

MỤC LỤC

	▶ BÀI 2. CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI LƯỢNG GIÁC.....	2
	Ⓐ. Tóm tắt kiến thức
2	
	Ⓑ. Phân dạng toán cơ bản
3		
	•Dạng ❶: Tính giá trị của các biểu thức chứa giá trị lượng giác.....	3
	•Dạng ❷: Giá trị lượng giác của góc lượng giác.....	8
	•Dạng ❸: Ứng dụng.....	11
	Ⓒ. Dạng toán rèn luyện
13		
	•Dạng ❶: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.....	13
	•Dạng ❷: Câu trắc nghiệm đúng, sai.....	31
	•Dạng ❸: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.....	44

A. Tóm tắt kiến thức

1. Công thức cộng

- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b; \sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b;$
- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b; \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b;$
- $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$
- $\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

(khi các biểu thức đều có nghĩa).

2. Công thức nhân đôi

- $\sin 2a = 2 \sin a \cos a;$
- $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$
- $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$

(khi các biểu thức đều có nghĩa).

3. Công thức hạ bậc

- $\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2};$
- $\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}.$

4. Công thức biến đổi tích thành tổng

- $\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a + b) + \cos(a - b)]$
- $\sin a \sin b = -\frac{1}{2}[\cos(a + b) - \cos(a - b)]$
- $\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a + b) + \sin(a - b)].$

5. Công thức biến đổi tổng thành tích

- $\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2};$ • $\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$
- $\cos u - \cos v = -2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2};$ • $\sin u - \sin v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}.$

ⓑ. Phân dạng toán cơ bản

• **Dạng ①: Tính giá trị của các biểu thức chứa giá trị lượng giác**

☞ **Các ví dụ minh họa**

Câu 1: Cho $\tan(a+b)=3, \tan(a-b)=2$. Tính $\tan 2a, \tan 2b$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \tan 2a = \tan[(a+b)+(a-b)] = \frac{\tan(a+b) + \tan(a-b)}{1 - \tan(a+b) \cdot \tan(a-b)} = \frac{3+2}{1-3 \cdot 2} = -1;$$

$$\tan 2b = \tan[(a+b)-(a-b)] = \frac{\tan(a+b) - \tan(a-b)}{1 + \tan(a+b) \cdot \tan(a-b)} = \frac{3-2}{1+3 \cdot 2} = \frac{1}{7}.$$

Câu 2: Cho $\sin a = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Tính $\cos 2a, \cos 4a$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \cos 2a = 1 - 2\sin^2 a = 1 - 2 \cdot \frac{4}{5} = -\frac{3}{5};$$

$$\cos 4a = 2\cos^2 2a - 1 = 2 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)^2 - 1 = -\frac{7}{25}.$$

Câu 3: Cho $\cos 2x = \frac{1}{4}$. Tính:

$$A = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right); B = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

Lời giải

$$A = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \left\{ \cos\left[\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right] + \cos\left[\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right] \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\cos 2x + \cos \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{8}$$

$$B = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \left\{ \cos\left[\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right] - \cos\left[\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right] \right\}$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\cos 2x - \cos \frac{2\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) = -\frac{3}{8}$$

Câu 4: Không dùng máy tính cầm tay, tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\sin \frac{7\pi}{12}$

b) $\cos \frac{5\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12}$

$$c) \sin \frac{\pi}{24} \sin \frac{5\pi}{24}$$

Lời giải

$$a) \sin \frac{7\pi}{12} = \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right) = \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4};$$

$$b) \cos \frac{5\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12} = 2 \cos \frac{\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{12}}{2} \cos \frac{\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{12}}{2} = 2 \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2};$$

c)

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{24} \sin \frac{5\pi}{24} &= \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{24} - \frac{5\pi}{24} \right) - \cos \left(\frac{\pi}{24} + \frac{5\pi}{24} \right) \right] = \frac{1}{2} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) - \cos \frac{\pi}{4} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

Câu 5: Không dùng máy tính, hãy tính:

$$a) \cos 165^\circ;$$

$$b) \tan \frac{7\pi}{12}.$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \cos(165^\circ) &= \cos(120^\circ + 45^\circ) = \cos 120^\circ \cos 45^\circ - \sin 120^\circ \sin 45^\circ \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

$$\tan \frac{7\pi}{12} = \tan \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\tan \frac{\pi}{3} + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \frac{\pi}{3} \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{1 - 3} = -2 - \sqrt{3}$$

Câu 6: Tính giá trị của các biểu thức sau:

$$A = \cos 75^\circ \cdot \cos 15^\circ; \quad B = \sin \frac{11\pi}{2} \cos \frac{5\pi}{2}.$$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 A &= \cos 75^\circ \cdot \cos 15^\circ = \frac{1}{2} \left[\cos(75^\circ - 15^\circ) + \cos(75^\circ + 15^\circ) \right] \\
 &= \frac{1}{2} (\cos 60^\circ + \cos 90^\circ) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 0 \right) = \frac{1}{4} \\
 B &= \sin \frac{11\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2} \left[\sin \left(\frac{11\pi}{12} - \frac{5\pi}{12} \right) + \sin \left(\frac{5\pi}{12} + \frac{11\pi}{12} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\sin \left(\frac{\pi}{2} \right) + \sin \left(\frac{4\pi}{3} \right) \right] = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{-\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}
 \end{aligned}$$

Câu 7: Không dùng máy tính, tính giá trị của biểu thức sau

$$A = \frac{\sin \frac{\pi}{9} + \sin \frac{5\pi}{9}}{\cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{5\pi}{9}}$$

Lời giải

$$A = \frac{\sin \frac{\pi}{9} + \sin \frac{5\pi}{9}}{\cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{5\pi}{9}} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{2\pi}{9}}{2 \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{2\pi}{9}} = \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3}} = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

Câu 8: Biết $\sin a = \frac{1}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < a < \pi$. Hãy tính các giá trị lượng giác của góc $2a$.

