

PHẦN I. MỞ ĐẦU

1.1. Lí do chọn đề tài:

Phát triển năng lực tư duy sáng tạo cho học sinh là việc làm rất quan trọng và cần thiết trong quá trình dạy học, giáo dục học sinh. Phát triển tư duy sáng tạo sẽ giúp học sinh tự tin vào bản thân để không ngừng khám phá, tìm tòi, phát hiện cái mới; sáng tạo sẽ giúp học sinh chủ động tiếp thu kiến thức, có nghị lực và niềm tin để chinh phục những khó khăn trong học tập. Cao hơn tư duy sáng tạo sẽ giúp học sinh tìm ra con đường ngắn nhất, nhanh nhất để đạt thành công trong học tập, trong cuộc sống.

Xuất phát từ đặc thù của bộ môn toán với sự khái quát và trừu tượng cao, sự liên kết liên tục các kiến thức toán học theo từng năm học, từng cấp học. Điều đó đòi hỏi học sinh không chỉ cần phải tích cực, chủ động tiếp thu, lĩnh hội kiến thức mới mà còn phải biết vận dụng linh hoạt kiến thức đã học, biết kết nối những kiến thức cũ để chiếm lĩnh kiến thức mới... Vì lẽ đó việc đổi mới phương pháp dạy học trong dạy học môn Toán càng trở nên quan trọng, bức thiết và đó cũng chính là nhiệm vụ của những người giáo viên dạy Toán.

Nội dung hình học không gian thường được xem là nội dung khó học nhất đối với học sinh THPT, khi dạy học chủ đề này nhiều giáo viên cảm thấy khó dạy, không mấy hứng thú như các chủ đề khác của môn Toán. Nguyên nhân quan trọng dẫn đến thực trạng nêu trên là do hình học không gian đòi hỏi mức độ tư duy và tưởng tượng cao; học sinh đang quen với tư duy về hình học phẳng nên gặp nhiều khó khăn khi làm quen và tư duy về hình học không gian. Để học tốt hình học không gian học sinh cần phát huy tư duy sáng tạo, ngược học sinh học tốt môn toán nói chung chủ đề hình học không gian nói riêng thì sẽ góp phần phát triển tư duy sáng tạo.

Những lí do nêu trên là cơ sở để tôi chọn đề tài nghiên cứu: “ ***Phát triển năng lực tư duy sáng tạo cho học sinh Trung học phổ thông thông qua một số kỹ thuật giải toán hình học không gian lớp 11***”.

1.2. Mục đích của đề tài

- Nghiên cứu phương pháp giảng dạy giải bài tập toán theo hướng hình thành và phát triển tư duy sáng tạo cho học sinh.

- Dựa theo chuẩn kiến thức kỹ năng hình học 11 của Bộ GD-ĐT và xuất phát từ thực tiễn giảng dạy hình học không gian 11, thông qua một số phương pháp nhằm rèn luyện năng lực tư duy cho học sinh.

1.3. Đối tượng nghiên cứu

Bài tập hình học không gian trong chương I+II SGK hình học 11 theo chương trình cơ bản và nâng cao.

1.4. Phương pháp nghiên cứu:

Đặt vấn đề, giải quyết vấn đề.

PHẦN 2. NỘI DUNG

2.1. Cơ sở lí luận của đề tài.

2.1.1. Cơ sở toán học.

+ Các định nghĩa, định lý, tính chất về hình học phẳng ở THCS, hình học không gian trong SGK Hình học 11.

+ Các tính chất về phép chiếu song song, phép chiếu vuông góc, cụ thể:

* Đối với phép chiếu song song các tính chất sau đây thường được sử dụng khi giải bài tập toán hình học:

Tính chất 1: Qua phép chiếu song song các yếu tố sau đây không thay đổi (bất biến):

+ Tỷ số của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.

+ Sự thẳng hàng của 3 điểm (phương chiếu không song song với đường thẳng chứa 3 điểm đó).

+ Độ dài đoạn thẳng thuộc đường thẳng song song với phương chiếu không thay đổi, nghĩa là biến đoạn AB thành $A'B'$ và $AB = A'B'$.

Tính chất 2:

+ Phép chiếu song song biến đường thẳng không song song với phương chiếu thành đường thẳng.

+ Biến trung điểm của đoạn thẳng không thuộc đường thẳng song song với phương chiếu thành trung điểm của đoạn thẳng.

Tính chất 3:

+ Ảnh của ba điểm phân biệt qua một phép chiếu song song trùng nhau thì ba điểm đó thẳng hàng.

+ Phép chiếu song song theo hai phương không cùng phương biến ba điểm A, B, C lần lượt thành thành 3 điểm thẳng hàng A_1, B_1, C_1 và A_2, B_2, C_2 thì A, B, C thẳng hàng.

* Đối với phép chiếu vuông góc tính chất sau đây thường được sử dụng:

Tính chất: Qua phép chiếu vuông góc một góc vuông có ảnh là một góc vuông khi và chỉ khi có một cạnh song song hoặc thuộc mặt phẳng chiếu, cạnh còn lại không vuông góc với mặt phẳng chiếu.

2.1.2. Cơ sở tâm lý học.

Theo các nhà tâm lý học, con người chỉ bắt đầu tư duy tích cực khi nảy sinh nhu cầu cần tư duy, tức là khi đứng trước một khó khăn về nhận thức cần phải khắc phục, một tình huống gọi vấn đề, hay nói như Rubinstein: “Tư duy sáng tạo luôn luôn bắt đầu bằng một tình huống gọi vấn đề”. Việc giải bài toán nói chung, giải toán hình học không gian nói riêng đặt học sinh đứng trước một khó khăn, khó khăn này có thể giải quyết được nếu học sinh nắm vững được những kiến thức đã học và biết cách vận dụng chúng. Như vậy các phương pháp giải toán hình học không gian chính là những công cụ hữu hiệu để học sinh có niềm tin, có động lực để giải các bài toán hình học.

Những hoạt động toán học nói chung, hoạt động hình học nói riêng sẽ tạo ra nhiều tình huống gọi vấn đề từ đó tạo cho học sinh nhu cầu tư duy hình học,

tư duy toán học. Theo cơ sở tâm lý học đã được các nhà tâm lý học kết luận và đã được kiểm chứng trong thực tiễn giáo dục thì những nhu cầu tư duy nêu trên sẽ là cơ sở để học sinh tiếp thu, lĩnh hội kiến thức hình học mới, kiến thức toán học mới.

2.1.3. Cơ sở giáo dục học.

Hoạt động nhận thức toán học của học sinh được hiểu “ là quá trình tư duy dần tới lĩnh hội các tri thức toán học, nắm được ý nghĩa của các tri thức đó, xác định được các mối liên hệ nhân quả và các mối liên hệ khác của các đối tượng toán học được nghiên cứu (khái niệm; quan hệ; quy luật toán học,...); từ đó học sinh vận dụng được tri thức toán học giải quyết các vấn đề thực tiễn” .

Mục tiêu chủ yếu của việc phát triển hoạt động nhận thức trong dạy học toán là phát triển trí tuệ và nhân cách của học sinh. Ở đây sự phát triển trí tuệ được hiểu là sự thay đổi về chất trong hoạt động nhận thức. Sự biến đổi đó được đặc trưng bởi sự thay đổi cấu trúc cái được phản ánh và phương thức phản ánh chúng. Nói như vậy đồng nghĩa với phát triển trí tuệ là sự thống nhất giữa việc vũ trang tri thức và việc phát triển một cách tối đa phương thức phản ánh chúng. Trong sự thống nhất đó dẫn đến làm thay đổi cấu trúc bản thân hệ thống tri thức (mở rộng cải tiến, bổ sung, cấu trúc lại) làm cho hệ thống tri thức ngày càng thêm sâu sắc và phản ánh đúng bản chất, tiếp cận dần với chân lí và điều chỉnh, mở rộng các phương thức phản ánh, đôi khi đi đến xóa bỏ những phương thức phản ánh cũ để hình thành những phương thức phản ánh mới hợp lí hơn, sáng tạo hơn, phù hợp với quy luật tự nhiên và xã hội. Phát triển trí tuệ được hiểu cụ thể qua phát triển các năng lực trí tuệ bao gồm năng lực thu nhận thông tin toán học; năng lực chế biến thông tin toán học; năng lực tư duy logic, tư duy biện chứng, tư duy phê phán, tư duy định lượng; năng lực khái quát nhanh chóng và rộng rãi các đối tượng, các quan hệ, các mối liên hệ trong toán học; có tính mềm dẻo trong quá trình tư duy; năng lực thay đổi nhanh chóng chuyển hướng suy nghĩ từ dạng này sang dạng khác.

