Nguyễn Hữu Điển

OLYMPIC TOÁN NĂM 1997-1998
51 ĐỀ THI VÀ LỜI GIẢI
(Tập 4)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

Lời nói đầu

Để thử gói lệnh lamdethi.sty tôi biên soạn một số đề toán thi Olympic, mà các học trò của tôi đã làm bài tập khi học tập LaTeX. Để phục vụ các bạn ham học toán tôi thu thập và gom lại thành các sách điện tử, các bạn có thể tham khảo. Mỗi tập tôi sẽ gom khoảng 51 bài với lời giải.

Rất nhiều bài toán dịch không được chuẩn, nhiều điểm không hoàn toàn chính xác vậy mong bạn đọc tự ngẫm nghĩ và tìm hiểu lấy. Nhưng đây là nguồn tài liệu tiếng Việt về chủ đề này, tôi đã có xem qua và người dịch là chuyên về ngành Toán phổ thông. Bạn có thể tham khảo lại trong [1].

Rất nhiều đoạn vì mới học TeX nên cấu trúc và bố trí còn xấu, tôi không có thời gian sửa lại, mong các bạn thông cảm.

Hà Nội, ngày 2 tháng 1 năm 2010

Nguyễn Hữu Điển

$\frac{51}{\text{GD-05}}$89/176-05 Mã số: 8I092M5

Mục lục

Chương 1

Đề thi olympic Austria

▷**1.1**. *Giải hệ phương trình với x, y là số thực*

$$\begin{cases} (x-1)(y^2+6) = y(x^2+1), \\ (y-1)(x^2+6) = x(y^2+1) \end{cases}$$

Lời giải: Ta cộng hai phương trình trên cho nhau. Sau khi rút gọn và đưa về bình phương của một hiệu ta được phương trình sau
$(x-\frac{5}{2})^2 + (y-\frac{5}{2})^2 = \frac{1}{2}$
Chúng ta lại trừ hai phương trình cho nhau, trừ phương trình thứ hai cho phương trình thứ nhất và nhóm lại, ta có:

$$\begin{aligned} xy(y-x) + 6(x-y) + (x+y)(x-y) = &\quad xy(x-y) + (y-x) \\ (x-y)(-xy+6+(x+y)-xy+1) = &\quad 0 \\ (x-y)(x+y-2xy+7) = &\quad 0 \end{aligned}$$

Do vậy, hoặc $x-y=0$ hoặc $x+y-2xy+7=0$. Cách duy nhất để có $x-y=0$ là với $x=y=2$ hoặc $x=y=3$ (tìm được bằng cách giải phương trình (1)) với phép thế $x=y$
Bây giờ, ta xét trường hợp $x \neq y$ sẽ được giải để $x+y-2xy+7=0$. Phương trình này là tương đương với phương trình sau(được suy ra từ cách sắp xếp

lại các số hạng và thừa số)
$(x-\frac{1}{2})(y-\frac{1}{2})=\frac{15}{4}$
Giả sử, chúng ta có thể giải phương trình (1) và (2) một cách đồng thời. Đặt $a=x-\frac{5}{2}$ và $b=y-\frac{5}{2}$. Do đó, phương trình (1)) tương đương với
$a^2+b^2=\frac{1}{2}$
và phương trình (2) tương đương với:

$$(a+2)(b+2)=\frac{15}{4}\Rightarrow ab+2(a+b)=\frac{1}{4}\rightarrow 2ab+4(a+b)=\frac{-1}{2}$$

Cộng phương trình (4) và (3) chúng ta thấy:
$(a+b)^2+4(a+b)=0\rightarrow a+b=0,-4$
Lấy phương trình (4) trừ (3) ta thấy:
$(a-b)^2-4(a+b)=1$
Nhưng bây giờ chúng ta thấy rằng ,nếu $a+b=-4$ thì phương trình (6) sẽ bị sai; Do đó, $a+b=0$. Thế $a+b=0$ vào phương trình (6) chúng ta thu được:
$(a-b)^2=1\rightarrow a-b=\pm 1$
Vì từ phương trình (5) chúng ta có $a+b=0$,và cùng với phương trình (7)bây giờ ta có thể tìm được tất cả các cặp có thứ tự (a,b). Chúng là $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ và $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$. Do vậy, các nghiệm (x,y)của hệ phương trình đã cho là$(2,2)$,$(3,3)$,$(2,3)$ và $(3,2)$.

▷**1.2**. *Cho dãy số nguyên dương thỏa mãn $a_n=a_{n-1}^2+a_{n-2}^2+a_{n-3}^2$ với $n\geq 3$. Chứng minh rằng nếu $a_k=1997$ thì $k\leq 3$.*

Lời giải: Chúng ta giải trực tiếp: Giả sử với $k>3, a_k=1997$. Khi đó, có ít nhất một số trong 4 số a_{k-1},a_{k-2},a_{k-3} vàa_{k-4} phải tồn tại. Đặt $w=a_{k-1},x=a_{k-2},y=a_{k-3}$ và $z=a_{k-4}$.Bây giờ, điều kiện của chúng ta là: $1997=w^2+x^2+y^2$. Do đó, $w\leq\sqrt{1997}<45$ và vì w là một số nguyên dương nên $w\leq 44$. Nhưng do $x^2+y^2\geq 1997-4462=61$.
Bây giờ, (với) $w=x^2+yx^2+z^2$. Vì $x^2+y^2\geqslant 61$ và $z^2\geqslant 0, x^2+y^2+z^2\geqslant 61$. Nhưng $w\leqslant 44$. Do đó, chúng ta có mâu thuẫn và giả thiết của chúng ta là không đúng.
Vậy, nếu $a_k=1997$ thì $k\leqslant 3$.

▷**1.3**. *Cho k là một số nguyên dương. Dãy $a-n$ được xác định bởi $a-1=1$ và a_n là $n-$ số nguyên dương lớn hơn a_{n-1} là đồng dư n modulo k. Tìm a_n trong dãy trên.*

Lời giải: Chúng ta có $a_n = \frac{n(2+(n-1)k)}{2}$. Nếu $k = 2$ thì $a_n = n^2$. Trước tiên, chú ý rằng $a_1 \equiv 1(modk)$. Do đó, với tất cả n, $a_n \equiv n(modk)$, và số nguyên đầu tiên lớn hơn a_{n-1} mà là đồng dư n modulo k phải là $a_{n-1} + 1$.
n - th số nguyên dương lớn hơn a_{n-1}là đồng dư n modul k là đơn giản (n - 1)k hơn số nguyên dương đầu tiên lớn hơn a_{n-1} mà thỏa mãn điều kiện đó. Do vậy, $a_n = a_{n-1} + 1 + (n-1)k$. Lời giải bằng phép đệ quy này đưa ra câu trả lời của bài toán trên.

▷**1.4**. *Cho hình bình hành ABCD, một đường tròn nội tiếp trong góc $\widehat{BAD}$ và nằm hoàn toàn trong hình bình hành. Tương tự, một đường tròn nội tiếp trong góc $\widehat{BCD}$ nằm hoàn toàn trong hình bình hành sao cho 2 đường tròn đó tiếp xúc. Hãy tìm quỹ tích các tiếp điểm của 2 đường tròn đó khi chúng thay đổi.*

Lời giải: Giả sử K_1 là đường tròn lớn nhất nội tiếp trong góc $\widehat{BAD}$ sao cho nó nằm hoàn toàn trong hình bình hành. Nó cắt đường thẳng AC tại 2 điểm và giả sử điểm ở xa A hơn là P_1. Tương tự Giả sử K_2 là đường tròn lớn nhất nội tiếp trong góc $\widehat{BCD}$ sao cho nó nằm hoàn toàn trong hình bình hành. Nó cắt đường thẳng AC tại 2 điểm và giả sử điểm ở xa C hơn là P_2. Khi đó, quỹ tích là giao của 2 đoạn AP_1 và AP_2.
Chúng ta bắt đầu chứng minh điểm tiếp xúc phải nằm trên đường AC. Giả sử I_1 là tâm đường tròn nội tiếp góc $\widehat{BAD}$ và I_2 là tâm đường tròn nội tiếp góc $\widehat{BCD}$. Giả sử X là điểm tiếp xúc của 2 đường tròn. Vì các đường tròn tâm I_1 và I_2 là nội tiếp trong các góc nên các tâm này phải nằm trên các đường phân giác của các góc. Mặt khác vì AI_1 và CI_2 là các đường phân giác của các góc đối hình bình hànhneen chúng song sonh với nhau. Do vậy I_1I_2 là đường nằm ngang.
Giả sử T_1 là chân đường vuông góc hạ từ I_1 tới AB và T_2 là chân đường vuông góc hạ từ I_2 tới CD. Chú ý rằng:

$$\frac{I_1T_1}{AI_1} = \sin \widehat{I_1}AB = \sin \widehat{I_2}CD = \frac{I_2T_2}{CI_2}$$

Nhưng $I_1X = I_1T_1$ và $I_2X = I_2T_2$. Do vậy

$$\frac{I_1X}{AI_1} = \frac{I_2X}{CT_2}$$

Vì thế tam giác CI_2X và tam giác AI_1X là đồng dạng và các góc vuông $\widehat{I_1XA}, \widehat{I_2XC}$ là bằng nhau. Vì các góc này bằng nhau nên các điểm A, X và C phải cộng tuyến. Do vậy, điểm tiếp xúc X phải nằm trên đường chéo AC (đó là điều phải chứng minh).

Như vậy, chúng ta biết rằng X sẽ luôn nằm trên AC, bây giờ ta sẽ chứng minh bất kỳ điểm nào thuộc quỹ tích đó đều là điểm tiếp xúc. Cho X bất kỳ nằm trên quỹ tích đó, giả sử I_1 là đường tròn bé hơn đường tròn qua X, nội tiếp trong góc $\widehat{BAD}$.

Nó sẽ nằm hoàn toàn bên trong hình bình hành bởi vì X là điểm giữa A và P_1. Tương tự, ta vẽ một đường tròn tiếp xúc với đường tròn I_1 và nội tiếp trong góc $\widehat{BCD}$, từ chứng minh trên ta biết rằng nó phải tiếp xúc với đường tròn I_1 tại X, hơn nữa nó sẽ hoàn toàn xác định bên trong hình bình hành bởi vì X là điểm giữa của C và P_2.

Vì vậy, bất cứ điểm nào thuộc quỹ tích sẽ chạy qua X. Để chứng minh rằng bất kỳ điểm nào khác sẽ không chạy qua. Chú ý rằng bất kỳ điểm nào sẽ hoặc không nằm trên đường thẳng AC hoặc sẽ không cho 1 trong 2 đường tròn I_1 hoặc I_2 được chứa bên trong hình bình hành. Do vậy, quỹ tích thực sự là giao của các đoạn AP_1 và CP_2.