Lời giải

Do $\frac{\pi}{2} < a < \pi$ nên $\cos a < 0$.

$$\Rightarrow \cos a = -\sqrt{1 - \sin^2 a} = -\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{Ta có: } \sin 2a = 2 \sin a \cos a = 2 \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3} \right) \cdot \frac{1}{3} = -\frac{4\sqrt{2}}{9};$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = \frac{8}{9} - \frac{1}{9} = \frac{7}{9};$$

$$\tan 2a = \frac{\sin 2a}{\cos 2a} = \frac{-4\sqrt{2}}{9} : \frac{7}{9} = -\frac{4\sqrt{2}}{7};$$

$$\cot 2a = \frac{1}{\tan 2a} = -\frac{7}{4\sqrt{2}} = -\frac{7\sqrt{2}}{8}.$$

Câu 9: Không dùng máy tính cầm tay. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\sin \frac{19\pi}{24} \cos \frac{37\pi}{24}$

b) $\cos \frac{41\pi}{12} - \cos \frac{13\pi}{12}$

$$c) \frac{\tan \frac{\pi}{7} + \tan \frac{3\pi}{28}}{1 + \tan \frac{6\pi}{7} \tan \frac{3\pi}{28}}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} a) \quad \sin \frac{19\pi}{24} \cos \frac{37\pi}{24} &= \frac{1}{2} \left[\sin \left(\frac{19\pi}{24} - \frac{37\pi}{24} \right) + \sin \left(\frac{19\pi}{24} + \frac{37\pi}{24} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\sin \left(-\frac{3\pi}{4} \right) + \sin \frac{7\pi}{3} \right] = \frac{1}{2} \left(-\sin \frac{3\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad \cos \frac{41\pi}{12} - \cos \frac{13\pi}{12} &= -2 \sin \frac{\frac{41\pi}{12} + \frac{13\pi}{12}}{2} \sin \frac{\frac{41\pi}{12} - \frac{13\pi}{12}}{2} = -2 \sin \frac{9\pi}{4} \sin \frac{7\pi}{6} \\ &= 2 \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad 40 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\tan \frac{\pi}{7} + \tan \frac{3\pi}{28}}{1 + \tan \frac{6\pi}{7} \tan \frac{3\pi}{28}} &= \frac{\tan \frac{\pi}{7} + \tan \frac{3\pi}{28}}{1 + \tan \left(\pi - \frac{\pi}{7} \right) \tan \frac{3\pi}{28}} = \frac{\tan \frac{\pi}{7} + \tan \frac{3\pi}{28}}{1 - \tan \frac{\pi}{7} \tan \frac{3\pi}{28}} \\ &= \tan \left(\frac{\pi}{7} + \frac{3\pi}{28} \right) = \tan \frac{\pi}{4} = 1. \end{aligned}$$

c)

Câu 10: Không sử dụng máy tính, tính các giá trị lượng giác của góc 105° .

Lời giải

$$\begin{aligned} \cos 105^\circ &= \cos(60^\circ + 45^\circ) = \cos 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \sin 45^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \\ \sin 105^\circ &= \sin(60^\circ + 45^\circ) = \sin 60^\circ \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \sin 45^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \\ \tan 105^\circ &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{\sqrt{2} - \sqrt{6}}; \cot 105^\circ = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{\sqrt{2} + \sqrt{6}} \end{aligned}$$

Câu 10: Cho $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\cos 2\alpha$;

b) $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$

c) $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$

Lời giải

Vì $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = -\frac{5}{13}$.

a) $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot \left(-\frac{5}{13}\right)^2 - 1 = -\frac{119}{169}$.

b) $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \sin \alpha \cos \frac{\pi}{3} + \cos \alpha \sin \frac{\pi}{3} = \frac{12}{13} \cdot \frac{1}{2} + \left(-\frac{5}{13}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{12 - 5\sqrt{3}}{26}$.

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{12}{13}}{-\frac{5}{13}} = -\frac{12}{5}$$

c) Ta có

$$\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \alpha + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \alpha \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{-\frac{12}{5} + 1}{1 - \left(-\frac{12}{5}\right) \cdot 1} = -\frac{7}{17}$$

Suy ra

Câu 11: Tính các giá trị lượng giác của góc α , biết $\cos 2\alpha = -\frac{7}{25}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Lời giải

Ta có $\cos 2\alpha = -\frac{7}{25}$ nên $2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha = -\frac{7}{25}$.

Suy ra $\cos^2 \alpha = \frac{9}{25}$ và $\sin^2 \alpha = \frac{16}{25}$.

Mà $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên $\cos \alpha > 0$ và $\sin \alpha > 0$.

Do đó $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ và $\sin \alpha = \frac{4}{5}$. Suy ra $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$

và $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{3}{4}$.

•Dạng ②: Giá trị lượng giác của góc lượng giác

☞ Các ví dụ minh họa

Câu 1: Cho $\cos(a+2b) = 2\cos a$. Chứng minh rằng: $\tan(a+b)\tan b = \frac{-1}{3}$.