Như vậy thông qua hoạt động nhận thức toán học nói chung, hoạt động nhận thức về hình học không gian nói riêng sẽ nhằm thực hiện mục tiêu giáo dục nhân cách cho học sinh; giáo dục tư duy phê phán; cách giải quyết vấn đề sáng tạo; cách xử lí thông tin... trong cuộc sống thực tiễn.

2.2. Thực trạng của đề tài.

Qua thực tiễn quá trình dạy học đồng thời thông qua việc tìm hiểu, điều tra từ giáo viên và học sinh ở các trường THPT trên địa bàn huyện Quảng Xương; tổng hợp các thông tin có được khi tìm hiểu trên các phương tiện thông tin đại chúng tôi nhận thấy trong việc dạy và học chủ đề hình học không gian tồn tại những thực trạng sau:

+ Đối với giáo viên:

- Nhiều giáo viên cảm thấy ít hứng thú khi dạy chủ đề hình học không gian dẫn đến chưa thực sự tìm tòi, đổi mới phương pháp dạy học phù hợp với đối tượng học sinh.

- Chưa phát huy hiệu quả tính chủ động, sáng tạo của học sinh. Ít khuyến khích học sinh tìm tòi, khám phá những cách giải mới.

- Chưa xây dựng được hệ thống bài tập đa dạng, phù hợp với từng đối tượng học sinh (chủ yếu các bài tập được lấy trong SGK).

+ Đối với học sinh:

- Đa số cảm thấy khó dẫn đến ngại, không hứng thú khi học hình học không gian. Cá biệt có nhiều đối tượng học sinh bỏ hẳn không học phần hình học không gian mà chỉ tập chung vào các chủ đề khác.

- Tư tưởng xem nhẹ chủ đề hình học không gian của nhiều học sinh xuất phát từ việc nhận thức chủ đề này chỉ chiếm một phần nhỏ trong các kì thi đại học, nhiều học sinh cho rằng có thể học tốt các chủ đề khác để khi thi sẽ bù cho chủ đề hình học không gian.

- Đa số học sinh chưa ý thức sâu sắc việc học tốt hình học không gian sẽ góp phần phát triển tư duy sáng tạo từ đó góp phần học tốt các chủ đề khác, các môn học khác.

- Đa số học sinh ít chủ động tư duy khi giải toán hình học không gian, một số nắm được các phương pháp giải toán hình học không gian nhưng sử dụng chưa linh hoạt, thiếu sáng tạo.

2.3. Các biện pháp giải quyết vấn đề.

Nhằm nâng cao kết quả học tập và góp phần phát triển tư duy sáng tạo cho học sinh thông qua dạy học chủ đề hình học không gian lớp 11 tôi đã thực hiện các nội dung chính như sau:

+ Công tác chuẩn bị:

- Đánh giá đối tượng học sinh; soạn bài; xây dựng hệ thống bài tập đa dạng nhưng phù hợp với nội dung chương trình và đối tượng học sinh.

- Ngoài các tiết dạy chính theo phân phối chương trình tùy theo mức độ nhận thức của học sinh để xây dựng kế hoạch dạy tự chọn, bồi dưỡng hay phụ đạo cho học sinh về chủ đề hình học không gian.

- Chuẩn bị các đồ dùng học tập cần thiết (các tài liệu, mô hình hình học, các phần mềm hỗ trợ dạy học hình học không gian....).

+ Tổ chức thực hiện:

- Dạy học theo chương trình, kế hoạch đã đề ra.

- Trang bị cho học sinh các phương pháp giải toán hình học không gian thông qua các bài tập, ví dụ điển hình.

- Đưa ra những bài tập ôn tập, các bài tập phát triển tư duy hình học phù hợp với đối tượng học sinh.

- Tích cực đổi mới phương pháp dạy học như: Tăng cường hoạt động theo nhóm, sử dụng các mô hình trực quan... Khuyến khích học sinh giải toán hình học không gian bằng nhiều cách. Đặt ra các câu hỏi, các vấn đề đòi hỏi học sinh phải tích cực tư duy để trả lời.

- Giao bài tập về nhà phù hợp với đối tượng học sinh, chú trọng các bài tập đòi hỏi học sinh phải chủ động và sáng tạo.

- Kiểm tra, đánh giá, phân loại học sinh bằng nhiều hình thức (cả định tính và định lượng).

Cụ thể trong quá trình dạy học chủ đề hình học không gian lớp 11 tôi đã xác định và thực hiện hiệu quả một số biện pháp sau đây:

2.3.1. Biện pháp 1: Vận dụng phương pháp tách các bộ phận phẳng ra khỏi không gian.

Khi giải quyết các bài toán hình học không gian học sinh gặp phải nhiều khó khăn hơn so với các bài toán hình học phẳng như: Việc tưởng tượng, hình dung để tìm các mối liên hệ giữa các yếu tố hình học (như quan hệ giữa các đường thẳng, mặt phẳng...); việc vẽ hình để biểu diễn hình không gian trong mặt phẳng... Khó khăn này sẽ ảnh hưởng đến việc vận dụng lí thuyết để giải quyết các bài toán hình học không gian. Để khắc phục khó khăn này việc tách các bộ phận phẳng ra khỏi không gian sẽ giúp học sinh quy một bài toán phức tạp về giải quyết bài toán đơn giản hơn, dễ hiểu và dễ thực hiện hơn.

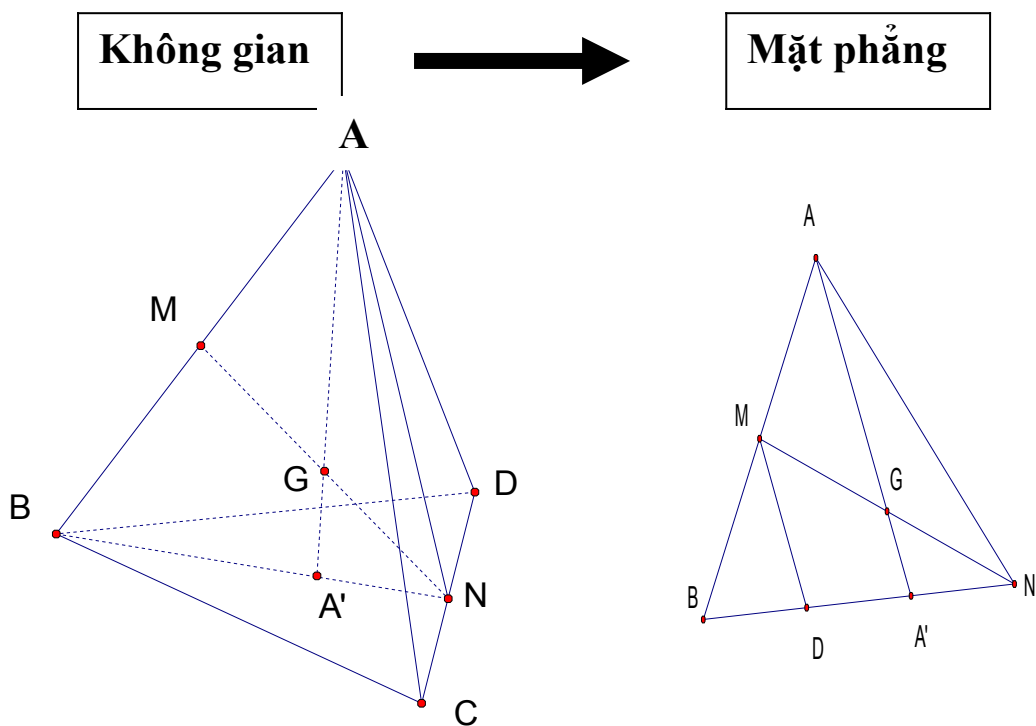
a) Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Cho tứ diện ABCD có trọng tâm G, AG cắt (BCD) tại A'. Chứng minh rằng A' là trọng tâm của tam giác BCD (Đường thẳng đi qua một đỉnh và trọng tâm của tứ diện đi qua trọng tâm của mặt đối diện với đỉnh ấy).