Chương 2

Đề thi olympic Bungari

▷**2.5**. *Tìm tất cả các số thực m để phương trình*

$$\left(x^2 - 2mx - 4(m^2 + 1)\right)\left(x^2 - 4x - 2m(m^2 + 1)\right) = 0$$

có đúng ba nghiệm phân biệt.

Lời giải: Đáp án: $m = 3$.
Cho hai thừa số ở vế trái của phương trình bằng 0 ta nhận được hai phương trình đa thức. Ít nhất một trong các phương trình này phải nghiệm đúng với giá trị x nào đó để x là nghiệm của phương trình ban đầu. Những phương trình này có thể viết dưới dạng $(x - m)^2 = 5m^2 + 4$ (1)và $(x - 2)^2 = 2(m^3 + m + 2)$ (2). Ta có ba trường hợp mà phương trình ban đầu có thể có 3 nghiệm phân biệt: Phương trình (1) có nghiệm kép hoặc phương trình (2) có nghiệm kép hoặc hai phương trình có một nghiệm chung. Tuy nhiên, trường hợp thứ nhất không xảy ra vì hiển nhiên $5m^2 + 4 = 0$ không thể thỏa mãn với mọi giá trị thực m.
Trong trường hợp thứ hai, ta phải có $2(m^3 + m + 2) = 0$; $m^3 + m + 2$ phân tích thành $(m + 1)(m^2 - m + 2)$ và thừa số thứ hai luôn dương với mọi giá trị thực m. Vì vậy ta phải có m=-1 để trường hợp này xảy ra. Khi đó nghiệm duy nhất của phương trình này là x=2 và phương trình (1) trở thành $(x + 1)^2 = 9$, tức là x=2, -4. Nhưng điều này có nghĩa là phương trình ban đầu của ta chỉ có nghiệm là 2 và -4, trái với yêu cầu của bài toán.

Xét trường hợp thứ ba, gọi r là nghiệm của phương trình thì $x - r$ là một thừa số của cả hai biểu thức $x^2 - 2mx - 4(m^2 + 1)$ và $x^2 - 4x - 2m(m^2 + 1)$. Trừ hai biểu thức này cho nhau ta nhận được $x - r$ là một thừa số của $(2m - 4)x - (2m^3 - 4m^2 + 2m - 4)$, hay $(2m - 4)r = (2m - 4)(m^2 + 1)$. Vì vậy $m = 2$ hoặc $r = m^2 + 1$. Tuy nhiên, trong trường hợp thứ nhất thì cả hai phương trình bậc hai của ta trở thành $(x - 2)^2 = 24$, và vì vậy, ta chỉ thu được hai nghiệm phân biệt. Vậy ta phải có $r = m^2 + 1$. Khi đó, thay vào đẳng thức $(r - 2)^2 = 2(m^3 + m + 2)$, ta được $(m^2 - 1)^2 = 2(m^3 + m + 2)$ hay $(m + 1)(m - 3)(m^2 + 1) = 0$. Do đó $m = -1$ hoặc 3. Trường hợp m=-1 đã được chỉ ra không thỏa mãn. Vì vậy, ta chỉ có m=3. Khi đó các phương trình của ta trở thành $(x - 3)^2 = 49$ và $(x - 2)^2 = 64$, chúng có các nghiệm là x=-6, -4, 10, thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

▷**2.6**. *Cho ABC là tam giác đều có diện tích bằng 7. Gọi M, N tương ứng là các điểm trên cạnh AB, AC sao cho AN=BM. Gọi O là giao điểm của BN và CM. Biết tam giác BOC có diện tích bằng 2.*
(a) Chứng minh rằng $\frac{MB}{AB}$ hoặc bằng $\frac{1}{3}$ hoặc bằng $\frac{2}{3}$.
(b) Tính góc $\widehat{AOB}$

Lời giải: (a) Lấy điểm L trên BC sao cho CL=AN và gọi P, Q lần lượt là giao điểm của CM và AL, AL và BN. Phép quay với góc quay 120^o quanh tâm của tam giác ABC biến A thành B, B thành C, C thành A; phép quay này cũng biến M thành L, L thành N, N thành M và biến O thành P, P thành Q, Q thành O. Do đó OPQ và MLN là các tam giác đều đồng tâm với tam giác ABC. Suy ra $\widehat{BOC}$=π-$\widehat{MOC}$=$\frac{2\pi}{3}$. Vì vậy, O nằm trên đường tròn đối xứng với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC qua BC. Có nhiều nhất hai điểm O trên đường tròn này và nằm trong tam giác ABC để tỉ lệ khoảng cách từ O tới BC và từ A tới BC bằng $\frac{2}{7}$, tỉ lệ này cũng là tỉ lệ diện tích của các tam giác OBC và ABC. Vì vậy ta đã chỉ ra rằng $\frac{MB}{AB}$=$\frac{1}{3}$ hoặc $\frac{2}{3}$ tương ứng với các vị trí của điểm O, và không có tỉ lệ nào khác (tức là không có hai điểm M cho cùng một điểm O. Nếu $\frac{MB}{AB} = \frac{1}{3}$ thì $\frac{AN}{AC} = \frac{1}{3}$, áp dụng định lí Menelaus cho tam giác ABN và đường thẳng CM, ta được $\frac{BO}{ON}$=$\frac{3}{4}$, do đó $\frac{[BOC]}{[BNC]}$=$\frac{BO}{BN}$=$\frac{3}{7}$. Suy ra $\frac{[BOC]}{[ABC]}$=$\frac{3}{7}\frac{CN}{CA}$=$\frac{2}{7}$ và ta có điều phải chứng minh. Tương tự, nếu $\frac{MB}{AB}$=$\frac{2}{3}$, theo định lí Menelaus ta có $\frac{BO}{BN}$=$\frac{6}{7}$, do đó $\frac{[BOC]}{[BNC]}$=$\frac{BO}{BN}$=$\frac{6}{7}$. Suy ra $\frac{[BOC]}{[ABC]}$=$\frac{6}{7}\frac{CN}{CA}$=$\frac{2}{7}$. (b)

$\frac{MB}{AB}=\frac{1}{3}$ thì MONA là một tứ giác nội tiếp do $\hat{A}=\frac{pi}{3}$ và $\hat{O} = \pi - \widehat{POQ} = \frac{2\pi}{3}$. Do đó $\widehat{AOB}=\widehat{AOM}+\widehat{MOB}=\widehat{ANM}+\widehat{POQ} = \widehat{ANM} + \frac{\pi}{3}$. Nhưng $\frac{MB}{AB}=\frac{1}{3}$ và $\frac{AN}{AC}=\frac{1}{3}$ nên dễ dàng thấy được N là hình chiếu của M trên AC. Vì vậy $\widehat{ANM} = \frac{\pi}{2}$ và $\widehat{AOB} = \frac{5\pi}{6}$. Lập luận tương tự đối với trường hợp còn lại, ta được $\widehat{ANM} = \frac{\pi}{6}$ và $\widehat{AOB} = \frac{\pi}{2}$.

▷**2.7**. *Cho* $f(x) = x^2 - 2ax - a^2 - \frac{3}{4}$. *Tìm tất cả các giá trị của a để* $|f(x)| \leq 1$ *với mọi* $x \in [0; 1]$.

Lời giải: Đáp án: $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{\sqrt{2}}{4}$.
Đồ thị của f(x) là một parabol có điểm cực tiểu (có nghĩa là hệ số a âm) và đỉnh là (a;f(a)). Từ $f(0) = -a^2 - \frac{3}{4}$ ta có $|a| \leq \frac{1}{2}$ để $f(0) \geq -1$. Giả sử $a \leq 0$ thì parabol của ta tăng nghiêm ngặt trong khoảng từ 0 đến 1, do đó $f(1) \leq 1$. Nhưng ta có $\frac{1}{2} \leq a + 1 \leq 1$, $\frac{1}{4} \leq (a+1)^2 \leq 1$, $\frac{1}{4} \leq \frac{5}{4} - (a+1)^2 \leq 1$. Từ $\frac{5}{4} - (a+1)^2 = f(1)$, ta có f thỏa mãn điều kiện của bài ra khi $-\frac{1}{2} \leq a \leq 0$. Với a $>$ 0, f giảm với $0 \leq x \leq a$ và tăng với $a \leq x \leq 1$. Vì vậy ta cần chỉ ra giá trị nhỏ nhất của f(a) nằm trong phạm vi theo yêu cầu của bài toán, tức là f(1) nằm trong giới hạn này. Từ $a \leq \frac{1}{2}$ ta có $1 < (a+1)^2 \leq \frac{9}{4}$ và vì vậy $f(x) = -1 \leq \frac{5}{4} - (a+1)^2 < \frac{1}{4}$. Mặt khác, $f(a) = -2a^2 - \frac{3}{4}$ nên ta phải có $a \leq \frac{\sqrt{2}}{4}$ để $f(a) \geq -1$. Ngược lại, đánh giá f(0), f(a), f(1) ta chỉ ra được f thỏa mãn điều kiện của bài ra khi $0 < a \leq \frac{\sqrt{2}}{4}$.