Lời giải

Ta có: $\cos(a+2b) = 2\cos a \Leftrightarrow \cos[(a+b)+b] = 2\cos[(a+b)-b]$

$$\Leftrightarrow 3\sin(a+b)\sin b = -\cos(a+b)\cos b \Leftrightarrow \tan(a+b)\tan b = \frac{-1}{3}.$$

Câu 2: Cho tam giác ABC , chứng minh rằng:

a) $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$

(với điều kiện tam giác ABC không vuông);

b) $\tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \cdot \tan \frac{A}{2} = 1$;

Lời giải

a) Do $A+B = \pi - C$ nên $\tan(A+B) = -\tan C \Leftrightarrow \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = -\tan C$
 $\Leftrightarrow \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C.$

b) Do $\frac{A}{2} + \frac{B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$ nên $\tan\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) = \cot \frac{C}{2} \Leftrightarrow \frac{\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2}}{1 - \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2}} = \frac{1}{\tan \frac{C}{2}}$
 $\Leftrightarrow \tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \cdot \tan \frac{A}{2} = 1.$

Câu 3: Chứng minh các đẳng thức lượng giác sau:

a) $\sin(60^\circ + \alpha) - \sin(60^\circ - \alpha) = \sin \alpha$;

b) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4\alpha$;

c) $\sin \alpha (2 \cos 4\alpha + 2 \cos 2\alpha + 1) = \sin 5\alpha$;

d) $\frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{1 + \tan \alpha \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$.

Lời giải

a)

$$\begin{aligned} & \sin(60^\circ + \alpha) - \sin(60^\circ - \alpha) \\ &= (\sin 60^\circ \cos \alpha + \cos 60^\circ \sin \alpha) - (\sin 60^\circ \cos \alpha - \cos 60^\circ \sin \alpha) \\ &= 2 \cos 60^\circ \sin \alpha = 2 \cdot \frac{1}{2} \sin \alpha = \sin \alpha \end{aligned} \quad \text{b)}$$

$$\begin{aligned} \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha &= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \\ &= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha = 1 - \frac{1}{4} (1 - \cos 4\alpha) = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cos 4\alpha \\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4\alpha \end{aligned} \quad \text{c)}$$

$$\begin{aligned} & \sin \alpha (2 \cos 4\alpha + 2 \cos 2\alpha + 1) \\ &= 2 \sin \alpha \cos 4\alpha + 2 \sin \alpha \cos 2\alpha + \sin \alpha \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} [\sin(-3\alpha) + \sin 5\alpha] + 2 \cdot \frac{1}{2} [\sin(-\alpha) + \sin 3\alpha] + \sin \alpha \\ &= (-\sin 3\alpha + \sin 5\alpha) + (-\sin \alpha + \sin 3\alpha) + \sin \alpha = \sin 5\alpha \end{aligned}$$

$$\text{d) } \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} = \frac{\cos \alpha \cos \beta (1 + \tan \alpha \tan \beta)}{\cos \alpha \cos \beta (1 - \tan \alpha \tan \beta)} = \frac{1 + \tan \alpha \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

Câu 4: Rút gọn các biểu thức sau:

$$\text{a) } \frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha}$$

$$\text{b) } \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)};$$

$$\text{c) } \frac{\sin^2 \alpha}{4 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$$

Lời giải

$$\text{a) } \frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha} = \frac{\sin \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha}{1 + \cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha - 1} = \frac{\sin \alpha (1 + 2 \cos \alpha)}{\cos \alpha (1 + 2 \cos \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha;$$

$$\text{b) } \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} = \frac{-2 \sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{2\alpha}{2}}{2 \cos \frac{\pi}{2} \sin \frac{2\alpha}{2}} = -\frac{\sin \frac{\pi}{4} \sin \alpha}{\cos \frac{\pi}{4} \sin \alpha} = -\tan \frac{\pi}{4} = -1$$

$$c) \frac{\sin^2 \alpha}{4 - 4\sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\left(2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}\right)^2}{4 \left(1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{4 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

Câu 5: Chứng minh đẳng thức sau

$$\sin^4 a + \cos^4 a = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2a = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4a.$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \sin^4 a + \cos^4 a &= (\sin^2 a + \cos^2 a)^2 - 2 \sin^2 a \cos^2 a = 1 - 2 \cdot (\sin a \cos a)^2 \\ &= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2a = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \cos 4a}{2} \right) = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cos 4a = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4a \end{aligned}$$

Câu 6: Tính giá trị của các biểu thức sau:

$$a) A = \sin \frac{\pi}{9} - \sin \frac{5\pi}{9} + \sin \frac{7\pi}{9}$$

$$b) B = \sin 6^\circ \sin 42^\circ \sin 66^\circ \sin 78^\circ.$$

Lời giải

$$\begin{aligned} a) A &= \sin \frac{\pi}{9} - \sin \frac{5\pi}{9} + \sin \frac{7\pi}{9} = \left(\sin \frac{\pi}{9} + \sin \frac{7\pi}{9} \right) - \sin \frac{5\pi}{9} \\ &= 2 \sin \frac{4\pi}{9} \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{5\pi}{9} = \sin \frac{4\pi}{9} - \sin \frac{5\pi}{9} = 0. \end{aligned}$$

$$b) \text{ Vì } \sin 78^\circ = \cos 12^\circ; \sin 66^\circ = \cos 24^\circ; \sin 42^\circ = \cos 48^\circ \text{ nên}$$

$$B = \sin 6^\circ \cos 12^\circ \cos 24^\circ \cos 48^\circ.$$

Nhân hai vế với $\cos 6^\circ$ và áp dụng công thức góc nhân đôi, ta được:

$$\cos 6^\circ \cdot B = \cos 6^\circ \sin 6^\circ \cos 12^\circ \cos 24^\circ \cos 48^\circ = \frac{1}{16} \sin 96^\circ = \frac{1}{16} \sin(90^\circ + 6^\circ) = \frac{1}{16} \cos 6^\circ$$

$$\text{Vậy } B = \frac{1}{16}.$$

Câu 7: Chứng minh rằng:

$$a) \cos a - \sin a = \sqrt{2} \cos \left(a + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$b) \sin a + \sqrt{3} \cos a = 2 \sin \left(a + \frac{\pi}{3} \right).$$