Định hướng phương pháp và lời giải:

Bằng việc bóc tách các yếu tố phẳng ra khỏi không gian, bài toán trên được chuyển thành bài toán hình học phẳng sau đây:

Cho tam giác ABN, M là trung điểm của AB, G là trung điểm của MN, AG cắt cạnh BN tại A'. Chứng minh rằng $BA' = 2 A'N$.



Bài toán này học sinh THCS có thể dễ dàng chứng minh được sau khi đã học tính chất đường trung bình. Cụ thể chứng minh như sau:

Kẻ đường thẳng qua M song song với AA' cắt BN tại D. MD; GA' lần lượt là đường trung bình của $\triangle ABA'$ và $\triangle NMD$ nên $BD = DA' = A'N$.

Vậy $BA' = 2A'N$.

Ví dụ 2: (SGK hình học 11 - Cơ bản) Cho hình hộp $ABCD A'B'C'D'$. Chứng minh đường thẳng AC' đi qua trọng tâm G của $\triangle BA'D$.

Định hướng phương pháp và lời giải:

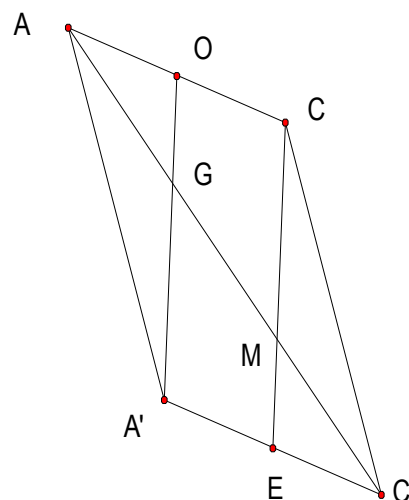
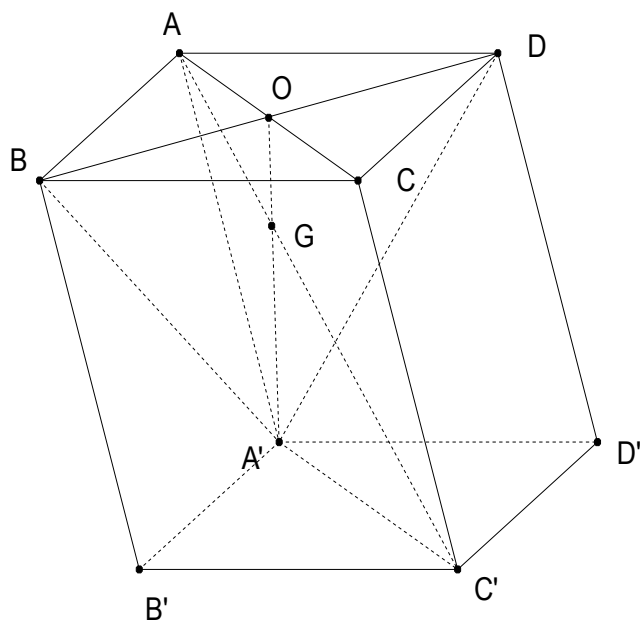
Bài toán sẽ trở nên đơn giản hơn, dễ hình dung, dễ giải quyết hơn nhiều nếu học sinh biết cách bóc tách các bộ phận phẳng ra khỏi không gian để đưa về bài toán hình học phẳng sau:

Cho hình bình hành $AA'C'C$, O là trung điểm cạnh AC, $A'O$ cắt cạnh AC' tại G. Chứng minh $C'G = 2AG$.

Không gian



Mặt phẳng



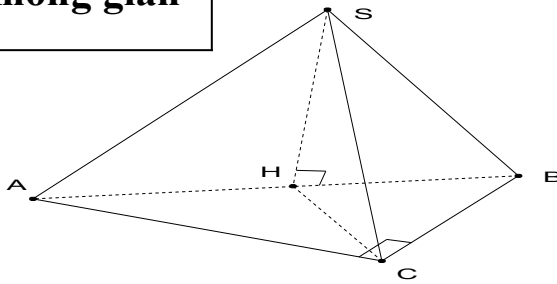
Chứng minh:

Gọi E là trung điểm $A'C'$ kẻ CE cắt AC' tại M. Dễ thấy $A'ECO$ là hình bình hành nên $CE \parallel A'O$. Vậy OG và EM lần lượt là đường trung bình của $\triangle ADC$ và $\triangle C'A'G \Rightarrow AG = GM = MC'$. (đpcm).

Ví dụ 3: Tứ diện SABC, có các cạnh bên tạo với mặt đáy góc α . Đáy $\triangle ABC$ vuông tại C, cạnh $AB = a$. Tính theo a bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

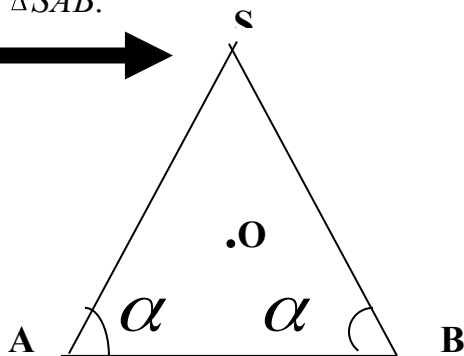
Định hướng phương pháp và lời giải: Gọi H là chân đường cao hạ từ S thì: $HA = HB = HC$, vì $\triangle ABC$ vuông tại C nên $\Rightarrow$ H là trung điểm AB.

Không gian



Đến đây học sinh có thể tính bán kính bằng cách sử dụng tính chất đồng dạng của tam giác. Tuy nhiên học sinh có thể giải quyết bài toán một cách đơn giản hơn nếu nhận thấy rằng tâm của mặt cầu cũng chính là tâm của đường tròn ngoại tiếp $\triangle SAB$, từ đó tách yếu tố phẳng ra khỏi không gian để đưa về giải bài toán phẳng đơn giản hơn như sau:

Tam giác SAB cân tại S, $AB = a$, góc $A = \alpha$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle SAB$.



Mặt phẳng

Bài toán phẳng trên được giải quyết dễ dàng khi sử dụng định lý hàm số Sin như sau: $\frac{AB}{\sin S} = 2R \Rightarrow R = \frac{a}{2\sin 2\alpha}$

b) Một số bài tập áp dụng.

Bài 1: (Trang 103 - Hình học 11 - Nâng cao)

Cho tứ diện OABC có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc.

a. Chứng minh tam giác ABC có ba góc nhọn.

b. Chứng minh rằng hình chiếu H của điểm O trên (ABC) trùng với trực tâm của tam giác ABC.

c. Chứng minh rằng $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.

Bài 2: Tính bán kính của một mặt cầu ngoại tiếp một hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng b.

Bài 3: Cho tứ diện OABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$. Gọi H là hình chiếu của O trên mặt phẳng (ABC). Tính diện tích các tam giác HAB, HBC và HCA.

c) Một số nhận xét.

+ Yếu tố cốt lõi để giải được các bài toán hình học không gian thường bị che khuất, khó phát hiện bởi hình không gian thường có nhiều đường phụ gây khó khăn cho học sinh trong việc hình dung, tưởng tượng. Vì vậy khéo léo bóc tách các yếu tố phẳng ra khỏi không gian sẽ giúp học sinh đơn giản hóa bài toán, dễ dàng tìm ra yếu tố then chốt của bài toán từ đó giải toán dễ dàng hơn.

