diện ANIM (Chọn đỉnh N)

-Bài toán có thể xác định đường cao của hình chóp N.AIM không? (Có thể vì $d(N, (ABCD)) = \frac{1}{2} d(S, (ABCD))$)

-Diện tích tam giác AIM không? (Xác định được vì tam giác này các cạnh tính được theo tỉ lệ độ dài của tam giác ABM mà $S_{ABM} = \frac{1}{4} S_{ABCD}$)

Tuy nhiên ta xét bài toán dưới cách tính tỉ số thể tích như sau:

Giải:

Gọi O là giao điểm của AC và BD. Ta có I là trọng tâm của tam giác ABD, do đó

$$\frac{AI}{AO} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AI}{AC} = \frac{1}{3}$$

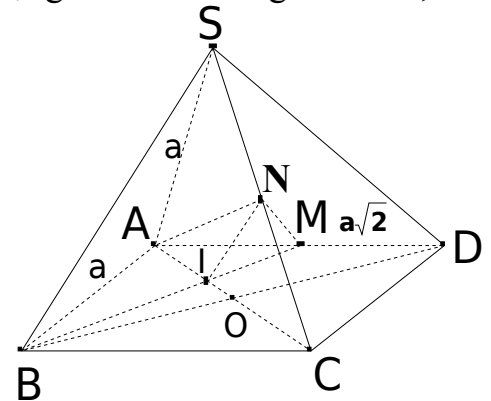
$$\text{nên } \frac{V_{AIMN}}{V_{ACDN}} = \frac{AI}{AC} \cdot \frac{AM}{AD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } \frac{V_{ACDN}}{V_{ACDS}} = \frac{NC}{SC} = \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \frac{V_{AIMN}}{V_{ACDS}} = \frac{1}{12}$$

$$\text{Mà } V_{SACD} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{\Delta ACD} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{2}a}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}. \quad \text{Vậy } V_{AIMN} = \frac{1}{12} \cdot V_{SACD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{72}$$

(đvtt)



Ví dụ 3:

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA = a, hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng (ABCD) là điểm H thuộc đoạn thẳng AC sao cho $AH = \frac{AC}{4}$. Gọi CM là đường cao của tam giác SAC. Chứng minh rằng M là trung điểm của SA và tính thể tích khối tứ diện SMBC theo a.

***Câu hỏi gợi mở:**

-Dựa vào giả thiết ta có thể tính diện tích hình chóp S.MBC không?

-Xác định đường cao SK của hình chóp S.MBC dùng kỹ thuật xác định chân đường vuông góc của S lên (MBC) và tính diện tích tam giác MBC khó khăn(có thể tính độ dài 3 cạnh và sử dụng công thức Hê-rông) vì không có sẵn yếu tố vuông góc

-Vì vậy nên dùng tỉ số thể tích để tính thể tích khối chóp S.MBC thông qua thể tích khối chóp S.ABCD để có cách giải đơn giản hơn nhiều.

Giải:

Từ giả thiết ta tính được .

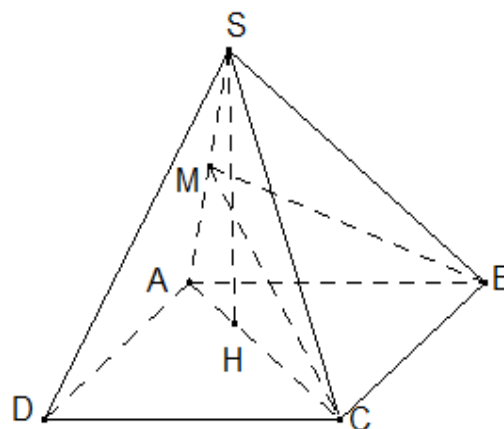
$$AH = \frac{a\sqrt{2}}{4}; SH = \frac{a\sqrt{14}}{4}; CH = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow SC = a\sqrt{2} \Rightarrow SC = AC$$

Do đó tam giác SAC cân tại C nên M là trung điểm của SA.

$$\text{Ta có } \frac{V_{S.MBC}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{S.MBC} = \frac{1}{2} V_{S.ABC}$$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{6} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a\sqrt{14}}{4} = \frac{a^3 \sqrt{14}}{48}$$



Ví dụ 4: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng (ABC) bằng 60° , $AB = a$; $AC = 2a$ và $\angle BAC = 120^\circ$. Gọi M là trung điểm của CC' , I là giao điểm của $B'M$ và BC' . Tính thể tích của tứ diện $A'BI$.