▷**2.8**. *Kí hiệu* $u(k)$ *là ước lẻ lớn nhất của số tự nhiên* k. *Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{2^n} \cdot \sum_{k=1}^{2^n} \frac{u(k)}{k} \leq \frac{2}{3}.$$

Lời giải: Đặt $v(k)$ là ước lớn nhất của k có dạng lũy thừa của 2, nên $u(k)v(k) = k$. Trong $\{1, 2, ..., 2^n\}$ có 2^{n-i-1} giá trị của k sao cho $v(k) = 2^i$ với $i \leq n-1$, và một giá trị sao cho $v(k) = 2^n$. Do đó, vế trái bằng

$$\frac{1}{2^n} \cdot \sum_{k=1}^{2^n} \frac{u(k)}{k} = \frac{1}{4^n} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2^{n-i-1}}{2^{n+i}}.$$

Từ tổng của chuỗi hình học ta có

$$\frac{1}{2^n} \cdot \sum_{k=1}^{2^n} \frac{u(k)}{k} = 4^{-n} + \frac{2}{3}(1 - 4^{-n}) > \frac{2}{3}.$$

▷**2.9**. *Tìm tất cả các số thực thỏa mãn hệ*

$$\begin{aligned} x^3 &= 2y-1\\ y^3 &= 2z-1\\ z^3 &= 2x-1. \end{aligned}$$

Lời giải: Trước hết ta chỉ ra rằng $x = y = z$. Giả sử trái lại rằng $x \neq y$. Nếu $x > y$, thì $y = \frac{(x^3+1)}{2} > \frac{(y^3+1)}{2} = z$, nên $y > z$, và tương tự $z > x$, mâu thuẫn. Tương tự, nếu $x < y$ thì $y < z$ và $z < x$, mẫu thuẫn. Nên các nghiệm của hệ phương trình có dạng $x = y = z = t$ với t là nghiệm của phương trình $t^3 = 2t - 1$. Vậy, nghiệm của hệ phương trình là

$$x = y = z = t,\, t \in \left\{1, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}.$$

▷**2.10**.*Tìm số tự nhiên a nhỏ nhất để phương trình sau có một nghiệm thực:*

$$cos^2\pi(a-x) - 2\cos\pi(a-x) + cos\frac{3\pi x}{2a}cos\left(\frac{\pi x}{2a} + \frac{\pi}{3}\right) + 2 = 0$$

Lời giải: Giá trị nhỏ nhất của a là 6. Phương trình thỏa mãn khi a=6, x=8. Để chứng minh a là giá trị nhỏ nhất, ta viết phương trình dưới dạng

$$(cos\pi(\text{a-x})\text{-1})^2 + \left(cos\left(\frac{3\pi\text{x}}{2a}\right)cos\left(\frac{\pi\text{x}}{2a} + \frac{\pi}{3}\right) + 1\right) = 0$$

Do cả hai số hạng ở vế trái đều không âm nên để đẳng thức xảy ra thì chúng phải cùng bằng 0. Từ $cos\pi(\text{a-x})\text{-1} = 0$ ta có x phải là một số nguyên đồng dư với a trong phép chia cho 2. Từ số hạng thứ hai bằng 0, ta thấy các giá trị cosin phải nhận giá trị bằng 1 và -1. Nếu $cos\left(\frac{\pi\text{x}}{2a} + \frac{\pi}{3}\right) = 1$ thì $\frac{\pi\text{x}}{2a} + \frac{\pi}{3} = 2k\pi$ với giá trị k nguyên và nhân hai vế với $\frac{6a}{\pi}$ ta được $3x \equiv 4a\,(mod 12a)$. Khi đó thì nếu $cos\left(\frac{\pi\text{x}}{2a} + \frac{\pi}{3}\right) = -1$ thì $\frac{\pi\text{x}}{2a} + \frac{\pi}{3} = (2k+1)\pi$ và nhân hai vế với $\frac{6a}{\pi}$ ta được $3x \equiv 4a\,(mod 12a)$. Trong cả hai trường hợp ta đều có 3x chia hết cho 2, vì vậy x phải chia hết cho 2 và a cũng phải thỏa mãn điều đó. Hơn nữa, ở cả hai trường hợp ta cũng đều có -2a và 4a cùng phải chia hết cho 3, vì thế a phải chia hết cho 3. Tóm lại ta có 6 phải là ước của a và a=6 là giá trị nhỏ nhất cần tìm.

Chương 3

Đề thi olympic Canada

▷**3.11**.*Có bao nhiêu cặp số* $(x;y)$ *nguyên dương với* $x \le y$ *thoả mãn* $gcd(x,y) = 5!$ *và* $lcm(x,y) = 50!$ *?*

Lời giải: Trước hết, chú ý là có 15 số nguyên tố từ 1 đến 50:
(2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47).
Để làm cho bài toán đơn giản hơn, ta xác định $f(a,b)$ là mũ lớn nhất của b chia cho a. (Chú ý rằng $g(50!,b) > g(5!,b)$ với mọi $b < 50$.)
Do đó, với mỗi số nguyên tố p, ta có

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x,p) = f(5!,p) \\ f(y,p) = f(50!,p) \end{cases} \\ \begin{cases} f(y,p) = f(5!,p) \\ f(x,p) = f(50!,p) \end{cases} \end{array}\right.$$

Vì ta có 15 số nguyên tố nên có 2^{15} cặp, và trong bất kì cặp nào cũng hiển nhiên có $x \ne y$ (do gcd và lcm khác nhau), do đó có 2^{14} cặp với $x \le y$.

▷**3.12**.*Cho trước một số hữu hạn các khoảng đóng có độ dài bằng 1 sao cho hợp của chúng là khoảng đóng [0, 50], chứng minh rằng tồn tại một tập con của các khoảng đó không giao với tất cả các khoảng khác.*

Lời giải: Xét
$I_1 = [1+e, 2+e], I_2 = [3+2e, 4+2e], ..., I_{24} = [47+24e, 48+24e]$

trong đó e đủ nhỏ để $48 + 24e < 50$. Để hợp các đoạn chứa $2k + ke$, ta phải có một đoạn mà phần tử nhỏ nhất nằm trong Ik. Tuy nhiên, sự khác nhau giữa một phần tử trong tập Ik và $Ik + 1$ luôn lớn hơn 1, vì vậy các tập này không chồng lên nhau. Từ 24 khoảng ban đầu và [0, 1] (phải tồn tại vì hợp là [0, 50]) ta có 25 khoảng rời nhau mà tổng độ dài tất nhiên bằng 25.

▷**3.13**.*Chứng minh rằng:*
$\frac{1}{1999} < \frac{1}{2}.\frac{3}{4}. \dots .\frac{1997}{1998} < \frac{1}{44}$

Lời giải: Đặt $p = \frac{1}{2}.\frac{3}{4}. \dots .\frac{1997}{1998}$ và $q = \frac{2}{3}.\frac{4}{5}. \dots .\frac{1998}{1999}$. Chú ý rằng $p < q$, vì vậy $p^2 < pq = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}. \dots .\frac{1998}{1999} = \frac{1}{1999}$. Do đó,

$$p < \frac{1}{1999^{\frac{1}{2}}} < \frac{1}{44}$$

Lại có

$$p = \frac{1998!}{(999!.2^{999})^2} = 2^{-1998}\begin{pmatrix} 1998 \\ 999 \end{pmatrix}$$

đồng thời

$$2^{1998} = \begin{pmatrix} 1998 \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 1998 \\ 1998 \end{pmatrix} < 1999\begin{pmatrix} 1998 \\ 999 \end{pmatrix}$$

Do đó

$$p > \frac{1}{1999}$$

.

▷**3.14**.*Cho O là một điểm nằm trong tứ giác $ABCD$ sao cho $\widehat{AOB} + \widehat{COD} = \pi$. Chứng minh rằng $\widehat{OBC} = \widehat{ODC}$.*

Lời giải: Tịnh tiến ABCD theo vectơ $\overrightarrow{AD}$ thì A' và D như nhau, và vì vậy B' và C như nhau. Ta có $\widehat{COD} + \widehat{CO'D} = \widehat{COD} + \widehat{A'O'D'} = 180^0$ nên tứ giác $OC'O'D'$ nội tiếp. Do đó $\widehat{ODC} = \widehat{OO'C}$.

▷**3.15**.*Biểu diễn tổng sau $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k^3+9k^2+26k+24}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ về dạng $p(n)/q(n)$, trong đó p, q là các đa thức với các hệ số nguyên.*

Lời giải: Ta có

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k^3+9k^2+26k+24} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k+2)(k+3)(k+4)} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{k+1}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \begin{pmatrix} n+4 \\ k+4 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \sum_{k=4}^{n+4} (-1)^k (k-3) \begin{pmatrix} n+4 \\ k \end{pmatrix}$$

và

$$\sum_{k=0}^{n+4} (-1)^k (k-3) \begin{pmatrix} n+4 \\ k \end{pmatrix}$$
$$= \sum_{k=0}^{n+4} (-1)^k k \begin{pmatrix} n+4 \\ k \end{pmatrix} - 3 \sum_{k=0}^{n+4} (-1)^k \begin{pmatrix} n+4 \\ k \end{pmatrix}$$
$$= \sum_{k=1}^{n+4} (-1)^k k \begin{pmatrix} n+4 \\ k \end{pmatrix} - 3(1-1)^{n+4}$$
$$= \frac{1}{n+4} \sum_{k=1}^{n+4} (-1)^k \begin{pmatrix} n+3 \\ k-1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{n+4} (1-1)^{n+3} = 0$$

Do đó

$$\sum_{k=4}^{n+4} (-1)^k (k-3) \begin{pmatrix} n+4 \\ k \end{pmatrix}$$
$$= -\sum_{k=0}^{3} (-1)^k (k-3) \begin{pmatrix} n+4 \\ k \end{pmatrix}$$
$$= 3 \begin{pmatrix} n+4 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} n+4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n+4 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

và tổng đã cho bằng

$$\frac{1}{2\,(n+3)\,(n+4)}$$

Chương 4

Đề thi olympic Chine

▷**4.16**. *Cho $x_1, x_2, ..., x_{1997}$ là các số thực thỏa mãn điều kiện*
(a) $-\frac{1}{\sqrt{3}} \leq x_i \leq \sqrt{3}$ *với mọi* $i = 1; 2; ...; 1997$
(b) $x_1 + x_2 + ... + x_{1997} = x_{1997}^{12}$

Lời giải: Do x^{12} là một hàm lồi của x nên tổng các lũy thừa bậc 12 của x_i là cực đại nếu mỗi giá trị x_i là đầu mút của khoảng quy định.
Giả sử có n giá trị x_i bằng $-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $1996 - n$ có giá trị bằng $\sqrt{3}$ và các giá trị cuối cùng bằng

$$-318\sqrt{3} + \frac{n}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}(1996 - n)$$

Do giá trị cuối cùng này phải nằm trong miền $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}; \sqrt{3}\right]$ nên

$$-1 \leq -318x3 + n - 3x(1996 - n) \leq 3$$

tương đương với

$$-1 \leq 4n - 6942 \leq 3$$

có duy nhất một số nguyên $n = 1736$ thỏa mãn.
Khi đó, giá trị cuối cùng là $\frac{2}{\sqrt{3}}$ và giá trị lớn nhất cần tìm là:

$$1736x3^{-6} + 260x3^{6} + (\frac{4}{3})^{6}$$

▷**4.17**. *Cho tứ giác lồi $A_1B_1C_1D_1$ và một điểm P nằm trong tứ giác lồi đó. Giả sử các góc $\widehat{PA_1B_1}$ và $\widehat{PA_1D_1}$ là các góc nhọn, tương tự cho ba đỉnh còn lại. Xác định A_k, B_k, C_k, D_k là hình chiếu của P lên các đường thẳng $A_{k-1}B_{k-1}$, $B_{k-1}C_{k-1}$, $C_{k-1}D_{k-1}$ $(k = 2, 3, ...)$*
a) Trong các tứ giác $A_kB_kC_kD_k$ $(k = 1, 2, 3, ..., 12)$ thì tứ giác nào đồng dạng với tứ giác thứ 1997
b) Giả sử rằng tứ giác thứ 1997 là nội tiếp. Hỏi trong 12 tứ giác đầu tiên thì tứ giác nào cũng nội tiếp đường tròn

Lời giải: Ta có A_k chính là chân của các đường vuông góc từ P đến $A_{k-1}B_{k-1}$ và tương tự như vậy cho các điểm còn lại. Do các tứ giác nội tiếp với các đường kính PA_k, PB_k, PC_k, PD_k ta có

$$\widehat{PA_kB_k} = P\widehat{D_{k+1}A}_{k+1} = P\widehat{C_{k+2}D}_{k+2}$$

$$P\widehat{B_{k+3}C}_{k+3} = P\widehat{A_{k+4}B}_{k+4}$$

Mặt khác, ta cũng có $\widehat{PB_kA_k}$=$P\widehat{B_{k+1}A}_{k+1}$ và tương tự như vậy cho các góc còn lại.
Do vậy, các tứ giác thứ $1, 5, 9$ đồng dạng với tứ giác thứ 1997.
Nếu tứ giác thứ 1997 là nội tiếp thì các tứ giác thứ $3, 7$ và 11 cũng vậy.