+ Hoạt động tách bộ phận phẳng ra khỏi không gian có những ý nghĩa cụ thể đó là:

- Xác lập liên hệ giữa hình học không gian và hình học phẳng.
- Kết nối dạy học toán THCS và THPT.
- Xác lập liên hệ liên môn, liên hệ bên trong của môn toán.
- Nâng cao hiệu quả hoạt động giải toán hình học không gian từ đó góp phần phát triển tư duy sáng tạo cho học sinh.

2.3.2. Biện pháp 2: Vận dụng phương pháp trải hình.

Nhiều bài toán hình học không gian được giải quyết dễ dàng bằng cách đưa về giải bài toán hình học phẳng thông qua hoạt động trải hình (hay khai triển hình). Đây là hoạt động khai triển các yếu tố không gian lên trên cùng một mặt phẳng, chuyển bài toán không gian về bài toán hình học phẳng, gắn kết bài toán phẳng và bài toán không gian.

a) Các ví dụ minh họa:

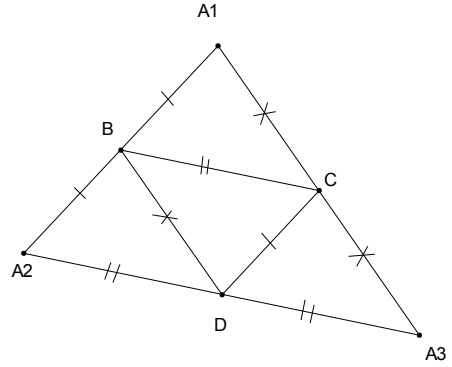
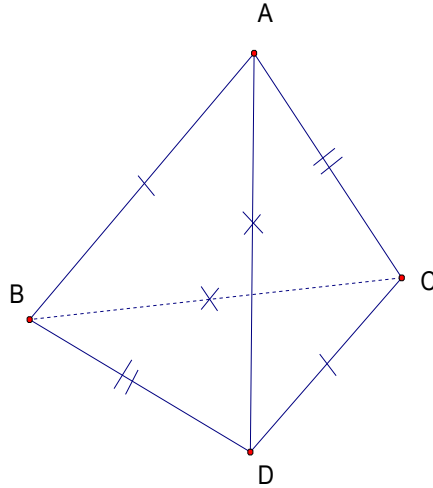
Ví dụ 4: Chứng minh trong một tứ diện có các cặp cạnh đối đôi một bằng nhau (tứ diện gần đều) thì các góc tam diện tại mỗi đỉnh có tổng các góc phẳng bằng 180° .

Định hướng phương pháp và lời giải:

Ta trải các tam giác ABC, ABD, DCD lên mặt phẳng (BCD) sao cho điểm A của $\triangle ABC$ nằm ở vị trí của điểm A và không thuộc nửa mặt phẳng chứa D có bờ BC; tương ứng điểm A của $\triangle ABD$ nằm ở vị trí điểm A_2 ; điểm A của $\triangle ACD$ nằm ở vị trí điểm A_3 .

Khi đó $BA_1 = BA_2 = CD$; $BC = DA_2 = DA_3$ và $BD = CA_1 = CA_3$ nên các tứ giác $BCDA_2$; $DBCA_3$ là các hình bình hành $\Rightarrow BC // DA_2$; $BC // DA_3 \Rightarrow A_2$; D; A_3 thẳng hàng. Tương tự A_1 ; B; A_2 và A_1 ; C; A_3 thẳng hàng
 $\Rightarrow$

$$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = 180 \Rightarrow \text{đpcm.}$$



Ví dụ 5: Cho hình lập phương $ABCA_1B_1C_1D_1$ cạnh a , M ; N lần lượt thuộc các cạnh AD ; BB_1 sao cho $AM = BN$. Gọi I ; J lần lượt là trung điểm của AB ; C_1D_1 .

a/ Chứng minh IJ cắt và vuông góc với MN tại trung điểm của MN .

b/ Dựng thiết diện của lập phương tạo bởi mặt phẳng chứa MN ; IJ . Tìm vị trí của M , N sao cho thiết diện có chu vi bé nhất.

Định hướng phương pháp và lời giải:

a/ Kéo dài IN cắt AA_1 tại K , ta có $AK = BN \Rightarrow AK = AM \Rightarrow$

$MK \parallel AD_1$. Vì $IJ \parallel AD_1 \Rightarrow IJ \parallel KM$, vậy IJ là đường trung bình của $\Delta NKM \Rightarrow IJ$ cắt MN tại trung điểm của MN .

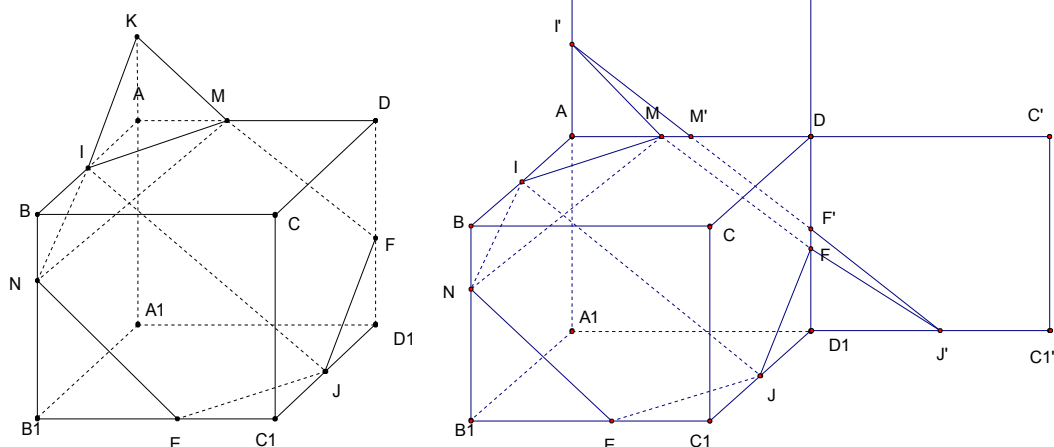
Mặt khác tam giác MIN cân tại I ($IM = IN$) nên IJ vuông góc với MN .

$\Rightarrow$ đpcm

b/ Dễ thấy thiết diện cần tìm là lục giác $IMFJEN$ trong đó E ; F lần lượt thuộc DD_1 ; B_1C_1 sao cho $MF \parallel AD_1$; $NE \parallel BC_1$. Khi đó $MF \parallel IJ \parallel NE$ và $FD_1 = EC_1 = BN = AM = x$ ($0 < x < a$).

Khi đó chu vi của thiết diện $= 2(IM + MF + FJ)$. Tìm vị trí của M , N để chu vi thiết diện bé nhất ta có thể tính chu vi theo x và đưa bài toán hình học về bài toán giải tích. Tuy nhiên cách làm này tương đối phức tạp, bài toán có thể được giải theo cách đơn giản hơn thông qua hoạt động trải hình cụ thể như sau:

Ta trải các mặt $ABCD$ và DCC_1D_1 lên mặt phẳng (ADD_1A_1) sao cho các điểm B , C , I của mặt $ABCD$ lần lượt nằm ở vị trí các điểm B' , C' , I' và không cùng thuộc nửa mặt phẳng chứa D_1 , A_1 có bờ AD . Tương tự các điểm C , C_1 , J lần lượt nằm ở vị trí các điểm C' , C_1' , J' .



Khi đó việc giải bài toán không gian được quy về giải bài toán hình học phẳng như sau:

Gọi chu vi của thiết diện là P , ta có: $P = 2(I'M + MF + F'J')$. Vì vậy để P bé nhất ta tìm vị trí của M, F sao cho $I'M + MF + F'J'$ bé nhất, dễ thấy khi đó M trùng với M' và F trùng với F' ($M'; F'$ lần lượt là giao điểm của $I'J'$ với AD và DD_1) $\Rightarrow P$ bé nhất $\Leftrightarrow M, N$ lần lượt là trung điểm của $AD; BB_1$.

b) Một số bài tập áp dụng:

Bài 1: Chứng minh tổng các góc phẳng của một hình chóp lớn hơn 180° thì mỗi cạnh bên của nó nhỏ hơn nửa chu vi đáy.