***Câu hỏi gợi mở:** Tứ diện $A'ABI$ có xác định trực tiếp đường cao và diện tích đáy không?

-Câu trả lời là rất khó khăn đặc biệt là trong hình lăng trụ

-Quan sát và tìm xem vị trí điểm I có gì đặc biệt. Có thể xác định vị trí của nó so với các điểm đã biết không?

-Tứ diện $A'ABI$ đưa về hình chóp tam giác với đỉnh nào cho phù hợp?

-Mối quan hệ giữa mặt đáy với các mặt của hình lăng trụ? Thiết lập mối quan hệ với thể tích của tứ diện với thể tích của các khối chóp có thể tính theo tỉ lệ trong các bài cơ bản.

Giải:

Hình chiếu của A' lên mặt phẳng (ABC) là A nên

$$\angle(A'C, (ABC)) = \angle(A'C, AC) = \angle A'CA = 60^\circ. \text{ Do đó}$$

$$A'A = AC \cdot \tan 60^\circ = 2a\sqrt{3}$$

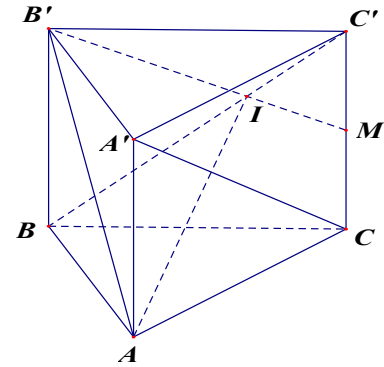
Vì $ABC.A'B'C'$ là hình lăng trụ đứng nên thể tích

của hình lăng trụ là :

$$V = A'.S_{ABC} = 2a\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin 120^\circ = 3a^3$$

theo Ví dụ 4 ở dạng 1 ta có :

$$\frac{V_{A'ABI}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{2}{9} \Rightarrow V_{A'ABI} = \frac{2}{9} V_{ABC.A'B'C'} = \frac{2}{9} \cdot 3a^3 = \frac{2a^3}{3}$$



*** Bài tập tham khảo:**

Bài 1: Cho khối tứ diện ABCD có $\angle ABC = \angle BAD = 90^\circ$, $\angle CAD = 120^\circ$, $AB = a$, $AC = 2a$, $AD = 3a$. Tính thể tích tứ diện ABCD.

$$\text{ĐS: } V_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$$

Bài 2: Cho khối chóp S.ABCD đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và $SA = 2a$. Gọi B', D' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB và SD. Mp($AB'D'$) cắt SC tại C'. Tính thể tích khối chóp S.AB'C'D' theo a

$$\text{ĐS: } V_{S.AB'C'D'} = \frac{16a^3}{45}$$

Bài 3: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có tất cả các cạnh đều bằng. Gọi M, P lần lượt là trung điểm của SA và SC, mp(DMP) cắt SB tại N. Tính theo a thể tích khối chóp S.DMNP

$$\text{ĐS: } V_{S.DMNP} = \frac{a^3\sqrt{2}}{36}$$

Bài 4: (ĐH khối B – 2010)

Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, góc giữa hai mặt phẳng ($A'BC$) và (ABC) bằng 60° . Gọi G là trọng tâm tam giác $A'BC$. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện GABC theo a.

$$\text{ĐS: } V_{ABC.A'B'C'} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8} \text{ và } R = \frac{7a}{12}$$

DẠNG 3: ỨNG DỤNG TỈ SỐ THỂ TÍCH TÍNH KHOẢNG CÁCH

Việc tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng khó khăn nhất là xác định chân đường cao. Khó khăn này có thể được khắc phục nếu ta tính khoảng cách thông qua thể tích của khối đa diện, mà khoảng cách đó chính là độ dài đường cao của khối đa diện. Sau đây ta sẽ xét một số ví dụ minh họa, trước mỗi bài toán học sinh tự đặt câu hỏi: "Với điều kiện của bài toán thì việc dựng chân đường vuông góc của điểm đã cho xuống mặt phẳng có thực hiện được không?"

Nếu khó khăn hoặc c qua phức tạp thì có thể dùng công thức ngược thông qua tỉ số thể tích không? Xác định khối chóp cần tính thể tích.”