▷**4.18**. *Chỉ ra tồn tại vô số số nguyên dương n sao cho các số$1, 2, 3, ..., 3n$ có thể được gán cho*

$$a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n, c_1, c_2, ..., c_n$$

theo thứ tự này thỏa mãn điều kiện sau:
a) $a_1 + b_1 + c_1 = a_n + b_n + c_n$
b) $a_1 + a_2 + ... + a_n = b_1 + b_2 + ... + b_n = c_1 + c_2 + ... + c_n$ là bội của 6

Lời giải: Tổng các số nguyên từ 1 đến $3n$ là $\frac{3n(3n+1)}{2}$ trong đó ta đòi hỏi phải vừa là bội của $6n$ và 9.
Vì thế, n phải là bội của 3 đồng dư với 1 theo môđun4.
Ta sẽ chỉ ra rằng tồn tại sự sắp xếp cho $n = 9^m$.
Với $n = 9$ ta có sự sắp xếp sau:

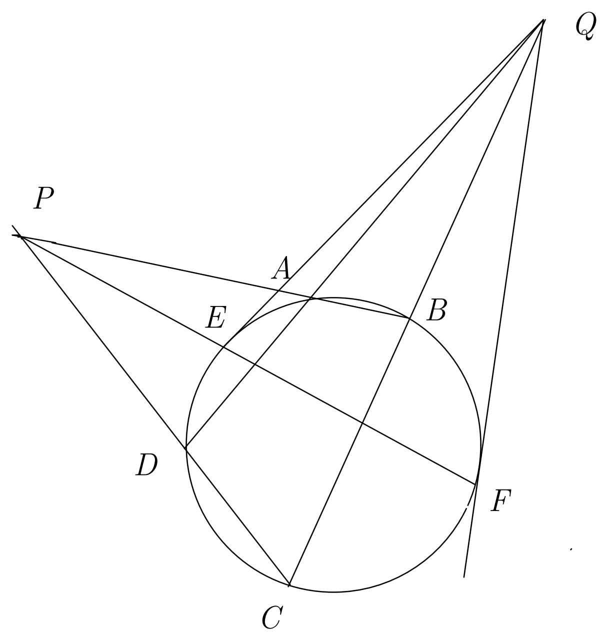
8	1	16	17	10	15	26	19	24
21	23	25	3	5	7	12	14	16
13	18	11	22	27	20	4	9	2

(trong đó, dòng đầu tiên là $a_1, a_2, ..., a_n$ và tiếp tục). Điều này chứng tỏ từ sự sắp xếp cho m và n dẫn đến sự sắp xếp cho mn

$$a''_{i+(j-1)m} = a_j + (m-1)a'_j (1 \leq j \leq m, 1 \leq j \leq n)$$

và tương tự cho b_i, c_i.

▷**4.19**. *Cho $ABCD$ là một tứ giác nội tiếp. Các đường thẳng AB và CD cắt nhau tại P. Các đường thẳng AD và BC cắt nhau tại Q. Gọi E và F là giao điểm tiếp tuyến từ Q với đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$. Chứng minh rằng P, E, F thẳng hàng.*



Lời giải: Gọi X' là tiếp tuyến của đường tròn tại điểm X nằm trên đường tròn.

Để chứng minh P, E, F thẳng hàng ta chứng minh các điểm cực của nó trùng nhau.

Các tiếp tuyến E' và F' tại các điểm E và F cắt nhau tại Q. Do P là giao của AB và CD nên điểm cực của P là đường thẳng đi qua giao điểm của A' giao với B' và C' giao với D'.

Ta sẽ chứng minh những điểm này thẳng hàng với Q. Tuy nhiên theo định lý Pascal cho lục giác suy biến $AADBBC$ thì Q và giao điểm của AC với BD sẽ cộng tuyến.
Tương tự, áp dụng định lý Pascal cho lục giác suy biến $ADDBCC$ ta cũng có kết quả tương tự.

▷**4.20**. *Cho $A = \{1, 2, ..., 17\}$ và hàm $f : A \to A$ thoả mãn*
Ký hiệu $f^{[1]} = f(x)$ và $f^{[k+1]}(x) = f(f^{[k]}(x))$ với $k \in N$
Tìm số tự nhiên lớn nhất M sao cho tồn tại song ánh $f : A \to A$ thỏa mãn điều kiện sau:
a) Nếu $m < M$ và $1 \le i \le 17$ thì $f^{[m]}(i+1) - f^{[m]}(i)$ không đồng dư với ± 1 theo môđun 17 b) Với $1 \le i \le 17$ thì

$$f^{[m]}(i+1) - f^{[m]}(i) \equiv \pm 1 (mod 17)$$

(ở đây $f^{[k]}(18))$ được xác định bằng $f^{[k]}(1))$)

Lời giải: Ánh xạ $f(x) = 3x(mod 17)$ thỏa mãn yêu cầu cho $M = 8$ và ta sẽ chỉ ra rằng nó là giá trị lớn nhất.
Chú ý rằng bằng cách sắp xếp với chu trình chuyển ta có thể giả sử rằng $f(17) = 17$, do đó M là số nguyên đầu tiên sao cho $f^{[M]}(1))$ bằng 1 hoặc bằng 16. Cũng như vậy cho 16.
Nếu 1 và 16 cùng trên một quỹ đạo của hoán vị f thì quỹ đạo này có độ dài lớn nhất là 16 và 1 hoặc 16 phải ánh xạ với những giá trị khác nhau sau 8 bước. Suy ra, $M \le 8$.
Nếu có một quỹ đạo khác, một hoặc thậm chí hai quỹ đạo có độ dài lớn nhất là 8 và như vậy $M \le 8$.

▷**4.21**. *Cho $a_1, a_2, ...$ là các số không âm thỏa mãn*

$$a_{m+n} \le a_m + a_n \ (m, n \le N).$$

Chứng minh rằng: $a_n \le ma_1 + (\frac{n}{m} - 1)a_m$ với mọi $n \ge m$.

Lời giải: Bằng phương pháp quy nạp với k

$$a_n \le ka_m + a_{n-mk} \text{ với } k < \frac{m}{n}$$

Đặt $n = mk + r$ với $r \in \{1, 2, ..., m\}$ thì

$$a_n \le ka_m + a_r = \frac{n-r}{m} a_m + a_r \le ma_1$$

$$(\text{Do } a_m \le ma_1 \text{ và } a_r \le ra_1)$$

Chương 5

Đề thi olympic Colombia

▷**5.22**. *Cho một bảng kẻ ô kích thước $n \times n$ và 3 màu. Ta sẽ tô màu mỗi đoạn của lưới bởi một trong 3 màu trên sao cho mỗi ô vuông đơn vị có 2 cạnh cùng màu và 2 cạnh còn lại cùng màu khác. Hỏi có bao nhiêu cách tô màu có thể?*

Lời giải: Gọi 3 màu trên là A, B, C.
Gọi a_n là số cách tô màu của $1 \times n$ ô ở dòng đầu tiên của bảng.
Với $n = 1$, giả sử WLOG đoạn trên cùng của bảng được tô màu A, khi đó có 3 cạnh để chọn đoạn khác được tô màu A và có 2 cách để chọn màu còn lại và như vậy có tất cả $a_1 = 6$ cách tô màu.
Bây giờ ta tìm a_{n+1} từ a_n. Cho bất kỳ màu nào của dòng $1 \times n$, giả thiết WLOG rằng đoạn bên phải nhất được tô màu A. Bây giờ ta tưởng tượng thêm một ô vuông đơn vị kép vào cạnh phải của dòng để được dòng mới có kích thước $1 \times (n+1)$, ở đó màu trên của ô vuông mới đã biết. Nếu đoạn trên mới được tô màu A thì sẽ có 2 cách để chọn màu cho 2 đoạn còn lại. Do vậy: $a_(n+1) = 2a_n$ và $a_n = 3.2^n$.
Trở lại yêu cầu ban đầu, có 3^n cách để tô màu góc trên và 3.2^n cách tô màu mỗi dòng. Như vậy có tất cả $3^{m+n}.2^{m.n}$ cách tô màu.