Bài 2: Cho tứ diện gần đều $ABCD$ có $AB = CD = a; AC = BD = b; AD = BC = c$. Xác định vị trí của điểm M trên cạnh AB sao cho chu vi tam giác MCD nhỏ nhất. Xác định giá trị nhỏ nhất của chu vi đó.

Bài 3: Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh bằng a . Một mặt phẳng cắt 4 cạnh của tứ diện lần lượt tại M, N, P, Q . Chứng minh rằng chu vi p của thiết diện $MNPQ$ không nhỏ hơn $2a$ và không lớn hơn $3a$.

Bài 4: Tứ diện $ABCD$ có: $AC = AD = BC = BD = 1; AB = a; CD = b$; M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Tìm trên cạnh AD một điểm P sao cho $PM + PN$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó.

c) Nhận xét:

+ Phương pháp trải hình được vận dụng nhiều trong các bài toán xác định vị trí của một điểm; các bài toán cực trị hình học.

+ Có thể giải các bài toán trên bằng cách khác tuy nhiên đơn giản và hiệu quả nhất vẫn là vận dụng phương pháp trải hình.

+ Việc biết cách vận dụng phương pháp trải hình sẽ giúp học sinh giải được nhiều bài toán hình không gian hay và khó từ đó giúp học sinh rèn luyện và phát triển tư duy sáng tạo.

2.3.3. Biện pháp 3: Vận dụng phương pháp sử dụng tính bất biến của phép chiếu song song.

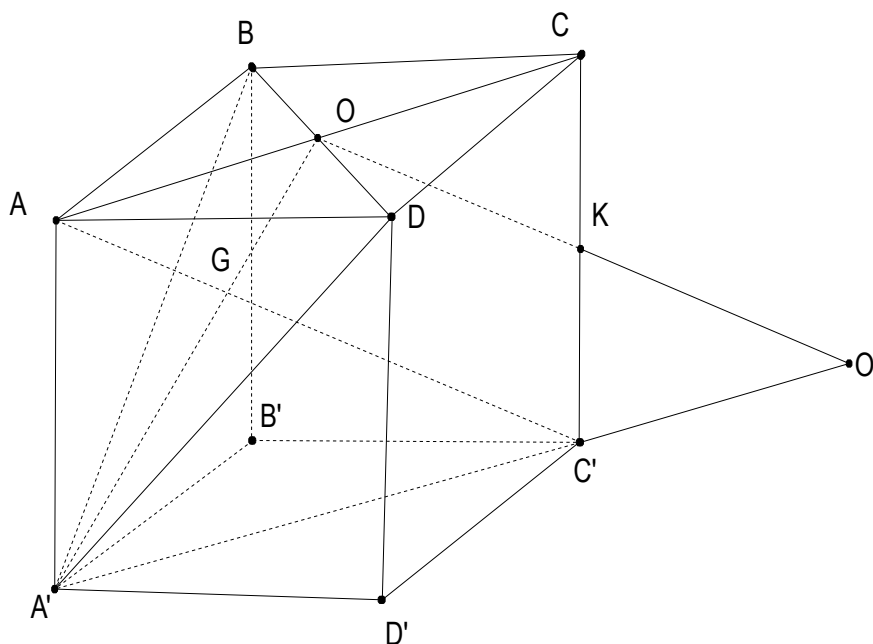
Nhiều bài toán hình học đặc biệt là bài toán hình không gian dễ dàng giải quyết được thông qua hoạt động sử dụng tính bất biến của phép chiếu song song.

a) Các ví dụ minh họa:

Ví dụ 6: Cho hình lập phương $ABCD A'B'C'D'$. Chứng minh các đỉnh A , C' và trọng tâm G của $\triangle BDA'$ thẳng hàng.

Định hướng phương pháp và lời giải:

Hướng 1:

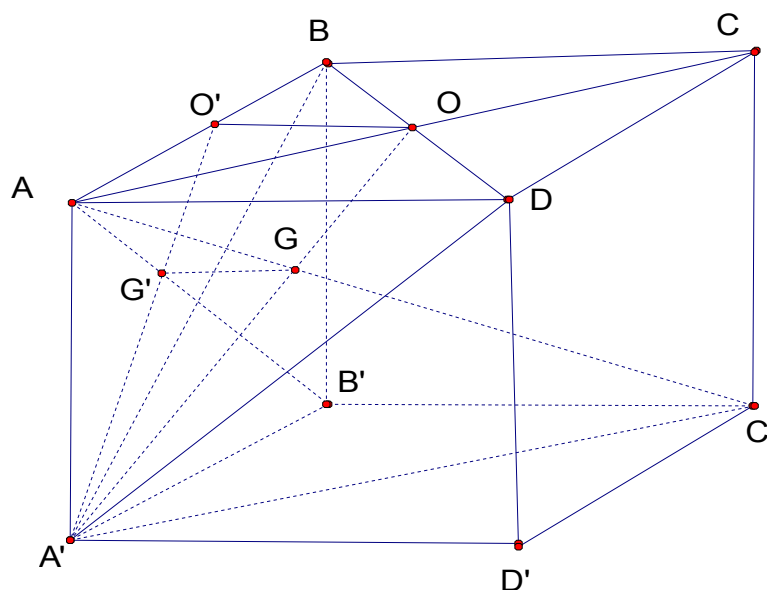


Xét phép chiếu S lên mặt phẳng $(A'B'C'D')$ theo phương AC' .

Khi đó phép chiếu S biến A thành C' , biến C' thành C' , biến O thành O' . Ta có $OO' \parallel AC'$, O' thuộc $(A'B'C'D')$ nên O' là giao của OK và $A'C'$.

$\Rightarrow \frac{A'G}{A'O} = \frac{A'C'}{A'O'} \Rightarrow C'$ là ảnh của G qua phép chiếu $S \Rightarrow A, G, C'$ thẳng hàng.

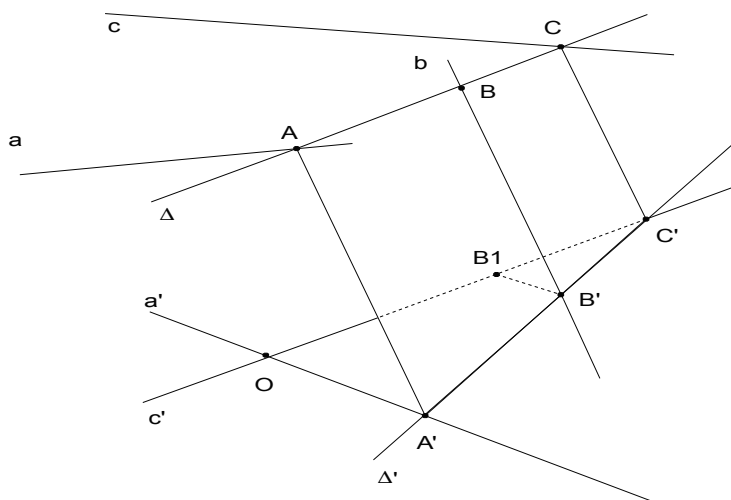
Hướng 2:



Xét phép chiếu lên $(AA'B'B)$ theo phương AD biến A thành A , biến C' thành B' , biến O thành O' là trung điểm AB , biến G thành G' . Vì tỉ số 2 đoạn thẳng cùng phương được bảo toàn qua phép chiếu song song nên $\frac{A'G'}{G'O'} = \frac{A'G}{GO} = 2$
 $\Rightarrow G'$ là giao của AB' và $A'O'$ vậy ảnh của A, G, C' thẳng hàng. Tương tự xét phép chiếu lên $(A'B'C'D')$ theo phương AA' thì ảnh của A, G, C' thẳng hàng $\Rightarrow A, G, C'$ thẳng hàng.