Ví dụ 1:

Cho tứ diện ABCD có AD vuông góc mặt phẳng (ABC), $AD = AC = 4\text{cm}$, $AB = 3\text{cm}$, $BC = 5\text{cm}$. Tính khoảng cách từ A đến mp(BCD).

Giải:

Ta có $AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow AB \perp AC$

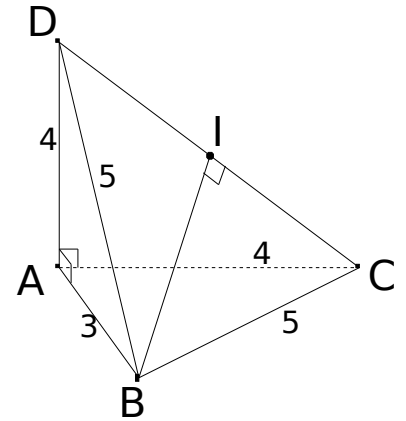
Do đó $V_{ABCD} = \frac{1}{6} AB \cdot AC \cdot AD = 8\text{cm}^3$

Mặt khác $CD = 4\sqrt{2}$, $BD = BC = 5$

Nên $\triangle BCD$ cân tại B, gọi I là trung điểm của CD

$$\Rightarrow S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} DC \cdot BI = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{5^2 - (2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{34}$$

$$\text{Vậy } d(A, (BCD)) = \frac{3V_{ABCD}}{S_{\triangle BCD}} = \frac{3 \cdot 8}{2\sqrt{34}} = \frac{6\sqrt{34}}{17}$$



Ví dụ 2:

Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình chữ nhật, $AD = 2a$, $AB = a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên SB và M là trung điểm của BC. CMR tam giác SMD vuông và tính theo a khoảng cách từ H đến mp(SMD)

Giải:

$$\text{Ta có } \frac{V_{S.HCD}}{V_{S.BCD}} = \frac{SH}{SB}$$

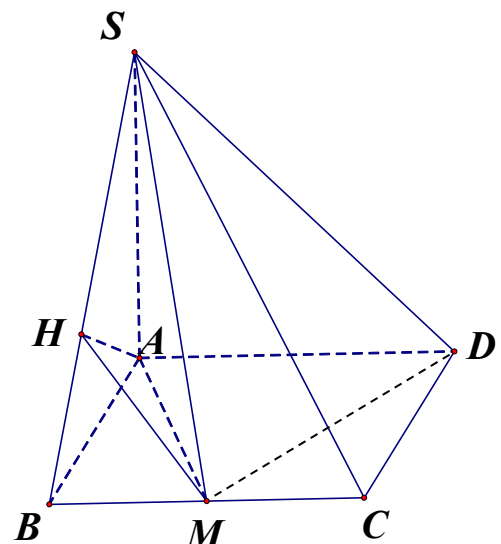
$\triangle SAB$ vuông tại A và AH là đường cao nên

$$\text{Ta có } \frac{SH}{HB} = \frac{SA^2}{AB^2} = \frac{2a^2}{a^2} = 2 \Rightarrow \frac{SH}{SB} = \frac{2}{3}$$

Vậy

$$V_{S.HMD} = \frac{2}{3} V_{S.BMD} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} a\sqrt{2} \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{9}$$

$$\text{Mà } V_{S.HMD} = \frac{1}{3} d(H, (SMD)) \cdot S_{\triangle SMD}$$



$\triangle SMD$ vuông tại M (do $AM^2 + MD^2 = AD^2$),

$$\text{do đó } S_{\triangle SCD} = \frac{1}{2} CD \cdot SC = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot 2a = a^2\sqrt{2} \cdot \text{nên } S_{\triangle SMD} = \frac{1}{2} MD \cdot SM = a^2\sqrt{2}$$

$$\text{Vậy } d(H.(SMD)) = \frac{3a^3\sqrt{2}}{9a^2\sqrt{2}} = \frac{a}{3}$$

Ví dụ 3: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông, $AB = BC = a$, $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của BC . Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$

Giải:

Gọi E là trung điểm của BB' , ta có $EM \parallel CB'$

Suy ra $B'C \parallel (AME)$ nên

$$d(B'C; AM) = d(B'C; (AME)) = d(C; (AME))$$

$$\text{Ta có } \frac{V_{C.AEM}}{V_{C.AEB}} = \frac{MC}{CB} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow V_{C.AEM} = \frac{1}{2} V_{EACB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}$$

$$\text{Ta có } d(C, (AME)) = \frac{3V_{C.AEM}}{S_{\Delta AEM}}$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên AE ,
ta có $BH \perp AE$