▷**5.23**. *Ta chơi một trò chơi với tam giác đều của $\frac{n.(n+1)}{2}$ đồng xu (với n đồng xu trên mỗi cạnh). Đầu tiên, tất cả các đồng xu đều đặt sấp. Trong mỗi lần lật ta có thể lật 3 đồng xu liên tiếp liền kề. Mục đích là tất cả các đồng xu bi* *lật ngửa. Hỏi n bằng bao nhiêu để hoàn thành việc đó?*

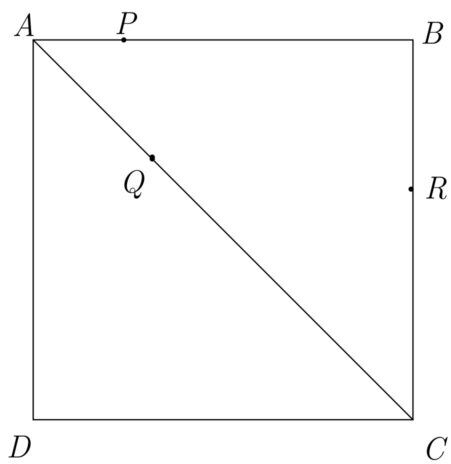
Lời giải: Trò chơi này sẽ được hoàn thành với các giá trị của n mà chia 3 dư 0 hoặc 2.
Rõ ràng thấy ngay ở trường hợp đơn giản nhất. Bài toán đúng với $n = 2$ và $n = 3$ (mỗi trường hợp có bốn khả năng lật).
Với các giá trị n lớn hơn, chọn mỗi lần lật 3 đồng xu, số đồng xu còn dư được lật một lần, và những đồng xu dọc theo các cạnh của tam giác có thể được lật 3 lần. Vì vậy tất cả các đồng xu đều ngửa. Trong khi đó, mỗi đồng xu bên trong tam giác được lật 6 lần, và chúng lập thành một tam giác có số đồng xu trên mỗi cạnh là $n - 3$.
Theo phương pháp quy nạp, các giá trị n như trên đều thỏa mãn.
Nếu n chia 3 dư 1, ta tô các đồng xu bởi các màu vàng, đỏ và xanh sao cho bất kỳ 3 đồng xu nào cạnh nhau cũng có màu khác nhau. Cũng vậy, 3 đồng xu liên tiếp bất kỳ trên một hàng cũng có màu khác nhau.
Nếu các đồng xu ở góc đều có màu vàng thì số đồng xu màu vàng nhiều hơn số đồng xu màu xanh hoặc màu đỏ là 1 đồng.
Lúc này tính chẵn, lẻ của số đồng xu ngửa màu vàng khác với tính chẵn, lẻ của số đồng xu ngửa màu đỏ.
Từ sự khác nhau về tính chẵn, lẻ của số đồng xu ngửa của mỗi màu, chúng ta không thể kết thúc nếu không có sự như nhau về tính chẵn, lẻ của số đồng xu ngửa màu vàng và màu đỏ. Đó có thể là một trường hợp nếu tất cả các đồng xu đều đã lật ngửa. Vậy các đồng xu không thể được sắp xếp.

▷**5.24**. *Cho $ABCD$ là một hình vuông cố định. Xác định tất cả các vị trí có thể của S để hình vuông $PQRS$ với P và R nằm trên 2 cạnh khác nhau của $ABCD$; Q nằm trên đường chéo của $ABCD$. Xác định tất cả các vị trí có thể của điểm S.*

Lời giải: Các vị trí tạo thành các hình vuông khác nhau, quay 45^0 với tâm là giao của hai đường chéo của hình vuông.
Giả sử ta đưa ra các số phức sao cho $A = 0$; $B = 1$; $C = 1 + i$ và $D = i$.
Trước tiên, giả sử P và R nằm trên 2 cạnh liền nhau của $ABCD$. Không mất tính tổng quát, giả sử P nằm trên AB và R nằm trên BC. Trong trường hợp này Q phải nằm trên AC. (Với bất cứ điểm nào nằm trên BD không trùng

với tâm của hình vuông, phép quay với góc quay 90^0 mà AB không trùng với AD.) Nếu $P = x$; $Q = y + yi$ thì $R = (2y - x)i$ và $S = (x - y) + (y - x)i$, trong đó các biến dọc theo hình vuông đã cho.
Nếu P và R nằm trên 2 cạnh đối diện của $ABCD$, không mất tính tổng quát, ta giả sử P nằm trên AB, R nằm trên CD và Q nằm trên AC. Hơn nữa, ta giả thiết $Q = y + yi$ với $\frac{1}{2} \leq y \leq 1$. Quay cạnh AB một góc 90^0 ta có Q trùng với một điểm duy nhất trên CD. Như vậy $P = 2y - 1$; $R = i$ và $S = y - 1 + (1 - y)i$ với các biến dọc theo hình vuông đã cho.

▷**5.25**. *Chứng minh rằng tập hợp các số nguyên dương có thể chia thành vô hạn các tập có vô hạn số $A_1, A_2, \ldots,$ (các tập rời nhau) sao cho nếu x, y, z, w thuộc A_k với k nào đó, khi đó $x - y$ và $z - w$ cùng thuộc tập A_i (trong đó i không nhất thiết bằng k) khi và chỉ khi $\frac{x}{y} = \frac{z}{w}$.*



Lời giải: Gọi A_k là tập bao gồm tất cả các số có dạng $(2k-1)2^n$ và cách phân chia này sẽ thỏa mãn yêu cầu đề ra.
Thật vậy, giả sử $x, y, z, w \in A_k$ với $x > y$ và $z > w$ Ta có:
$x = (2k-1)(2^{(}a+b)), y = (2k-1)2^a, z = (2k-1)2^{(}c+d), w = (2k-1)2^c$.
Khi đó
$x - y = (2k-1)(2^b - 1)(2^a), z - w = (2k-1)(2^d - 1)(2^c)$
Do $\frac{x}{y} = 2^b; \frac{z}{w} = 2^d, \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{z}{w}$ khi và chỉ khi $b = d$ khi và chỉ khi $x - y$ và $z - w$ có ước số lẻ chung lớn nhất.

Chương 6

Đề thi olympic Czech và Slovak Repubulick

▷**6.26**. *Cho tam giác ABC có ba cạnh lần lượt là a, b, c và ba góc tương ứng α, β, γ. Chứng minh rằng: nếu $\alpha = 3\beta$ thì $(a^2 - b^2)(a - b) = bc^2$, xét xem chiều ngược lại có đúng không.*

Lời giải: Theo hệ quả của định lý Sin ta có $a = 2R\sin\alpha, b = 2R\sin\beta, c = 2R\sin\gamma$, với R là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Vì vậy:

$$\begin{aligned}
\left(a^2 - b^2\right)(a - b) &= 8R^3\left(\sin^2\alpha - \sin^2\beta\right)(\sin\alpha - \sin\beta)\\
&= 8R^3\left(\sin^2 3\beta - \sin^2\beta\right)(\sin 3\beta - \sin\beta)\\
&= 8R^3(\sin 3\beta - \sin\beta)^2(\sin 3\beta + \sin\beta)\\
&= 8R^3\left(8\cos^2 2\beta\sin^2\beta\sin^2\beta\cos\beta\right)\\
&= 8R^3\left(\sin^2\left(180^0 - 4\beta\right)\right)(\sin\beta)\\
&= 8R^3\left(\sin^2\gamma\right)(\sin\beta)\\
&= bc^2
\end{aligned}$$

Nói chung, chiều ngược lại sai; ta có thể lấy $\alpha = 3\beta - 360^o$, ví dụ như $\alpha = 15^o, \beta = 125^o, \gamma = 40^o$

▷**6.27**. *Mỗi cạnh và đường chéo của một n-giác đều ($n \geq 3$) được tô màu đỏ hoặc màu xanh. Ta chọn một đỉnh và thay đổi màu của các đoạn thẳng nhận điểm đó làm đầu mút đó từ màu đỏ thành màu xanh và ngược lại. Chứng minh rằng, với bất kỳ cách tô màu lúc đầu thế nào, ta vẫn có thể biến số cạnh màu xanh xuất phát từ mỗi đỉnh là số chẵn. Chứng minh rằng, kết quả cuối cùng của việc tô màu được quy định dựa trên cách tô màu ban đầu.*

Lời giải: Nhận thấy, thứ tự chọn các đỉnh không ảnh hưởng đến kết quả tô màu cuối cùng. Và việc chọn một đỉnh hai lần không ảnh hưởng đến kết quả tô màu. Vì thế, việc chọn một tập hợp các đỉnh cũng cho kết quả như việc chọn các đỉnh còn lại: Quá trình sau cũng tương tự như việc chọn một tập hợp các đỉnh đầu tiên, sau đó chọn tất cả các đỉnh (ở đây, trong tập hợp các đỉnh còn lại, những đỉnh ban đầu được chọn số lẻ lần bây giờ được chọn theo số chẵn lần và ngược lại).

Đặt tên các đỉnh là $1, 2, ..., 2n + 1$. Gọi a_i là số các đoạn màu xanh xuất phát từ đỉnh thứ i, gọi b_i là số lần mỗi đỉnh được chọn và $B = \sum b_i$. Khi chọn đỉnh k thì a_k trở thành $2n - a \equiv a_k$; mặt khác, mỗi đoạn từ đỉnh k tới một đỉnh khác đổi màu nên a_i còn lại thay đổi tính chẵn lẻ.

Tính tổng số a_i thì cho ra kết quả là hai lần tổng số các đoạn màu xanh, vì thế có một số chẵn các đỉnh với a_i là số lẻ -gọi là $2x$ các đỉnh. Chọn các đỉnh này. Tính chẵn lẻ của các số a_i thay đổi $2x - 1$ lần để thành số chẵn. Tính chẵn lẻ của các số a_i còn lại thì thay đổi $2x$ lần để giữ nguyên là số chẵn. Do đó, tất cả các đỉnh đều có một số chẵn các đoạn màu xanh. Vậy ta đã chứng minh được kết quả tô màu cuối cùng là duy nhất.

Ta xét một cách tô màu với kết quả như mong muốn. Cuối cùng, số đoạn màu xanh a_i xuất phát từ đỉnh thứ i là $a_i + B - b_i \pmod 2$. Khi đó, số đoạn màu xanh xuất phát từ các đỉnh là bằng nhau, do đó, $b_j \equiv b_k$ khi và chỉ khi lúc đầu $a_j \equiv a_k$. Vì vậy, hoặc $b_i \equiv 1$ khi và chỉ khi $a_i \equiv 1$ hoặc là $b_i \equiv 1$ khi và chỉ khi $a_i \equiv 0$, ta có kết quả tô màu như trên. Do đó kết quả tô màu là duy nhất.

Bài toán được chứng minh

Chú ý: với một $2n$-giác ($n \geq 2$), thì việc chọn một đỉnh sẽ làm thay đổi tính chẵn lẻ của tất cả các a_i. Vì thế, ta không thể có được kết quả tất cả các a_i là số chẵn, nếu các a_i ban đầu không cùng tính chẵn lẻ. Và nếu có tất cả các a_i là số chẵn thì kết quả tô màu cuối cùng là không duy nhất.