Ví dụ 7: Cho ba đường thẳng a, b, c đôi một chéo nhau, hãy dựng đường thẳng Δ cắt ba đường thẳng đó lần lượt tại A, B, C sao cho $\frac{BA}{BC} = m$ cho trước.

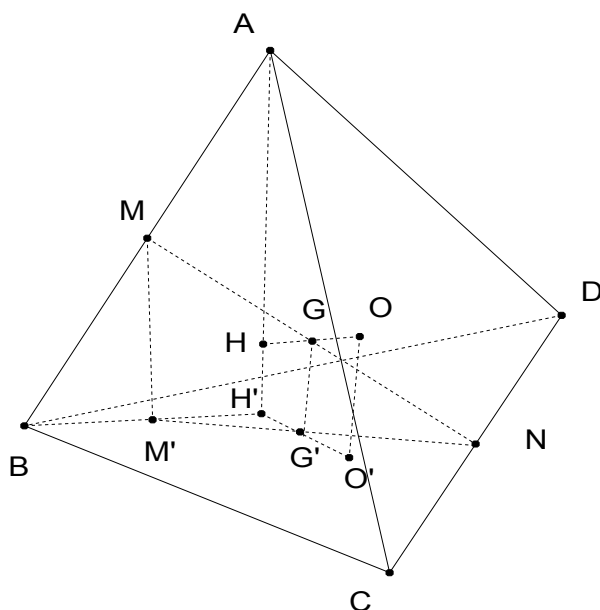
Định hướng và lời giải: Chọn mặt phẳng (P) sao cho b cắt (P) tại B' và phép chiếu song song theo phương b lên mặt phẳng (P) biến a, c lần lượt thành a', c' cắt nhau tại O . Từ B' vẽ đường thẳng song song với a' cắt c' tại B_1 , trên c' ta luôn tìm được duy nhất điểm C' sao cho $\frac{B_1O}{B_1C'} = m$.



Đường thẳng $C'B'$ cắt a' tại $A' \Rightarrow \frac{B'A'}{B'C'} = \frac{B_1O}{B_1C'} = m$. Gọi A, C lần lượt thuộc a, c sao cho ảnh của A, B qua phép chiếu song song theo phương b lên mặt phẳng (P) lần lượt là $A', C' \Rightarrow AA' // b; CC' // b$ nên đường thẳng Δ qua A, C cắt b tại B . Khi đó theo định lý Talet $\frac{BA}{BC} = \frac{B'A'}{B'C'} = m$. Vậy Δ là đường thẳng cần tìm.

Ví dụ 8. Chứng minh rằng trong một tứ diện trực tâm (các cặp cạnh đối đôi một vuông góc) ba điểm sau đây thẳng hàng: Trọng tâm G , trực tâm H và tâm mặt cầu ngoại tiếp O thẳng hàng.

Định hướng phương pháp giải:

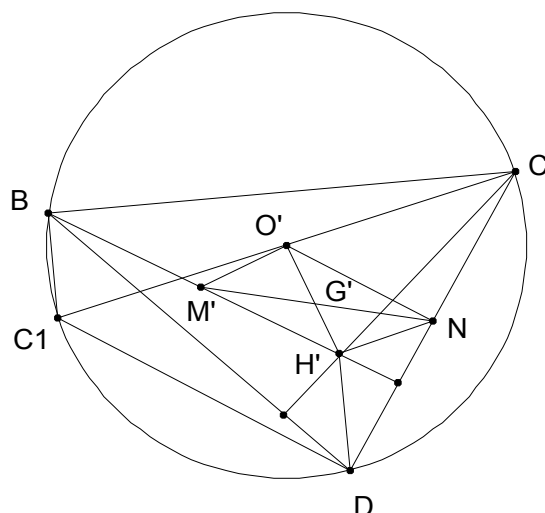


Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB, CD . Xét phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (BCD) , biến các điểm B, C, D, N thành chính nó; biến A, H thành H' ; biến các điểm M, G, O thành M', G', O' .

Khi đó O' là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle BCD$. Ta có $AB \perp CD$ ($ABCD$ là tứ diện trực tâm) và $AH' \perp CD$ nên $BH' \perp CD$ (định lý 3 đường vuông góc), tương tự $CH' \perp BD$ vậy H' là trực tâm của $\triangle BCD$. Theo tính chất phép chiếu vuông góc thì M' là trung điểm BH' và G' là trung điểm của $M'N$. Để chứng minh H, G, O thẳng hàng ta cần chứng minh H', G', O' thẳng hàng. Tuy nhiên đến đây đối với học sinh việc chứng minh này không hề đơn giản. Nhận thấy các điểm M', H', G', O' đều thuộc mặt phẳng (BCD) nên ta có thể bóc tách các yếu tố phẳng ra khỏi không gian để đơn giản hóa bài toán bằng cách đưa bài toán trên về giải bài toán phẳng như sau:

Bài toán: “Cho $\triangle BCD$ và H', O' lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác. M', N lần lượt là trung điểm của BH', CD ; G' là trung điểm của $M'N$. Chứng minh ba điểm H', G', O' thẳng hàng”.

Đến đây học sinh hoàn toàn có thể giải bài toán trên bằng cách sử dụng các tính chất hình học đã học ở THCS. Cụ thể lời giải như sau:



C_1C là đường kính của đường tròn ngoại tiếp $\triangle BCD$ khi đó ta có:

$C_1B \perp BC$ và $DH' \perp BC$ nên $C_1B \parallel DH'$, tương tự $C_1D \perp CD$ và $BH' \perp CD$ nên $C_1D \parallel BH' \Rightarrow BC_1DH'$ là hình bình hành $\Rightarrow C_1D = BH' = 2O'N$. Mặt khác $BH' = 2M'H' \Rightarrow M'H' = O'N$, vì $BH' \perp CD$ và $O'N \perp CD$ nên $M'H' \parallel O'N \Rightarrow M'H'NO'$ là hình bình hành, từ đó do G' là trung điểm $M'N$ nên suy ra G' cũng là trung điểm của $O'H'$ vậy O', G', H' thẳng hàng.

Đến đây bài toán phẳng đã được chứng minh bằng việc sử dụng tính chất hình học phẳng. Trở lại bài toán ban đầu, tương tự thực hiện phép chiếu vuông góc lên (ACD) biến O, G, H thành O', G', H' thẳng hàng. Vậy áp dụng tính chất phép chiếu vuông góc ta có O, G, H thẳng hàng.

b) Một số bài tập áp dụng:

Bài 1 (Bài tập Hình học 11 - Nâng cao - Trang 62).

Cho hình hộp $ABCD A'B'C'D'$.

a/ Hãy xác định đường thẳng d cắt cả hai đường thẳng AC' và BA' đồng thời song song với $B'D'$

b/ Gọi I, J lần lượt là giao điểm của d với AC' và BA' . Tính tỉ số $\frac{AI}{AC'}$

Bài 2: Cho ba đường thẳng đôi một chéo nhau không cùng song song với một mặt phẳng và một điểm G không nằm trên bất cứ đường thẳng nào trong ba đường thẳng đó. Hãy dựng tam giác có các đỉnh thứ tự nằm trên ba đường thẳng đã cho và nhận G làm trọng tâm.

c) Nhận xét:

+ Có thể giải các bài toán trên bằng sử dụng các tính chất khác của quan hệ song song, quan hệ vuông góc tuy nhiên khi đó bài toán sẽ phức tạp hơn nhiều so với dùng các tính chất của phép chiếu song song.

+ Để giải một bài toán hình học không gian thường phải kết hợp nhiều phương pháp (chẳng hạn kết hợp cả phương pháp sử dụng phép chiếu song song và phương pháp bóc tách các bộ phận phẳng ra khỏi không gian).

+ Việc đơn giản hóa bài toán; giải bài toán bằng những cách giải hay, ngắn gọn; giải toán bằng nhiều cách sẽ giúp nhiều cho học sinh phát triển tư duy sáng tạo của mình.