Hơn nữa $BM \perp (ABE) \Rightarrow BM \perp AE$, nên ta được $AE \perp HM$

$$\text{Mà } AE = \frac{a\sqrt{6}}{2}, \Delta ABE \text{ vuông tại } B \text{ nên } \frac{1}{BH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{EB^2} = \frac{3}{a^2}$$

$$\Rightarrow BH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\Delta BHM \text{ vuông tại } B \text{ nên } MH = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{21}}{6}$$

$$\text{Do đó } S_{\Delta AEM} = \frac{1}{2} AE \cdot HM = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{21}}{6} = \frac{a^2\sqrt{14}}{8}$$

$$\text{Vậy: } d(C, (AME)) = \frac{3a^3\sqrt{2}}{24 \cdot \frac{a^2\sqrt{14}}{8}} = \frac{a\sqrt{7}}{7}$$

Ghi chú: Có thể áp dụng công thức Hê – rông để tính $S_{\Delta AEM}$

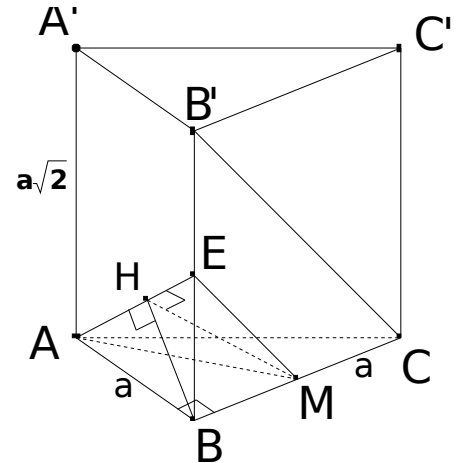
Ví dụ 4:

Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên $2a$, đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm của BC . Tính khoảng cách từ A đến mp $(BCC'B')$

Giải:

Theo giả thiết ta có $A'H \perp (ABC)$.

Tam giác ABC vuông tại A và AH là trung tuyến nên $AH = \frac{1}{2}BC = a$.



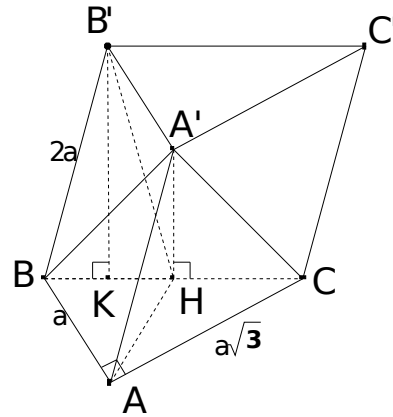
$\Delta A'AH$ vuông tại H nên ta có
 $A'H = \sqrt{A'A^2 - AH^2} = a\sqrt{3}$

Do đó $V_{A'.ABC} = \frac{1}{3}a\sqrt{3} \frac{a \cdot a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3}{2}$.

Mặt khác $\frac{V_{A'.ABC}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{1}{3}$

Suy ra :

$$V_{A'.BCC'B'} = \frac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot \frac{a^3}{2} = a^3$$



Ta có $d(A', (BCC'B')) = \frac{3V_{A'.BCC'B'}}{S_{BCC'B'}}$

Vì $AB \perp A'H \Rightarrow A'B' \perp A'H \Rightarrow \Delta A'B'H$ vuông tại A'

Suy ra $B'H = \sqrt{a^2 + 3a^2} = 2a = BB'$. $\Rightarrow \Delta BB'H$ cân tại B'. Gọi K là trung điểm của BH, ta có $B'K \perp BH$. Do đó $B'K = \sqrt{BB'^2 - BK^2} = \frac{a\sqrt{14}}{2}$

Suy ra $S_{BCC'B'} = B'C' \cdot BK = 2a \cdot \frac{a\sqrt{14}}{2} = a^2\sqrt{14}$

Vậy $d(A', (BCC'B')) = \frac{3a^3}{a^2\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{14}a}{14}$

* Bài tập tham khảo :

Bài 1:

Cho lăng trụ đứng ABCA'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại B, AB = a, AA' = 2a, A'C = 3a. Gọi M là trung điểm của A'C', I là giao điểm của AM và A'C. Tính theo a thể tích khối tứ diện IABC và khoảng cách từ A đến mp(IBC)

ĐS: $d(A, (IBC)) = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$

Bài 2:

Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có AA' = AB = a, BC = 2a, điểm M thuộc AD sao cho AM = 3MD. Tính khoảng cách từ M đến mp(AB'C)

ĐS: $d(A, (AB'C)) = \frac{a}{2}$

Bài 3:

Cho tứ diện ABCD có DA vuông góc với mp(ABC), $\angle ABC = 90^\circ$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) nếu AD = a, AB = BC = b

ĐS: $d(A, (BCD)) = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Bài 4:

Cho tứ diện đều ABCD, biết $AB = a$, M là 1 điểm ở miền trong của tứ diện. Tính tổng khoảng cách từ M đến các mặt của tứ diện

$$\text{ĐS: } h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = \frac{3V_{ABCD}}{S_{\Delta ACB}} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Bài 5:

Cho tứ diện ABCD và điểm M ở miền trong của tứ diện. Gọi r_1, r_2, r_3, r_4 lần lượt là khoảng cách từ M đến các mặt (BCD), (CDA), (DAB), (ABC) của tứ diện. Gọi h_1, h_2, h_3, h_4 lần lượt là khoảng cách từ các đỉnh A, B, C, D đến các mặt đối diện của tứ diện. CMR: $\frac{r_1}{h_1} + \frac{r_2}{h_2} + \frac{r_3}{h_3} + \frac{r_4}{h_4} = 1$

DẠNG 4: ỨNG DỤNG TỈ SỐ THỂ TÍCH TÍNH DIỆN TÍCH ĐA GIÁC (Mang tính chất tham khảo cho học sinh khá -giỏi)

Việc tính diện tích đa giác phẳng được quy về việc tính diện tích tam giác theo công thức $S_{\Delta} = \frac{1}{2}ah$, trong đó h – chiều cao và a là độ dài cạnh đáy.

Tuy nhiên trong nhiều trường hợp, đặc biệt là việc tính diện tích của các đa giác phẳng trong không gian, tính trực tiếp theo công thức gặp nhiều khó khăn. Khi đó có thể tính diện tích đa giác thông qua thể tích của các khối đa diện. Sau đây là một số ví dụ minh họa

Ví dụ 1:

Cho hình chóp tam giác đều S.ABC đỉnh S, có độ dài cạnh đáy bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và SC. Tính diện tích tam giác AMN theo a, biết rằng $(AMN) \perp (SBC)$

Giải:

Gọi K là trung điểm của BC và I là trung

điểm của MN. Ta có $\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} = \frac{1}{4}$ (1)

Từ $(AMN) \perp (SBC)$

và $AI \perp MN$ (do ΔAMN cân tại A)

nên $AI \perp (SBC) \Rightarrow AI \perp SI$

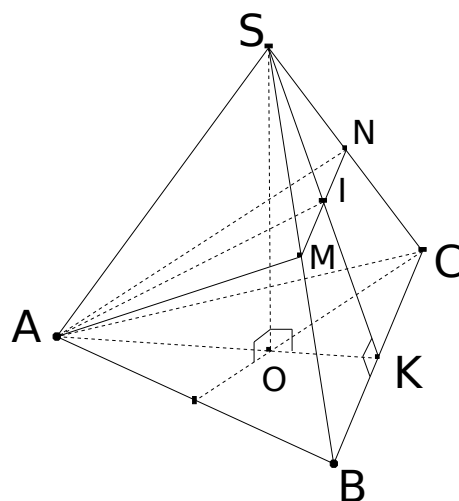
Mặt khác, $MN \perp SI$ do đó $SI \perp (AMN)$

Từ (1) $\Rightarrow \frac{SI \cdot S_{\Delta AMN}}{SO \cdot S_{\Delta ABC}} = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{\Delta AMN} = \frac{1}{4} \frac{SI}{SO} \cdot S_{\Delta ABC}$ (O

là trọng tâm của tam giác ABC)

Ta có ΔASK cân tại A (vì AI vừa là đường cao vừa là trung tuyến) nên

$$AK = AS = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \frac{a\sqrt{15}}{6} \text{ và } SI = \frac{1}{2}SK = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$



$$\text{Vậy } S_{\Delta AMN} = \frac{1}{4} \cdot \frac{a\sqrt{15}}{6a\sqrt{2}} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{10}}{16} \text{ (đvdt)}$$

*** Bài tập tham khảo:**

Bài 1: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$. Biết ABC là tam giác vuông tại B có $AB = a$, $BC = b$, $AA' = c$ ($c^2 \geq a^2 + b^2$). Một mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với CA' cắt lăng trụ theo một thiết diện.