▷**6.28**. *Cho tứ diện $ABCD$ được chia thành 5 khối đa diện lồi sao cho mỗi mặt của tứ diện $ABCD$ là một mặt của khối đa diện (không có mặt nào bị chia), và hai khối đa diện bất kỳ trong 5 khối đa diện hoặc có một đỉnh chung, hoặc có một cạnh chung hoặc có một mặt chung. Hỏi 5 khối đa diện có tổng số mặt ít nhất là bao nhiêu?*

Lời giải: Tổng số mặt nhỏ nhất là 22. Không có khối đa diện nào có chung hai mặt với tứ diện $ABCD$, nếu không, do tính lồi của khối đa diện nên nó sẽ là $ABCD$. Do đó, có một khối đa diện P không có chung một mặt với $ABCD$ và các mặt của nó nằm bên trong tứ diện $ABCD$. Do đó, mỗi mặt của P phải là mặt chung của P với một khối đa diện khác, có nghĩa là P có chung ít nhất 3 mặt với một trong những khối đa diện còn lại. Đồng thời, bất kỳ mặt nào của khối đa diện không là một mặt của tứ diện $ABCD$ thì phải là một mặt của khối đa diện khác. Tức là, tổng số các mặt của 5 khối đa diện là số chẵn. Do mỗi khối đa diện phải có ít nhất 4 mặt, nên tổng số mặt ít nhất là 20. Giả thiết, đây là tổng. Khi đó mỗi khối đa diện là một tứ diện có 4 đỉnh và P có ít nhất 2 đỉnh chung với $ABCD$. Và nếu nó có 2 điểm chung với $ABCD$, giả sử là A và B, khi đó, nó sẽ có tối đa 2 đỉnh chung với tứ diện mà 3 trong 4 đỉnh là A, C, D. Điều này là vô lý. Do đó, tổng của các mặt lơn hớn hoặc bằng 22. Ta sẽ chỉ ra trường hợp để dấu bằng xảy ra. Lần lượt lấy P và Q gần với A và B. Khi đó 5 khối đa diện $APCD, PQCD, BQCD, ABDPQ$ và $ABCPQ$ thỏa mãn các điều kiện đề bài mà tổng số mặt của 5 khối đa diện này bằng 22.

▷**6.29**. *Chỉ ra rằng tồn tại một dãy các số tự nhiên tăng dần $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ với mọi $k \geq 0$, mà dãy $\{k + a_n\}$ chỉ chứa một số hữu hạn số nguyên tố.*

Lời giải: Lấy p_k là số nguyên tố thứ k, $k \geq 1$. Chọn $a_1 = 2$. Với $n \geq 1$, lấy a_{n+1} là số nguyên nhỏ nhất lớn hơn a_n mà $a_{n+1} \equiv -p \,(\mathrm{mod} p_{k+1})$ với mọi $k \leq n$. Những số nguyên này tồn tại theo định lý Thặng dư Trung Hoa. Vì vậy, với mọi $k + a_n \equiv 0 \,(\mathrm{mod} p_{k+1})$ với $n \geq k + 1$. Do đó, trong dãy $\{k + a_n\}$, giá trị lớn nhất trong $k + 1$ có thể là số nguyên tố; từ số hạng thứ $k = 2$ trở đi, các số hạng là bội của p_{k+1} và phải là hợp số .Ta có điều phải chứng minh.

▷**6.30**. *Với mỗi số tự nhiên $n \geq 2$, hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thứ sau:*

$$V_n = \sin x_1 \cos x_2 + \sin x_2 \cos x_3 + \cdots + \sin x_n \cos x_1$$

với $x_1, x_2, \cdot, x_n$ là các số thực bất kỳ.

Lời giải: Áp dụng bất đẳng thức $2ab \leq a^2 + b^2$ ta có:

$$V_n \leqslant \frac{\sin^2 x_1 + \cos^2 x_2}{2} + \frac{\sin^2 x_2 + \cos^2 x_3}{2} + \cdots + \frac{\sin^2 x_n + \cos^2 x_1}{2} = \frac{n}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \frac{\pi}{4}$

▷**6.31**. *Cho hình bình hành $ABCD$ mà ABD là tam giác nhọn, và $\widehat{BAD} = \frac{\pi}{4}$. Trên các cạnh của hình bình hành, lấy các điểm K thuộc AB, L thuộc BC, M thuộc CD, N thuộc DA sao cho $KLMN$ là tứ giác nội tiếp có bán kính bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác ANK và CLM. Tìm quỹ tích các giao điểm của đường chéo của tứ giác $KLMN$.*

Lời giải: Do các cung chứa các $\widehat{KLN}, \widehat{KMN}, \widehat{LKM}, \widehat{LNM}$ trên đường tròn ngoại tiếp tứ giác $KLMN$ và các cung chứa $\widehat{KAN}, \widehat{LCM}$ lần lượt trên đường tròn ngoại tiếp tam giác AKN và CLM có cùng số đo, các góc đó đều bằng nhau và có cùng số đo là 45^o. Các tam giác SKL và SMN với S là giao điểm của KM và NL, là các tam giác vuông cân tại S và đồng dạng với nhau. Khi đó, qua phép đồng dạng, K biến thành M, L biến thành N, AB biến thành CD và BC biến thành DA, vì vậy S nằm trên đoạn BD.

Chương 7

Đề thi olympic Pháp

▷**7.32**. *Tại mỗi đỉnh của 1997- giác được gán một số nguyên, sao cho tổng của chúng bằng 1. Bắt đầu từ một đỉnh nào đó, ta gán theo chiều ngược kim đồng hồ quanh đa giác. Hỏi có thể chọn một đỉnh bắt đầu mà tổng của k số nguyên đầu tiên là dương với* $k = 1, 2, .., 1997$

Lời giải: Có. Gọi b_k là tổng của k số nguyên đầu tiên, ta có $b_{1997} = 1$. Gọi x là giá trị nhỏ nhất của b_k ta tìm một số k lớn nhất mà $b_{k-1} = x$. Sau đó ta bắt đầu từ k đỉnh đó thì mọi tổng số sẽ là số dương.

▷**7.33**. *Tìm thể tích lớn nhất của một hình trụ được chứa trong phần chung của một hình cầu tâm O bán kính R và một hình nón đỉnh O cắt hình cầu theo một đường tròn bán kính r, có cùng trục với hình nón.*

Lời giải: Ta có hình trụ cắt hình cầu theo một đường tròn bán kính $s < r$. Khoảng cách từ tâm của hình cầu đến mặt phẳng chứa đường tròn này là $\sqrt{R^2 - s^2}$. Lại có hình trụ cũng cắt hình nón theo một đường tròn bán kính s, khoảng cách từ tâm hình cầu đến mặt phẳng chứa đường tròn đó bằng $s\sqrt{R^2/r^2 - 1}$. (Vì khoảng cách từ tâm của hình cầu đến mặt phẳng chứa đường tròn là $\sqrt{R^2 - r^2}$). Vì vậy, thể tích của hình trụ là:

$$\pi s^2 \left(\sqrt{R^2 - s^2} - s\sqrt{R^2/r^2 - 1}\right)$$

Chúng ta tìm giá trị lớn nhất của biểu thức trên bằng cách cho đạo hàm theo

s bằng 0:

$$0 = 2s\sqrt{R^2 - s^2} - \frac{s^3}{\sqrt{R^2 - s^2}} - 3s^2\sqrt{R^2/r^2 - 1}$$

Chuyển vế và bình phương ta có:

$$\frac{s^4 - 4R^2s^2 + 4R^4}{R^2 - s^2} = \frac{9s^2R^2 - s^2r^2}{r^2}$$

Giải phương trình ta được:

$$s^2 = \frac{3R^2 + r^2 + \sqrt{(9R^2 - r^2)(R^2 - r^2)}}{6}$$

Và thay s^2 vào công thức thể tích ở trên cho ta thể tích lớn nhất.

▷**7.34**. *Tìm diện tích lớn nhất của hình chiếu vuông góc của hình lập phương đơn vị lên một mặt phẳng.*

Lời giải: Nhận thấy hình chiếu của hình lập phương là tổng hình chiếu của 3 mặt của hình lập phương đôi một vuông góc với nhau. Diện tích hình chiếu của mỗi mặt bằng giá trị tuyệt đối của tích hai vectơ đơn vị lần lượt vuông góc với mặt đó và mặt phẳng chiếu.
Như vậy nếu các tích đó là x, y, z thì giá trị lớn nhất của diện tích hình của chiếu hình lập phương bằng giá trị lớn nhất của tổng $x+y+z$ với điều kiện $x^2+y^2+z^2 = 1$. Mặt khác, theo bất đẳng thức Cauchy-Shwarz $\sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2+z^2} \geq (x+y+z)$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$. Khi đó, giá trị lớn nhất của diện tích bằng $\sqrt{3}$

▷**7.35**. *Cho tam giác ABC với a, b, c là độ dài của các cạnh và m, n, p là độ dài của các đường trung tuyến của nó. Với mọi số thực dương α, gọi $\lambda(\alpha)$ là số thực được xác định bởi :*

$$a^\alpha + b^\alpha + c^\alpha = \lambda(\alpha)^\alpha (m^\alpha + n^\alpha + p^\alpha)$$

(a). Tính $\lambda(2)$
(b). Tính giới hạn của $\lambda(\alpha)$ khi α dần tới 0.
(c). Với điều kiện nào của tam giác ABC thì $\lambda(\alpha)$ không phụ thuộc vào α.

Lời giải: (a). Gọi m, n, p là độ dài của các đường trung tuyến tương ứng với các cạnh a, b, c và giả sử $a \leq b \leq c$. Dễ dàng tính được $m^2 = (2b^2 + 2c^2 - c^2)/4$

và tương tự với hai trung tuyến còn lại, vì vậy $\lambda(2) = \frac{2}{\sqrt{3}}$
(b). Nếu $x \leq y \leq z$ và $\alpha \to 0$ thì

$$x \leqslant (x^\alpha + y^\alpha + z^\alpha)^{1/\alpha} \leqslant 3^{1/\alpha} x$$

và do đó $(x^\alpha + y^\alpha + z^\alpha)^{1/\alpha}$ dần tới x. Vậy chúng ta có $\lim\limits_{\alpha \to 0} \lambda(\alpha) = \frac{a}{p}$
(c). Để $\lambda(\alpha)$ không phụ thuộc vào α ta phải có $\frac{a^2}{p^2} = \frac{4}{3}$, dẫn đến $a^2 + c^2 = 2b^2$. Kết hợp với giả thiết ta có $m = c\frac{\sqrt{3}}{2}, n = b\frac{\sqrt{3}}{2}, p = a\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Vậy $\lambda(\alpha)$ là hằng số khi tam giác ABC thỏa mãn điều kiện trên.

Chương 8

Đề thi olympic Đức

▷**8.36**. *Xác định tất cả các số nguyên tố p sao cho hệ*

$$\begin{aligned} p+1 &= 2x^2 \\ p^2+1 &= 2y^2 \end{aligned}$$

có nghiệm x, y nguyên.