2.3.4. Biện pháp 4: Vận dụng phương pháp chuyển đổi ngôn ngữ.

Việc vận dụng các hoạt động chuyển đổi ngôn ngữ vào học toán nói chung, giải bài tập hình học nói riêng là việc làm có nhiều tác dụng thiết thực, là công cụ hiệu quả để học sinh giải quyết được nhiều bài toán từ đó nâng cao hiệu quả hoạt động nhận thức toán học. Chuyển đổi ngôn ngữ trong toán học đóng vai trò là một công cụ để học sinh đơn giản hóa bài toán, chuyển đổi yếu tố phức tạp sang yếu tố đơn giản, biến vấn đề chưa biết thành vấn đề đã biết, hướng việc tìm hiểu yếu tố toán học này sang tìm hiểu yếu tố toán học khác. Đối với hình học không gian các dạng chuyển đổi ngôn ngữ chủ yếu như sau:

+ Chuyển đổi từ ngôn ngữ hình học sang ngôn ngữ khác:

Việc chuyển đổi này có thể là chuyển hóa sự phạm từ ngôn ngữ khoa học sang ngôn ngữ toán học phổ thông (chẳng hạn chuyển đổi ngôn ngữ từ toán học cao cấp sang ngôn ngữ toán phổ thông) hoặc chuyển đổi ngôn ngữ của hình học tổng hợp sang ngôn ngữ vec tơ, tọa độ, biến hình, đại số...

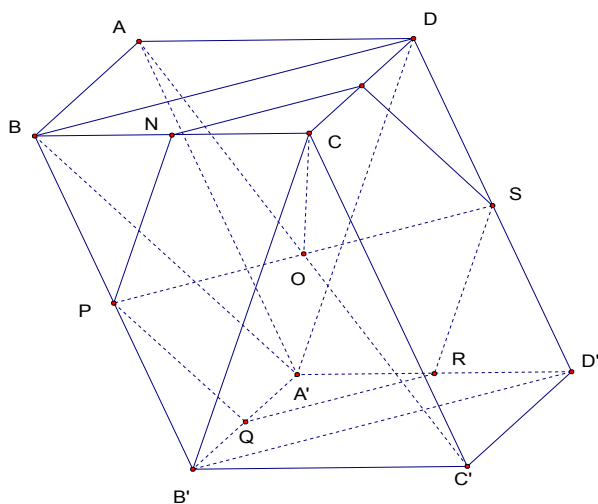
+ Chuyển đổi từ ngôn ngữ hình học này sang ngôn ngữ hình học khác.

Việc huy động các nhóm tri thức khác nhau có nhiều ý nghĩa thiết thực để giải các bài toán hình học. Để huy động được các kiến thức đó cần thiết phải chuyển hóa qua lại các yếu tố bên trong như: yếu tố vuông góc chuyển hóa sang yếu tố song song, phép biến hình này chuyển hóa sang phép biến hình khác....

a) Các ví dụ áp dụng:

Ví dụ 9: Cho hình lập phương ABCDA'B'C'D' có tâm O. Dựng thiết diện của hình lập phương tạo bởi mặt phẳng (P) qua O và mặt phẳng đó vuông góc với AC'.

Định hướng và lời giải bài toán:



Nhận thấy $AC' \perp (BDA')$ nên $AC' \perp (P) \Rightarrow (P) \parallel (BDA')$. Từ đó ta chuyển bài toán với yếu tố vuông góc thành bài toán với yếu tố song song như sau: Dựng thiết diện của hình lập phương bởi mặt phẳng (P) qua O và $\parallel (BDA')$. Khi

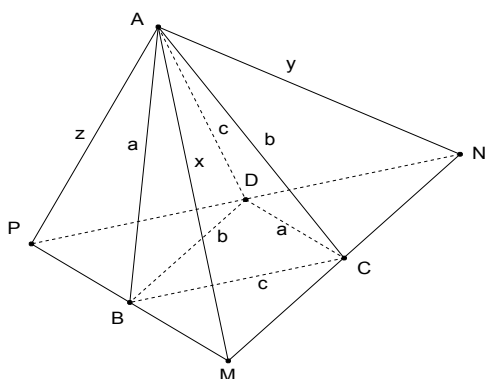
đó áp dụng tính chất “ Hai mặt phẳng song song cắt mặt phẳng thứ ba theo hai giao tuyến phân biệt thì hai giao tuyến đó song song ” ta dễ thấy thiết diện cần tìm là lục giác MNPQRS trong đó M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của CD, BC, BB', A'B', A'D', DD'.

Ví dụ 10: Tính thể tích của tứ diện ABCD biết $AB = CD = a$, $AC = BD = b$, $AD = BC = c$ (Tứ diện gần đều)

Định hướng và lời giải bài toán:

Nhận thấy việc tính thể tích theo phương pháp thông thường là tính diện tích đáy và chiều cao rất khó thực hiện với bài toán trên bởi vì rất khó xác định chân đường cao hạ từ một đỉnh của tứ diện. Bài toán trên sẽ dễ dàng giải được nếu thực hiện các phép chuyển đổi sau:

Hướng 1: Từ B, C, D ta lần lượt vẽ các đường thẳng song song với CD, BD, BC. Các đường thẳng này đôi một cắt nhau tại M, N, P.



Ta có $AB = CD = BM = BP$ nên $\triangle AMP$ vuông tại A, tương tự các tam giác AMN, ANP cũng vuông tại A.

$$V_{APMN} = \frac{1}{6} xyz \Rightarrow V_{ABCD}$$

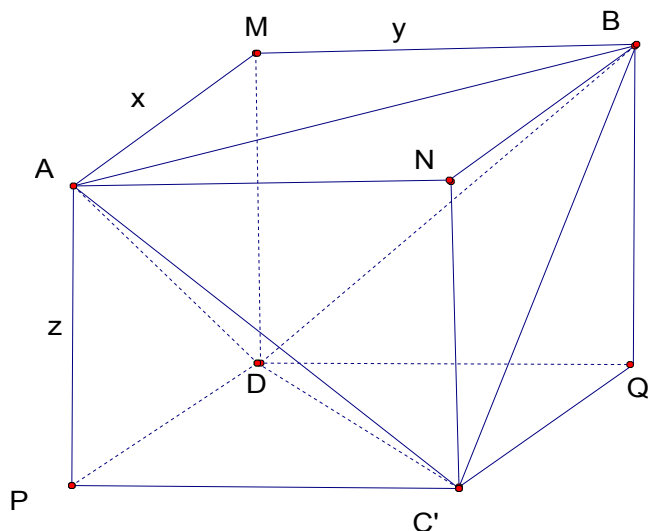
$$= \frac{1}{4} V_{APMN} = \frac{1}{24} xyz. \text{ Tính } x, y, z \text{ theo } a, b, c$$

Ta có:

$$\begin{cases} x^2 = a^2 + b^2 - c^2 \\ y^2 = a^2 + c^2 - b^2 \\ z^2 = b^2 + c^2 - a^2 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } V = \frac{\sqrt{2}}{12} \sqrt{(a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)}$$

Hướng 2: Qua mỗi cạnh của hình chóp ta dựng mặt phẳng song song với cạnh đối diện, các mặt phẳng này giao nhau tạo thành hình hộp ngoại tiếp tứ diện.



$$V_{ABCD} = V_{\text{hộp}} - 4 V_{MADB} = xyz - 4 \cdot \frac{1}{6} xyz = \frac{1}{3} xyz$$

Ta tính x, y, z theo a, b, c và được kết quả như hướng 1.

b) *Bài tập áp dụng:*

Bài 1: Cho tứ diện ABCD. Lấy các điểm M, N, P, Q lần lượt thuộc AB, BC, CD, DA sao cho $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BN} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{DP} = k \overrightarrow{DC}$. Hãy xác định k để bốn điểm P, Q, M, N cùng nằm trong một mặt phẳng.