Lời giải

a) Ta có

$$\begin{aligned}\sqrt{2} \cos\left(a + \frac{\pi}{4}\right) &= \sqrt{2} \left(\cos a \cos \frac{\pi}{4} - \sin a \sin \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos a - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin a \right) = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\cos a - \sin a) = \cos a - \sin a\end{aligned}$$

$$2 \sin\left(a + \frac{\pi}{3}\right) = 2 \left(\sin a \cos \frac{\pi}{3} + \cos a \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2 \left(\frac{1}{2} \sin a + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos a \right)$$

b) Ta có

$$= \sin a + \sqrt{3} \cos a.$$

Câu 8: Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta đều có

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

Lời giải

$$VT = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

Mặt khác, trong tam giác ABC , ta có $A+B+C = \pi$ nên $\frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$. Từ đó

$$\text{suy ra: } \sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2}, \sin \frac{C}{2} = \cos \frac{A+B}{2}.$$

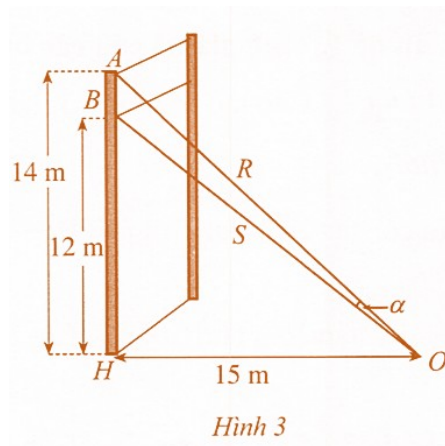
Vậy

$$\begin{aligned}VT &= 2 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{C}{2} \\ &= 2 \cos \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{A+B}{2} \right) = 4 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} = VP\end{aligned}$$

•Dạng ③: Ứng dụng

☞ Các ví dụ minh họa

Câu 1: Một sợi cáp R được gắn vào một cột thẳng đứng ở vị trí cách mặt đất $14m$. Một sợi cáp S khác cũng được gắn vào cột đó ở vị trí cách mặt đất $12m$. Biết rằng hai sợi cáp trên cùng được gắn với mặt đất tại một vị trí cách chân cột $15m$ (Hình 3).



- a) Tính $\tan \alpha$, ở đó α là góc giữa hai sợi cáp trên.
 b) Tính số đo góc α (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ).

Lời giải

a) Ta có: $\alpha = \widehat{AOH} - \widehat{BOH}$.

Trong tam giác vuông \widehat{AOH} , $\tan \widehat{AOH} = \frac{AH}{OH} = \frac{14}{15}$.

Trong tam giác vuông \widehat{BOH} , $\tan \widehat{BOH} = \frac{BH}{OH} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$.

$$\tan \alpha = \tan(\widehat{AOH} - \widehat{BOH}) = \frac{\tan \widehat{AOH} - \tan \widehat{BOH}}{1 + \tan \widehat{AOH} \cdot \tan \widehat{BOH}} = \frac{\frac{14}{15} - \frac{4}{5}}{1 + \frac{14}{15} \cdot \frac{4}{5}} = \frac{10}{131}$$

Vậy

b) Từ kết quả câu a ta có: $\alpha \approx 4^\circ$.

Câu 2: Trong vật lí, phương trình tổng quát của một vật dao động điều hòa cho bởi công thức $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, trong đó t là thời điểm (tính bằng giây), $x(t)$ là li độ của vật tại thời điểm t , A là biên độ dao động ($A > 0$) và $\varphi \in [-\pi; \pi]$ là pha ban đầu của dao động. Xét hai dao động điều hòa có phương trình:

$$x_1(t) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ (cm)}$$

$$x_2(t) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right) \text{ (cm)}$$

Tìm dao động tổng hợp $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ và sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích để tìm biên độ và pha ban đầu của dao động tổng hợp này

Lời giải

$$i x(t) = x_1(t) + x_2(t) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) + 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$i = 2 \left[2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{12}\right) \cos\frac{\pi}{4} \right] = 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{12}\right)$$

Biên độ là $A = 2\sqrt{2}$, pha ban đầu là $\varphi = \frac{-\pi}{12}$

©. Dạng toán rèn luyện

• Dạng ①: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1: Tính $\sin 105^\circ$ ta được:

- A. $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ B. $-\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ D. $-\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

Lời giải

Chọn C

Có: $\sin 105^\circ = \sin(60^\circ + 45^\circ) = \sin 60^\circ \cdot \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \cdot \sin 45^\circ$

$$\Rightarrow \sin 105^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

Câu 2: Tính $\tan 105^\circ$ ta được:

- A. $-(2 + \sqrt{3})$ B. $2 + \sqrt{3}$ C. $2 - \sqrt{3}$ D. $-(2 - \sqrt{3})$

Lời giải

Chọn A

Cách 1:
$$\tan 105^\circ = \frac{\sin 105^\circ}{\cos 105^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}{-\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}} = -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = -(2 + \sqrt{3})$$

Cách 2:
$$\tan 105^\circ = \tan(45^\circ + 60^\circ) = \frac{\tan 45^\circ + \tan 60^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 60^\circ} = \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} = -(2 + \sqrt{3})$$

Câu 3: Rút gọn biểu thức: $\cos 54^\circ \cos 4^\circ - \cos 36^\circ \cos 86^\circ$, ta được:

- A. $\cos 50^\circ$ B. $\cos 58^\circ$ C. $\sin 50^\circ$ D. $\sin 58^\circ$

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$$\cos 54^\circ \cos 4^\circ - \cos 36^\circ \cos 86^\circ = \cos 54^\circ \cos 4^\circ - \sin 54^\circ \sin 4^\circ = \cos(54^\circ + 4^\circ) = \cos 58^\circ$$