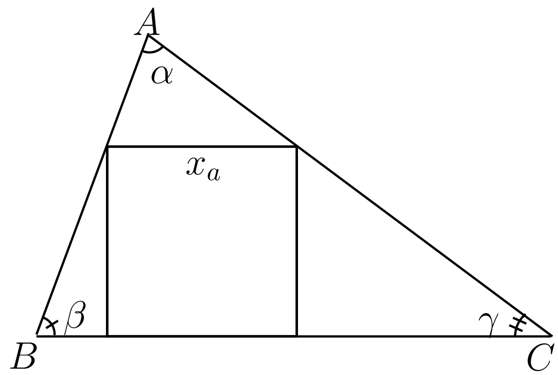
Lời giải: Chỉ có duy nhất số nguyên tố $p = 7$ thỏa mãn bài toán. Không mất tính tổng quát có thể giả sử rằng $x, y \geq 0$. Chú ý rằng $p + 1 = 2x^2$ là chẵn, nên $p \neq 2$. Hơn nữa, $2x^2 \equiv 1 \equiv 2y^2 \pmod{p}$ suy ra $x \equiv \pm y \pmod{p}$ vì p là lẻ. Từ $x < y < p$, ta có $x + y = p$. Do đó

$$p^2 + 1 = 2(p - x)^2 = 2p^2 - 4xp + p + 1,$$

nên $p = 4x - 1$, $2x^2 = 4x$, x là 0 hoặc 2 và p là -1 hoặc 7. Hiển nhiên -1 không là số nguyên tố, và $p = 7$, $(x, y) = (2, 5)$ là nghiệm của bài toán.

▷**8.37**. *Một hình vuông S_a nội tiếp một tam giác nhọn ABC với hai đỉnh nằm trên cạnh BC và một đỉnh nằm trên AB, một đỉnh nằm trên AC. Các hình vuông S_b, S_c được xây dựng tương tự. Với những trường hợp nào của tam giác ABC thì các hình vuông S_a, S_b, S_c là bằng nhau.*

Lời giải:



Đặt R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và đặt x_a, x_b, x_c là độ dài các cạnh của S_a, S_b, S_c tương ứng. Kí hiệu α, β, γ là các góc $\angle BAC, \angle CBA, \angle ACB$.

Giả sử rằng S_a có các đỉnh P, Q nằm trên cạnh BC trong đó P gần B hơn. Khi đó

$$\begin{aligned}
2R\sin\alpha = BC &= BP + PQ + QC\\
&= x_a\cot\beta + x_a + x_a\cot\gamma.\\
x_a &= \frac{2R\sin\alpha}{1+\cot\beta+\cot\gamma}\\
&= \frac{2R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\sin\beta\sin\gamma+\cos\beta\sin\gamma+\cos\gamma\sin\beta}\\
&= \frac{2R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\sin\beta\sin\gamma+\sin\alpha}
\end{aligned}$$

và tương tự cho x_b, x_c. Từ $x_a = x_b$ suy ra

$$\begin{aligned}
\sin\beta\sin\gamma+\sin\alpha &= \sin\gamma\sin\alpha+\sin\beta\\
0 &= (\sin\beta-\sin\alpha)(\sin\gamma-1).
\end{aligned}$$

Từ tam giác ABC là nhọn, ta có $\sin\beta = \sin\alpha$, suy ra $\alpha = \beta$ vì trong trường hợp trái lại thì $\alpha + \beta = \pi$ là không thể xảy ra trong tam giác. Tương tự như vậy $\beta = \gamma$, nên ABC là tam giác đều.

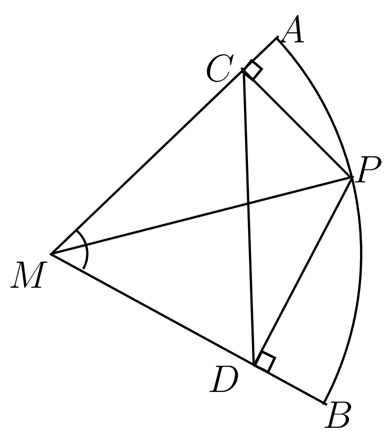
▷**8.38**. *Trong một công viên, 10000 cây được trồng theo một hình lưới vuông. Xác định số lớn nhất các cây có thể đốn hạ mà sao cho từ mỗi gốc cây đã đốn, bạn không thể nhìn thấy một gốc bất kì khác. (Giả sử rằng bán kính của các cây là không đáng kể so với khoảng cách của các cây kề nhau.)*

Lời giải: Ta nhận thấy rằng trong một hình vuông gồm bốn cây kề nhau ta chỉ bỏ đi được nhiều nhất một cây. Từ lưới 100×100 ta có thể chia 10000 đỉnh vào 2500 hình vuông rời nhau thực sự, do đó, có thể đốn hạ nhiều nhất 2500 cây.

Ta sẽ chỉ ra một cách đốn 2500 cây thỏa mãn bài toán. Đồng nhất các cây với tọa độ (x, y) trên lưới, $0 \leq x, y \leq 99$, và đốn hạ tất cả các cây có các tọa độ chẵn. Xét hai gốc bất kì (a, b) và (c, d) với a, b, c, d là chẵn. Xét p/q là một biểu diễn của $(d-b)/(c-a)$ với các hạng tử là bé nhất (ở đây p, q có cùng dấu với $d-b, c-a$, tương ứng), khi đó, ít nhất một trong hai số $a+p$ và $b+q$ phải là lẻ, do đó, cây $(a+p, b+q)$ sẽ chắn tầm nhìn giữa các cây (a, b) và (c, d).

▷**8.39**. *Cho một hình viên phân AMB với góc trung tâm $\angle AMB$ nhỏ hơn 90^o. Từ một điểm P bất kì trên cung AB hạ các đường vuông góc PC và PD xuống MA và MB ($C \in MA$, $D \in MB$). Chứng minh rằng độ dài đoạn thẳng CD không phụ thuộc vào vị trí điểm P trên cung AB.*

Lời giải:



Từ $\angle PCM = \angle PDM = \pi/2$, nên tứ giác $PCMD$ nội tiếp đường tròn đường kính MP. Do đó, áp dụng Định lí hàm số sin cho tam giác MCD, ta có, $CD = MP \sin CMD$ là một hằng số.

▷**8.40**. *Trong một hình vuông $ABCD$ xây dựng bốn cung tròn vuông, mỗi cung tròn có tâm tương ứng là A, B, C, D và chứa hai đỉnh kề với tâm. Bốn cung tròn này cắt nhau tại bốn điểm E, F, G, H nằm bên trong $ABCD$, các điểm* *này cũng làm thành một hình vuông gọi là $\mathcal{S}$. Gọi $\mathcal{C}$ là đường tròn tiếp xúc với cả bốn cung tròn trên. Hãy so sánh diện tích của $\mathcal{S}$ và $\mathcal{C}$.*

Lời giải: Kí hiệu $[\mathcal{C}]$ là diện tích của cung tròn $\mathcal{C}$, và $[\mathcal{S}]$ là diện tích của hình vuông $\mathcal{S}$. Không mất tính tổng quát có thể coi E là giao điểm của các cung tròn mà gần AB nhất, và G là giao điểm gần CD nhất. Hạ các đường vuông góc EE' xuống AB, và GG' xuống CD. Theo tính chất đối xứng, E', E, G, G' là thẳng hàng.

Từ $AB = BG = AG$ ta có ABG là tam giác đều và đường cao $GE' = \sqrt{3}AB/2$. Tương tự, $G'E = \sqrt{3}AB/2$. Do đó, $\sqrt{3}AB = GE' + G'E = AB + EG$, nên $EG = (\sqrt{3}-1)AB$ và $[\mathcal{S}] = EG^2/2 = (2-\sqrt{3})AB^2$.

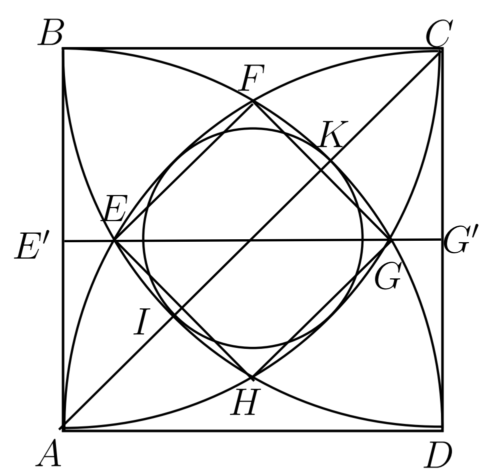
Đặt I, K là các tiếp điểm của đường tròn $\mathcal{C}$ với các cung tròn tâm C và A, tương ứng. Lại do tính đối xứng thì A, I, K, C thẳng hàng. Khi đó

$$2AB = AK + IC = AC + IK = \sqrt{2}AB + IK,$$

nên, $IK = (2-\sqrt{2})AB$. Do vậy

$$[\mathcal{C}] = \frac{\pi}{4}IK^2 = \frac{(3-2\sqrt{2})\pi}{2}AB^2 > (2-\sqrt{3})AB^2 = [\mathcal{S}].$$

Vậy diện tích của đường tròn $\mathcal{C}$ lớn hơn diện tích của hình vuông $\mathcal{S}$.



▷**8.41**. *Kí hiệu $u(k)$ là ước lẻ lớn nhất của số tự nhiên k. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{2^n} \cdot \sum_{k=1}^{2^n} \frac{u(k)}{k} \le \frac{2}{3}.$$

Lời giải: Đặt $v(k)$ là ước lớn nhất của k có dạng lũy thừa của 2, nên $u(k)v(k) = k$. Trong $\{1, 2, ..., 2^n\}$ có 2^{n-i-1} giá trị của k sao cho $v(k) = 2^i$ với $i \leq n-1$, và một giá trị sao cho $v(k) = 2^n$. Do đó, vế trái bằng

$$\frac{1}{2^n} \cdot \sum_{k=1}^{2^n} \frac{u(k)}{k} = \frac{1}{4^n} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2^{n-i-1}}{2^{n+i}}.$$

Từ tổng của chuỗi hình học ta có

$$\frac{1}{2^n} \cdot \sum_{k=1}^{2^n} \frac{u(k)}{k} = 4^{-n} + \frac{2}{3}(1 - 4^{-n}) > \frac{2}{3}.$$

▷**8.42**. *Tìm tất cả các số thực thỏa mãn hệ*

$$\begin{aligned} x^3 &= 2y - 1 \\ y^3 &= 2z - 1 \\ z^3 &= 2x - 1. \end{aligned}$$

Lời giải: Trước hết ta chỉ ra rằng $x = y = z$. Giả sử trái lại rằng $x \neq y$. Nếu $x > y$, thì $y = (x^3+1)/2 > (y^3+1)/2 = z$, nên $y > z$, và tương tự $z > x$, mâu thuẫn. Tương tự, nếu $x < y$ thì $y < z$ và $z < x$, mẫu thuẫn. Nên các nghiệm của hệ phương trình có dạng $x = y = z = t$ với t là nghiệm của phương trình $t^3 = 2t - 1$. Vậy, nghiệm của hệ phương trình là

$$x = y = z = t,\, t \in \left\{1, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}.$$

▷**8.43**. *Định nghĩa các hàm số*

$$\begin{aligned} f(x) &= x^5 + 5x^4 + 5x^3 + 5x^2 + 1 \\ g(x) &= x^5 + 5x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 1. \end{aligned}$$

Tìm tất cả các số nguyên tố p mà tồn tại số tự nhiên $0 \leq x < p$, sao cho cả $f(x)$ và $g(x)$ đều chia hết cho p, và với từng giá trị của p, hãy tìm tất cả các giá trị của x tương ứng.