Bài 2: Cho hình hộp ABCDA'B'C'D'. Một đường thẳng d cắt các đường thẳng AA', BB', CC' lần lượt tại M, N, P sao cho $\overrightarrow{NM} = 2\overrightarrow{NP}$. Tính $\frac{MA}{MA'}$.

c) *Một số nhận xét.*

+ Phương pháp chuyển đổi ngôn ngữ có phạm vi rộng, được áp dụng nhiều trong giải toán hình học không gian.

+ Việc vận dụng tốt phương pháp chuyển đổi ngôn ngữ sẽ giúp học sinh linh hoạt chuyển hóa các yếu tố hình học để biến cái phức tạp thành cái đơn giản, cái chưa biết thành cái đã biết từ đó góp phần phát triển tư duy sáng tạo.

2.4. Kết quả thực nghiệm của đề tài:

Tôi đã sử dụng đề tài nghiên cứu trên vào quá trình dạy học và đã đạt được những kết quả tích cực ở cả hai mặt định tính và định lượng, cụ thể như sau:

2.4.1. Kết quả định tính.

+ Nhiều học sinh không còn có tâm lí ngại hoặc sợ học chủ đề hình học không gian.

+ Học sinh chủ động, tích cực hơn khi xây dựng bài, chữa bài tập và làm bài tập về nhà.

+ Nhiều học sinh tích cực tư duy để giải bài toán hình học không gian một cách sáng tạo, giải bằng nhiều cách.

+ Học sinh linh hoạt hơn khi vận dụng kiến thức bộ môn, liên môn để giải toán hình học không gian.

+ Các tiết học hình học không gian hiệu quả hơn và đã chuyển trọng tâm từ hoạt động của thầy sang hoạt động của trò.

2.4.2. Kết quả định lượng.

** Qua điều tra, thăm dò.*

Tôi đã phát phiếu thăm dò 95 học sinh lớp 11 - trường THPT Quảng Xương 2 và đã thu được kết quả:

+ 100% học sinh được hỏi trả lời vận dụng các phương pháp giải toán hình học nêu trên giúp các em dễ hiểu khi học và giải toán hình học không gian.

+ 100% học sinh được hỏi vận dụng các phương pháp trên đây giúp các em có nhiều hứng thú, niềm tin khi giải các bài tập hình học không gian.

+ 90 % học sinh được hỏi trả lời cần thiết phải sử dụng các phương pháp này khi giải toán hình học không gian.

** Qua kết quả bài kiểm tra:*

Trong quá trình thực nghiệm nhằm đánh giá hiệu quả của đề tài tôi đã tiến hành tại lớp 11C2 và lớp 11C8 - Trường THPT Quảng Xương 2. Kết quả học tập môn Toán của hai lớp là tương đương (đánh giá qua quá trình trực tiếp giảng dạy). Cụ thể tôi tiến hành dạy ôn tập chủ đề tự chọn (3 tiết) và ôn tập chương II (Hình học lớp 11- cơ bản) cho hai lớp 11C2 và 11C8. Tôi chọn lớp 11C2 làm lớp dạy học thực nghiệm (sử dụng đề tài), lớp 11C8 làm lớp dạy học đối chứng (không sử dụng đề tài). Sau khi dạy thực nghiệm và đối chứng tôi tiến hành cho học sinh hai lớp làm bài kiểm tra 45 phút và đã thu được kết quả thống kê theo bảng sau:

Lớp	Số số	Giỏi		Khá		Trung bình		Yếu		Kém	
		SL	%	SL	%	SL	%	SL	%	SL	%
11 C2	47	15	32	23	49	7	14,9	2	4,1	0	0
11C8	48	12	25	25	52	8	16,7	3	6,3	0	0

Quá trình thực nghiệm với những kết quả trên đây bước đầu có thể thấy hiệu quả thiết thực của việc vận dụng đề tài vào thực tiễn dạy học. Những lí luận và giải pháp mà đề tài nêu ra mang tính khả thi và có thể áp dụng trong dạy học môn Toán lớp 11 chủ đề hình học không gian.

PHẦN 3. KẾT LUẬN VÀ ĐỀ XUẤT

3.1. Kết luận:

Bản thân người viết là một giáo viên dạy Toán, đã ý thức được trách nhiệm của mình trong việc không ngừng tìm tòi đổi mới phương pháp dạy học nhằm nâng cao kết quả hoạt động học tập của học sinh, tôi đã áp dụng đề tài vào thực tiễn dạy học và đạt được những kết quả tích cực. Những kết quả đó cũng chính là cơ sở để tôi hoàn thành đề tài này.

Trên cơ sở vận dụng các tri thức khoa học kết hợp với kiến thức thực tiễn dạy học của bản thân, sau thời gian tập trung, nỗ lực nghiên cứu đề tài đã hoàn thành và đạt được những kết quả sau:

- + Đề tài đã nghiên cứu một số cơ sở lí luận của việc vận dụng phương pháp giải toán hình học không gian và ý nghĩa của nó đối với việc phát triển tư duy sáng tạo cho học sinh THPT.

- + Đề tài đã đi sâu khai thác một số phương pháp giải toán hình học không gian có tác dụng rất hiệu quả và thiết thực trong việc nâng cao chất lượng học tập và phát triển tư duy sáng tạo cho học sinh THPT.

- + Đề tài đã đưa ra các ví dụ minh họa cho các phương pháp giải toán hình học không gian. Thông qua các ví dụ này nêu bật lên ý nghĩa của các phương pháp này với việc dạy học hình học nói riêng, toán học nói chung.

3.2. Kiến nghị:

- Do thời gian dành cho nghiên cứu có hạn, năng lực bản thân còn hạn chế, các thực nghiệm sư phạm chưa nhiều, cần tiếp tục triển khai thực nghiệm trên nhiều đối tượng HS khác nhau và mong đồng nghiệp góp ý, bổ sung thêm các dạng bài tập cho đề tài phong phú hơn

- Có thể áp dụng phương pháp này cho công tác bồi dưỡng học sinh giỏi và luyện thi đại học.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

XÁC NHẬN CỦA THỦ TRƯỞNG ĐƠN VỊ

Thanh Hóa, ngày 15 tháng 5 năm 2016
Tôi xin cam đoan đây là SKKN của mình viết, không sao chép nội dung của người khác.

Đỗ Thị Thủy

Tài liệu tham khảo

1. Nguyễn Bá Kim (2004), *Phương pháp dạy học môn Toán*, Nxb Đại học sư phạm.
2. Đào Tam (2008), *Phương pháp dạy học hình học ở trường THPT*, NXB ĐHSP.
3. Bùi Văn Nghị (2009), *Vận dụng lí luận vào thực tiễn dạy học môn toán ở trường phổ thông*, Nxb Đại học sư phạm.
4. Pôlya. G (1976), *Toán học và những suy luận có lý*, Nxb Giáo dục.
5. Đoàn Quỳnh, Nguyễn Xuân Liêm, Nguyễn Khắc Minh, Đặng Hùng Thắng (2007), *Hình học 11 nâng cao*, Nxb Giáo dục.
6. Đoàn Quỳnh, Văn Như Cương, Phạm Khắc Ban, Tạ Mân (2007), *Bài Tập Hình học 11 nâng cao*, Nxb Giáo dục.
7. Trần Văn Hạo, Nguyễn Mộng Hy, Khu Quốc Anh, Nguyễn Hà Thanh, Phan Văn Viện, *Hình học 11*, NXB Giáo dục
8. Trần Văn Hạo, Nguyễn Mộng Hy, Khu Quốc Anh, Nguyễn Hà Thanh, Phan Văn Viện, *Bài tập Hình học 11*, NXB Giáo dục
9. Phan Huy Khải (1999), *Toán nâng cao hình học 11*, NXB ĐHQG Hà Nội.
10. Đào Tam, Trần Trung (2010), *Tổ chức hoạt động nhận thức trong dạy học môn Toán ở trường THPT*, Nxb Đại học sư phạm.
11. Bùi Văn Nghị (2008), *Phương pháp dạy học những nội dung cụ thể môn toán*, NXB ĐHSP