Câu 4: Rút gọn biểu thức $\cos(x + \frac{\pi}{4}) - \cos(x - \frac{\pi}{4})$ ta được

- A.** $\sqrt{2} \sin x$ **B.** $-\sqrt{2} \sin x$ **C.** $\sqrt{2} \cos x$ **D.** $-\sqrt{2} \cos x$

Lời giải**Chọn B**

$$\cos(x + \frac{\pi}{4}) - \cos(x - \frac{\pi}{4}) = -2 \sin\left(\frac{x + \frac{\pi}{4} + x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x + \frac{\pi}{4} - x + \frac{\pi}{4}}{2}\right)$$

Ta có:

$$= -2 \sin x \cdot \sin \frac{\pi}{4} = -\sqrt{2} \sin x$$

Câu 5: Giá trị của biểu thức $\cos \frac{37\pi}{12}$ bằng

- A.** $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ **B.** $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ **C.** $-\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ **D.** $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

Lời giải**Chọn C**

$$\cos \frac{37\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{7\pi}{12} + 2\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{7\pi}{12}\right)$$

Ta có:

$$= \cos \frac{\pi}{2} \cos \frac{7\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{7\pi}{12} = -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

Câu 6: Biểu thức $M = \cos(-53^\circ) \cdot \sin(-337^\circ) + \sin(307^\circ) \cdot \sin(113^\circ)$ có giá trị bằng:

- A.** $-\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Lời giải**Chọn A**

Ấn máy tính được đáp án ^A.

Câu 7: Rút gọn biểu thức: $\sin(a-17^\circ).\cos(a+13^\circ)-\sin(a+13^\circ).\cos(a-17^\circ)$,
ta được

- A. $\sin 2a$. B. $\cos 2a$. C. $-\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$\sin(a-17^\circ).\cos(a+13^\circ)-\sin(a+13^\circ).\cos(a-17^\circ)=\sin[(a-17^\circ)-(a+13^\circ)]$$

Ta có:

$$=\sin(-30^\circ)=-\frac{1}{2}$$

Câu 8: Giá trị của biểu thức $\cos\frac{37\pi}{12}$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. B. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. C. $-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. D. $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.

Lời giải

Chọn C

$$\cos\frac{37\pi}{12}=\cos\left(2\pi+\pi+\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{12}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=-\left(\cos\frac{\pi}{3}.\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}.\sin\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Câu 9: Rút gọn biểu thức: $\cos(120^\circ-x)+\cos(120^\circ+x)-\cos x$ ta được kết quả là

- A. 0. B. $-\cos x$. C. $-2\cos x$. D. $\sin x - \cos x$.

Lời giải

Chọn C

$$\cos(120^\circ-x)+\cos(120^\circ+x)-\cos x=-\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\cos x$$

$$=-2\cos x$$

Câu 10: Khẳng định nào dưới đây **SAI**?

- A. $2\sin^2 a = 1 - \cos 2a$ B. $\cos 2a = 2\cos a - 1$
C. $\sin 2a = 2\sin a \cos a$ D. $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

Lời giải

Chọn B

Có $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$ nên **Chọn B** sai.

Câu 11: Gọi $M = \cos^4 15^\circ - \sin^4 15^\circ$ thì:

- A.** $M = 1$. **B.** $M = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $M = \frac{1}{4}$. **D.** $M = 0$.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} M &= \cos^4 15^\circ - \sin^4 15^\circ = (\cos^2 15^\circ)^2 - (\sin^2 15^\circ)^2 = (\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ)(\cos^2 15^\circ + \sin^2 15^\circ) \\ &= \cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ = \cos(2 \cdot 15^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Câu 12: Giá trị đúng của $\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$ bằng

- A.** $\frac{1}{2}$. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $-\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Sử dụng máy tính dễ dàng có được đáp án B .

Câu 13: Cho hai góc nhọn a và b . Biết $\cos a = \frac{1}{3}$, $\cos b = \frac{1}{4}$.

Giá trị $\cos(a+b) \cdot \cos(a-b)$ bằng

- A.** $-\frac{113}{144}$. **B.** $-\frac{115}{144}$. **C.** $-\frac{117}{144}$. **D.** $-\frac{119}{144}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có :

$$\cos(a+b) \cdot \cos(a-b) = \frac{1}{2}(\cos 2a + \cos 2b) = \cos^2 a + \cos^2 b - 1 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 1 = -\frac{119}{144}$$

Câu 14: Nếu biết $\sin a = \frac{8}{17}$, $\tan b = \frac{5}{12}$ và a, b đều là các góc nhọn và dương thì $\sin(a - b)$ là:

- A. $\frac{20}{220}$ B. $-\frac{20}{220}$ C. $\frac{21}{221}$ D. $\frac{22}{221}$

Lời giải

Chọn C

Ta có a, b đều là các góc nhọn và dương.

$$\sin a = \frac{8}{17} \Rightarrow \cos a = \sqrt{1 - \frac{64}{289}} = \frac{15}{17}$$

$$\tan b = \frac{5}{12} \Rightarrow \cos b = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{25}{144}}} = \frac{12}{13} \Rightarrow \sin b = \tan b \cdot \cos b = \frac{5}{13}$$

$$\Rightarrow \sin(a - b) = \frac{8}{17} \cdot \frac{12}{13} - \frac{15}{17} \cdot \frac{5}{13} = \frac{21}{221}$$

Câu 15: Nếu $\tan x = 0.5$; $\sin y = \frac{3}{5}$ ($0 < y < 90^\circ$) thì $\tan(x + y)$ bằng:

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

Lời giải

Chọn A

$$\tan x = 0.5 = \frac{1}{2}, \sin y = \frac{3}{5} \quad (0 < y < 90^\circ) \Rightarrow \cos y = \frac{4}{5} \Rightarrow \tan y = \frac{3}{4}$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}} = 2$$

Câu 16: Gọi $M = \tan x - \tan y$ thì:

- A. $M = \tan(x - y)$ B. $M = \frac{\sin(x + y)}{\cos x \cdot \cos y}$
- C. $M = \frac{\sin(x - y)}{\cos x \cdot \cos y}$ D. $M = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y}$

Lời giải

Chọn C

$$M = \tan x - \tan y = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin x \cos y - \cos x \sin y}{\cos x \cos y} = \frac{\sin(x - y)}{\cos x \cos y}$$

Ta có:

Câu 17: Gọi $M = \cos(a+b) \cdot \cos(a-b) - \sin(a+b) \cdot \sin(a-b)$ thì:

A. $M = 1 - 2\cos^2 a$

B. $M = 1 - 2\sin^2 a$

C. $M = \cos 4a$

D. $M = \sin 4a$

Lời giải

Chọn B

$$M = \cos(a+b) \cdot \cos(a-b) - \sin(a+b) \cdot \sin(a-b)$$

Ta có:

$$= \cos(a+b+a-b) = \cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$$

Câu 18: Nếu $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$ thì $\sin 2x$ bằng

A. $\frac{3}{4}$

B. $\frac{3}{8}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D. $-\frac{3}{4}$

Lời giải

Chọn D

$$\sin x + \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{-3}{4}$$

Ta có

Câu 19: Biết $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Giá trị của $P = \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$ là

A. $P = 0$

B. $P = -1$

C. $P = \frac{1}{2}$

D. $P = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{1}{2}$$

$$\text{Từ } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \cos \alpha < 0 \text{ nên } \cos \alpha = -\frac{1}{2}$$

Do đó
$$P = \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \cos 2\alpha \cos \frac{\pi}{3} + \sin 2\alpha \sin \frac{\pi}{3}$$

$$= (2\cos^2 \alpha - 1) \cdot \frac{1}{2} + 2\sin \alpha \cos \alpha \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos^2 \alpha - \frac{1}{2} + \sqrt{3} \sin \alpha \cos \alpha = -1$$

Câu 20: Biểu thức $\frac{1 + \sin 4\alpha - \cos 4\alpha}{1 + \sin 4\alpha + \cos 4\alpha}$ có kết quả rút gọn bằng:

- A. $\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$ B. $\frac{\cos 2\alpha}{\tan 2\alpha}$ C. $\frac{\tan 2\alpha}{\cot 2\alpha}$ D. $\frac{\cot 2\alpha}{\tan 2\alpha}$

Lời giải

Chọn C

$$\frac{1 + \sin 4\alpha - \cos 4\alpha}{1 + \sin 4\alpha + \cos 4\alpha} = \frac{2\sin^2 2\alpha + 2\sin 2\alpha \cos 2\alpha}{2\cos^2 2\alpha + 2\sin 2\alpha \cos 2\alpha} = \frac{2\sin 2\alpha(\sin 2\alpha + \cos 2\alpha)}{2\cos 2\alpha(\sin 2\alpha + \cos 2\alpha)} = \tan 2\alpha$$

Câu 21: Biểu thức $\frac{3 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}$ có kết quả rút gọn bằng:

- A. $-\tan^4 \alpha$ B. $\tan^4 \alpha$ C. $-\cot^4 \alpha$ D. $\cot^4 \alpha$

Lời giải

Chọn B

$$\frac{3 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha} = \frac{3 - 4(1 - 2\sin^2 \alpha) + 2(1 - 2\sin^2 \alpha)^2 - 1}{3 + 4(2\cos^2 \alpha - 1) + 2(2\cos^2 \alpha - 1)^2 - 1}$$

$$= \frac{8\sin^2 \alpha - 8\sin^2 \alpha + 8\sin^4 \alpha}{8\cos^2 \alpha - 8\cos^2 \alpha + 8\cos^4 \alpha} = \tan^4 \alpha.$$

Câu 22: Khi $\alpha = \frac{\pi}{6}$ thì biểu thức $\frac{\sin^2 2\alpha + 4\sin^4 \alpha - 4\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{4 - \sin^2 2\alpha - 4\sin^2 \alpha}$ có giá trị bằng.

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{9}$ D. $\frac{1}{12}$

Lời giải

Chọn C

$$\frac{\sin^2 2\alpha + 4\sin^4 \alpha - 4\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{4 - \sin^2 2\alpha - 4\sin^2 \alpha} = \frac{4\sin^4 \alpha}{4(1 - \sin^2 \alpha) - 4\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}$$

$$= \frac{\sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha(1 - \sin^2 \alpha)} = \frac{\sin^4 \alpha}{\cos^4 \alpha} = \tan^4 \alpha \Rightarrow \text{BT} = \tan^4 \left(\frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{9}.$$

Câu 23: Nếu $\tan \frac{x}{2} = \frac{a}{b}$ thì biểu thức $a \sin x + b \cos x$ bằng:

- A. a . B. b . C. $\frac{a+b}{a}$. D. $\frac{a+b}{b}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = \tan \frac{x}{2} = \frac{a}{b}$ nên

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} = \frac{2\frac{a}{b}}{1+\frac{a^2}{b^2}} = \frac{2ab}{a^2+b^2} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{1-\frac{a^2}{b^2}}{1+\frac{a^2}{b^2}} = \frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}$$

$$a \sin x + b \cos x = \frac{2a^2b}{a^2+b^2} + \frac{b^3 - a^2b}{a^2+b^2} = b$$

Vậy

Câu 24: Nếu $\tan \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$ thì giá trị của biểu thức $\frac{\sin x}{2 - 3 \cos x}$ bằng.