- Xác định thiết diện đó
- Tính diện tích thiết diện xác định ở câu a)

$$\text{ĐS: Thiết diện } AMN \text{ có diện tích } S_{AMN} = \frac{ab\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2c}$$

Bài 2: Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh $AB = x$, $AC = y$, $AD = z$, các góc $BAC = CAD = DAB = 90^\circ$. Gọi H là hình chiếu của A lên mặt phẳng (BCD)

- Chứng minh rằng: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}$
- Tính diện tích tam giác BCD

$$\text{ĐS: } S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2}$$

2.4. Hiệu quả của sáng kiến kinh nghiệm

Sau khi hướng dẫn học sinh vận dụng tỉ số thể tích trong một số bài tập cụ thể tôi đã tiến hành kiểm tra sự tiếp thu và khả năng áp dụng của học trò các lớp kết quả như sau

Năm học	Lớp	Sĩ số	Số học sinh giải được	
			Trước khi thực hiện đề tài	Sau khi thực hiện đề tài
2015-2016	12T4	48	15	38
	12T5	42	11	30
	12C3	44	5	18

Sáng kiến kinh nghiệm này có thể mở rộng khai thác các bài toán khó hơn để dạy cho đối tượng học sinh thi học sinh giỏi.

3- KẾT LUẬN – KIẾN NGHỊ

3.1. Kết luận :

Khi áp dụng chuyên đề này vào giảng dạy học sinh bộ môn Toán ở 3 lớp 12T4, 12T5, 12C3 trường THPT Quảng Xương 1, tôi nhận thấy rằng các em học sinh rất hứng thú với môn học, nhiều em cảm thấy bất ngờ khi mà một số bài toán tưởng chừng như không thể giải quyết nếu không có công cụ là tỉ số thể tích, thì nay lại được giải quyết một cách đơn giản, dễ hiểu. Chính vì các em cảm thấy hứng thú với môn học nên tôi nhận thấy chất lượng của môn Toán nói riêng, và kết quả học tập của các em học sinh nói chung được nâng lên rõ rệt,

góp phần nâng cao chất lượng giáo dục của nhà trường. Ngoài ra các em cũng học được cách tìm tòi, khám phá và tự đặt ra câu hỏi và tìm cách giải quyết vấn đề đó như thế nào nhanh gọn và hiệu quả nhất.

3.2. Kiến nghị:

- Đối với nhà trường, đồng nghiệp khi giảng dạy phần hình không gian nên để ý hơn đến việc hướng dẫn học sinh biết phân chia và lắp ghép khối đa diện. Nhà trường trang bị thêm đồ dùng học tập hiện đại về hình học không gian.

- Đối với Sở GD và Đào tạo : Có thể làm riêng một phần mềm tin học về các hình không gian theo lý thuyết và các bài toán trong sách giáo khoa để giáo viên trong tỉnh có thể sử dụng giảng dạy, giúp học sinh có thể trực quan quan sát hình từ đó các giờ dạy hình không gian sẽ thêm sinh động, tạo hứng thú học tập cho học sinh.

XÁC NHẬN CỦA THỦ TRƯỞNG ĐƠN VỊ

Thanh Hoá, ngày 30 tháng 5 năm 2016

Tôi xin cam đoan đây là SKKN của
mình viết, không sao chép nội dung
của người khác.

Trịnh Thị Thu Huyền

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- Sách giáo khoa Hình học cơ bản và Hình học nâng cao 12
- Chuyên đề Hình học không gian của tác giả Trần Phương-Lê Hồng Đức
- Chuyên đề Hình học không gian của tác giả Phan Huy Khải
- Tuyển tập các đề tuyển sinh Đại học – Cao đẳng 2002 – 2015 – NXB Giáo Dục
- Phương pháp giảng dạy môn Toán, tác giả: *Vũ Dương Thụy – Nguyễn Bá Kim – NXB Giáo dục*