Lời giải: Chú ý rằng

$$f(x) + g(x) = 2x^3(x + 1)(x + 4).$$

Nên nếu p là ước của $f(x)$ và $g(x)$ thì vì p là số nguyên tố nên p phải là ước của ít nhất một trong các số sau $2, x, x + 1, x + 4$. Từ $f(0) = 1$ và $f(1) = 17$ dẫn đến $p \neq 2$. Hơn nữa, p cũng không thể là ước của x, vì khi đó, $f(x) \equiv 1 \pmod p$ là vô lí. Nếu p là ước của $x + 1$ thì $f(x) \equiv 5 \pmod p$, kéo theo, p là ước của 5 nên $p = 5$ và có ngay rằng $x = 4$. Trường hợp p là ước của $x + 4$ thì $f(x) \equiv 17 \pmod p$ nên $p = 17$ và dễ thấy $x = 13$ là thỏa mãn.
Vậy các lời giải của bài toán là $p = 5$, $x = 4$ và $p = 17$, $x = 13$.

Chương 9

Đề thi olympic Irland

▷**9.44**. *Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) sao cho $1 + 1996x + 1998y = xy$*

Lời giải: Ta có: $(x - 1998)(y - 1996) = xy - 1998y - 1996x + 1996.1998 = 1997^2$

Do 1997 là số nguyên tố, nên ta có: $x - 1998 = \pm 1; \pm 1997; \pm 1997^2$. Vậy có 6 giá trị (x, y) thỏa mãn là

$$(x, y) = \left(1999, 1997^2 + 1996\right), \left(1997, -1997^2 + 1996\right),$$

$$(3995, 3993), (1, -1) \left(1997^2 + 1998, 1997\right), \left(-1997^2 + 1998, 195\right)$$

▷**9.45**. *Cho ΔABC, M là điểm trong tam giác. Goi D,E,F lần lượt là hình chiếu của M xuống BC, CA, AD. Tìm tập hợp tất cả các điểm M thỏa mãn $\widehat{FDE} = \frac{\pi}{2}$.*

Lời giải: Từ các tứ giác nội tiếp MDBF và MDCE ta có $\widehat{MDE} = \widehat{MCE}$ và $\widehat{MDF} = \widehat{MBE}$ do đó $\widehat{FDE} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \widehat{MCB} + \widehat{MBC} = \frac{\pi}{6}$ hay $\widehat{BMC} = \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow$ M nằm trên cung tròn đi qua B và C.

▷**9.46**. *Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ sao cho đối với mọi x ta có :*

$$(x - 16) P(2x) = 16(x - 1) P(x).$$

Lời giải: Goi $d = degP$ và a là hệ số của x trong $P(x)$ với số mũ lớn nhất. Khi đó hệ số của x mũ lớn nhất ở bên trái là $2^d a$ phải bằng $16a$ do đó $d = 4$ Do vế phải lúc này chia hết cho $(x-1)$, nhưng trong trường hợp đó vế phải lại chia hết cho $(x-2)$, tương tự là chia hết cho $(x-4)$ và $(x-8)$. Vậy đa thức $P(x)$ là bội của $(x-1)(x-2)(x-4)(x-8)$ là tất cả các đa thức thỏa mãn.

▷**9.47**. *Cho a, b, c là các số thức không âm sao cho $a+b+c \geq abc$. Chứng minh rằng $a^2+b^2+c^2 \geq abc$.*

Lời giải: Giả sử phản chứng rằng với $a, b, c > 0$ mà $a^2+b^2+c^2 < abc$ do đó $abc > a^2 \Rightarrow a < bc$. Làm tương tự ta cũng có $b < ca, c < ab$. Do đó $abc \geq a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$. Theo bất đẳng thức AM-GM và $ab+bc+ca > a+b+c$ suy ra $abc > a+b+c$. Trái với giả thiết. Vậy bài toán được chứng minh.

▷**9.48**. *Cho tập hợp $S = \{3, 5, 7, ...\}$. Với mỗi $x \in S$ ta đặt $\delta(x)$ là xác định một số nguyên duy nhât sao cho: $2^{\delta(x)} < x < 2^{\delta(x)+1}$*
Đối với $a, b \in S$ ta định nghĩa phép toán

$$a * b = 2^{\delta(a)-1}(b-3) + a$$

a, Chứng minh rằng nếu $a, b \in S$ thì $a * b \in S$
b, Chứng minh rằng nếu $a, b, c \in S$ thì $(a * b) * c = a * (b * c)$.

Lời giải: a, Hiển nhiên
b, Nếu $2^m < a < 2^{m+1}, 2^n < b < 2^{n+1}$ thì

$$a * b = 2^{m-1}(b-3) + a \geq 2^{m-1}(2^n - 2) + 2^m + 1 = 2^{n+m-1} + 1$$

và $a * b \leq 2^{m-1}(2^{n+1} - 4) + 2^{m+1} - 1 = 2^{m+n} - 1$. Vì vậy $\delta(a * b) = m + n - 1$
Nếu $2^p < c < 2^{p+1}$ thì

$$(a * b) * c = \left(2^{m-1}(b-3) + a\right) * c = 2^{m+n-2}(c-3) + 2^{m-1}(b-3) + a$$

Và

$$a * (b * c) = a * \left(2^{m-1}(c-3) + b\right) = 2^{m-1}\left(2^{n-1}(c-3) + b - 3\right) + a = (a * b) * c.$$

▷**9.49**. *Cho tứ giác lồi $ABCD$ có một đường tròn nội tiếp. Nếu*

$$A = B = \frac{2\pi}{3}, D = \frac{\pi}{2}, BC = 1$$

Tìm độ dài AD

Lời giải: Goi I là tâm đường tròn nôi tiếp . Do ΔABC là tam giác đều, $\widehat{BIC} = 105^0, \widehat{ICB} = 15^0, \widehat{AID} = 75^0, \widehat{IDA} = 45^0$ nên

$$AD = \frac{BI}{BC}\frac{AD}{AI} = \frac{\sin 15^0}{\sin 105^0}\frac{\sin 75^0}{\sin 45^0} = \sqrt{2}\sin 15^0.$$

▷**9.50**. *Gọi A là tập con của $\{0, 1, 2, ..., 1997\}$ gồm hơn 1000 phần tử. Chứng minh rằng A chỉ gồm những lũy thừa của 2 hoặc hai phần tử phân biệt có tổng là lũy thừa của 2.*

Lời giải: Giả sử tập A không thỏa mãn bài toán. Khi đó A sẽ bao gồm hơn nửa số nguyên từ 51 tới 1997 mà chúng được chia thành từng cặp có tổng là 2048 $(VD : 51 + 1997 = 2048...)$. Tương tự như vậy, A bao gồm nhiều nhất nửa số nguyên từ 14 tới 50, gồm nhiều nhất nửa số nguyên từ 3 tới 13, và có thể cả số 0, do đó A có tổng cộng $937 + 18 + 5 + 1 = 997$ số nguyên, trái với giả thiết A gồm hơn 1000 số nguyên từ tập $\{0, 1, 2, ..., 1997\}$.

▷**9.51**. *Xác định số tự nhiên n thỏa mãn những điều kiện sau:*
a, Khai triển thập phân của n gồm 1000 số
b, Tất cả các số trong khai triển là số lẻ.
c, Hai phần tử bất kỳ liền nhau trong khai triển của n hơn kém nhau 2 đơn vị

Lời giải: Đặt a_n, b_n, c_n, d_n, e_n là số trong khai triển của n, đó là những số lẻ và hai số liên tiếp khác nhau 2 đơn vị do đó tận cùng theo thứ tự là $1, 3, 5, 7, 9$ do đó

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \\ e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \\ d_{n+1} \\ e_{n+1} \end{pmatrix}$$

Gọi A là ma trận vuông trong biểu thức đó. Ta tìm giá trị riêng của của A, giả sử $Av = \lambda v$ với $v = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$. Do đó

$$\begin{aligned} v_2 &= \lambda v_1 \\ v_3 &= \lambda v_2 - v_1 = (\lambda^2 - 1)\, v_1 \\ v_4 &= \lambda v_3 - v_2 = (\lambda^3 - 2\lambda)\, v_1 \\ v_5 &= \lambda v_4 - v_3 = (\lambda^4 - 3\lambda^2 + 1)\, v_1 \end{aligned}$$

và $v_4 = \lambda v_5$, do đó $\lambda^5 - 3\lambda^3 + \lambda = \lambda^3 - 2\lambda$. Giải pt này ta được $\lambda = 0, \lambda = \pm 1, \lambda = \pm\sqrt{3}$ tương ứng ta có các vectơ riêng x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 là

$$(1, 0, -1, 0, 1)\,, (1, 1, 0, -1, -1)\,, (1, -1, 0, 1, -1)\,, \left(1, \pm\sqrt{3}, 2, \pm\sqrt{3}, 1\right)$$

và

$$(1, 1, 1, 1, 1) = \frac{1}{3}x_1 \frac{2+\sqrt{3}}{6}x_4 + \frac{2-\sqrt{3}}{6}x_5$$

Vì vậy

$$\begin{aligned} (a_{1000}, &b_{1000}, c_{1000}, d_{1000}, e_{1000}) = \\ &= 3^{\frac{999}{2}} \frac{2+\sqrt{3}}{6}\left(1, \sqrt{3}, 2, \sqrt{3}, 1\right) - \frac{2-\sqrt{3}}{6}\left(1, -\sqrt{3}, 2, -\sqrt{3}, 1\right) \\ &= \left(3^{499}, 2.3^{499}, 2.3^{499}, 2.3^{499}, 3^{499}\right) \end{aligned}$$

Vì thế kết quả của bài toán là 8.3^{499}.