- A. 1 . B. 2 . C. 3 . D. 4 .

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = \tan \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$ nên

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} = \frac{2\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{4}} = \frac{4}{5} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{\sin x}{2 - 3 \cos x} = \frac{\frac{4}{5}}{2 - \frac{9}{5}} = 4$$

Vậy

Câu 25: Biết $\sin x = \frac{1}{3}$ và $90^\circ < x < 180^\circ$ thì biểu thức $\frac{1 + \sin 2x + \cos 2x}{1 + \sin 2x - \cos 2x}$ có giá trị bằng:

- A. $2\sqrt{2}$. B. $\frac{1}{2\sqrt{2}}$. C. $-2\sqrt{2}$. D. $\frac{-1}{2\sqrt{2}}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\sin x = \frac{1}{3}$ và $90^\circ < x < 180^\circ$.

$$\Rightarrow \cos x = \frac{-2\sqrt{2}}{3} \quad \sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \frac{-4\sqrt{2}}{9} \quad \cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x = \frac{7}{9}$$

$$\frac{1 + \sin 2x + \cos 2x}{1 + \sin 2x - \cos 2x} = \frac{1 - \frac{4\sqrt{2}}{9} + \frac{7}{9}}{1 - \frac{4\sqrt{2}}{9} - \frac{7}{9}} = -2\sqrt{2}$$

thay vào biểu thức ta được:

Câu 26: Rút gọn biểu thức $P = \cos(120^\circ + x) + \cos(120^\circ - x) - \cos x$ ta được kết quả là:

- A. 0 B. $-\cos x$ C. $-2\cos x$ D. $\sin x - \cos x$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $P = 2 \cos 120^\circ \cos x - \cos x = -\cos x - \cos x = -2\cos x$

Câu 27: Tích số $\cos 10^\circ \cdot \cos 30^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 70^\circ$ bằng

- A. $\frac{1}{16}$ B. $\frac{1}{8}$ C. $\frac{3}{16}$ D. $\frac{1}{4}$

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \cos 10^\circ \cdot \cos 30^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 70^\circ &= \cos 10^\circ \cdot \cos 30^\circ \cdot \frac{1}{2} (\cos 120^\circ + \cos 20^\circ) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left(-\frac{\cos 10^\circ}{2} + \frac{\cos 30^\circ + \cos 10^\circ}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{3}}{16} \end{aligned}$$

Câu 28: Cho biểu thức $A = \sin^2(a+b) - \sin^2 a - \sin^2 b$. Hãy chọn kết quả đúng

- A. $A = 2 \cos a \cdot \sin b \cdot \sin(a+b)$ B. $A = 2 \sin a \cdot \cos b \cdot \cos(a+b)$
 C. $A = 2 \cos a \cdot \cos b \cdot \cos(a+b)$ D. $A = 2 \sin a \cdot \sin b \cdot \cos(a+b)$

Lời giải

Chọn D

Ta có :

$$\begin{aligned}
 A &= \sin^2(a+b) - \sin^2 a - \sin^2 b = \sin^2(a+b) - \frac{1 - \cos 2a}{2} - \frac{1 - \cos 2b}{2} \\
 &= \sin^2(a+b) - 1 + \frac{1}{2}(\cos 2a + \cos 2b) = -\cos^2(a+b) + \cos(a+b)\cos(a-b) \\
 &= \cos(a+b)[\cos(a-b) - \cos(a+b)] = 2\sin a \sin b \cos(a+b)
 \end{aligned}$$

Câu 29: Cho $M = 5 - 2\sin^2 x$. Khi đó giá trị lớn nhất của M là

- A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{5}{2}$ C. $\frac{6}{2}$ D. $\frac{7}{2}$

Lời giải

Chọn B

$0 \leq \sin^2 x \leq 1, \forall x \in R \Leftrightarrow 0 \geq -2\sin^2 x \geq -2, \forall x \in R \Leftrightarrow 5 \geq 5 - 2\sin^2 x \geq 3, \forall x \in R$
Ta có:

Giá trị lớn nhất là $\frac{5}{2}$.

Câu 30: Giá trị lớn nhất của biểu thức $M = 7\cos^2 x - 2\sin^2 x$ là

- A. $-\frac{2}{3}$ B. $\frac{5}{3}$ C. $\frac{7}{3}$ D. $\frac{16}{3}$

Lời giải

Chọn C

$$M = 7(1 - \sin^2 x) - 2\sin^2 x = 7 - 9\sin^2 x$$

$0 \leq \sin^2 x \leq 1$
Ta có:

$$\Leftrightarrow 0 \geq -9\sin^2 x \geq -9, \forall x \in R$$

$$\Leftrightarrow 7 \geq 7 - 2\sin^2 x \geq -2$$

Giá trị lớn nhất là $\frac{7}{3}$.

Câu 31: Cho $M = 6\cos^2 x + 5\sin^2 x$. Khi đó giá trị lớn nhất của M là

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{5}{2}$ C. $\frac{6}{2}$ D. $\frac{11}{2}$

Lời giải

Chọn C

$$\Rightarrow \sin \frac{C}{2} = \cos \frac{A+B}{2}; \cos \frac{C}{2} = \sin \frac{A+B}{2}; \tan \frac{C}{2} = \cot \frac{A+B}{2}; \cot \frac{C}{2} = \tan \frac{A+B}{2}.$$

Câu 34: Biết $\cot x = \frac{3}{4}, \cot y = \frac{1}{7}$, x, y đều là góc dương, nhọn thì:

- A. $x+y = \frac{\pi}{4}$ B. $x+y = \frac{2\pi}{3}$ C. $x+y = \frac{3\pi}{4}$ D. $x+y = \frac{5\pi}{6}$

Lời giải

Chọn C

$$\cot x = \frac{3}{4} \Rightarrow \tan x = \frac{4}{3}; \cot y = \frac{1}{7} \Rightarrow \tan y = 7 \quad t = \tan \frac{x}{2} = 2$$

Câu 35: Nếu biết $\begin{cases} \tan a + \tan b = 2 \\ \tan(a+b) = 4 \end{cases}$ thì các giá trị của $\tan a, \tan b$ bằng:

- A. $\frac{1}{3}, \frac{5}{3}$ hoặc ngược lại. B. $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ hoặc ngược lại.
 C. $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ hoặc ngược lại. D. $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ hoặc ngược lại.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{cases} \tan a + \tan b = 2 \\ \tan(a+b) = 4 \end{cases}$$

Ta có

$$\tan(a+b) = 4 \Leftrightarrow \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} = 4 \Rightarrow 2 = 4 - 4 \tan a \tan b \Rightarrow \tan a \tan b = \frac{1}{2}$$

từ

$$\Rightarrow \tan a, \tan b \text{ theo thứ tự là nghiệm của phương trình } X^2 - 2X + \frac{1}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \tan a = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \tan b = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ hoặc ngược lại.}$$

Câu 36: Hãy xác định hệ thức sai:

$$\sin x \cdot \cos^3 x - \cos x \sin^3 x = \frac{\sin 4x}{4}$$

A.

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3 + \cos 4x}{4}$$

B.

$$\frac{1 + \sin x}{\cos x} = \cot\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$$

C.

$$\cot^2 x + \tan^2 x = \frac{2 \cos 4x + 6}{1 - \cos 4x}$$

D.

Lời giải

Chọn C

$$\sin x \cdot \cos^3 x - \cos x \sin^3 x = \sin x \cdot \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{1}{2} \sin 2x \cdot \cos 2x = \frac{\sin 4x}{4}$$

A.

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \cos 4x}{2} \right) = \frac{3 + \cos 4x}{4}$$

B.

$$\frac{1 + \sin x}{\cos x} = \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} = \frac{2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$$

C.

$$\cot^2 x + \tan^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^4 x + \sin^4 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} = \frac{\frac{3 + \cos 4x}{4}}{\frac{1 - \cos 4x}{8}} = \frac{2 \cos 4x + 6}{1 - \cos 4x}$$

D.

Câu 37: Trong các hệ thức sau, hệ thức nào **sai**?

$$\frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x} = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$$

A.

$$4 \sin a \cdot \cos a (1 - 2 \sin^2 a) = \sin 4a$$

B.

$$\cos 4a = 8 \cos^4 a - 8 \cos^2 a + 1$$

C.

$$\cos 4a - 4 \cos 2a + 3 = 8 \cos^4 a$$

D.

Lời giải

Chọn D

$$\frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{(\cos x - \sin x)(\sin x + \cos x)}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$$

A.

$$4 \sin a \cdot \cos a (1 - 2 \sin^2 a) = 2 \sin 2a \cdot \cos 2a = \sin 4a$$

B.

$$\cos 4a = 2 \cos^2 2a - 1 = 2(2 \cos^2 a - 1)^2 - 1 = 8 \cos^4 a - 8 \cos^2 a + 1$$

C.

$$\cos 4a - 4 \cos 2a + 3 = 2(1 - 2 \sin^2 a)^2 - 1 - 4(1 - 2 \sin^2 a) + 3 = 8 \sin^4 a$$

D.

Câu 38: Nếu $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ thì giá trị của $\cos 4\alpha$ là:

A. $\frac{527}{625}$

B. $-\frac{527}{625}$

C. $\frac{524}{625}$

D. $-\frac{524}{625}$

Lời giải

Chọn B

$$\sin \alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos 2\alpha = 1 - 2\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{-7}{25} \Rightarrow \cos 4\alpha = 2 \cos^2 2\alpha - 1 = 2 \frac{49}{625} - 1 = \frac{98 - 625}{625} = \frac{-527}{625}$$

Câu 39: Nếu $\sin a - \cos a = \frac{1}{5}$ ($135^\circ < a < 180^\circ$) thì giá trị đúng của $\tan 2a$ là:

A. $-\frac{20}{7}$

B. $\frac{20}{7}$

C. $\frac{24}{7}$

D. $-\frac{24}{7}$

D.

Lời giải

Chọn C

$$\sin a - \cos a = \frac{1}{5} \Rightarrow 1 - \sin 2a = \frac{1}{25} \Rightarrow \sin 2a = \frac{24}{25} \Rightarrow \cos 2a = \sqrt{1 - \frac{576}{625}} = \frac{7}{25} \Rightarrow \tan 2a = \frac{24}{7}$$

Câu 40: Trong các mệnh đề sau. Mệnh đề nào **sai**.

A. $4 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \left(30^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin \left(60^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = \sin \frac{3\alpha}{2}$

B. $\cos 10^\circ \cdot \cos 30^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 70^\circ = \frac{\sqrt{3}}{16}$

$$4 \sin \frac{a}{3} \cdot \sin \frac{\pi+a}{3} \cdot \sin \frac{\pi-a}{3} = \sin a$$

C.

$$4 \cos \frac{a}{3} \cdot \cos \frac{\pi+a}{3} \cdot \cos \frac{\pi-a}{3} = \cos a$$

D.

Lời giải

Chọn B

$$4 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \left(30^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) \cdot \sin \left(60^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) = 2 \left[\sin 30^\circ + \sin (\alpha - 30^\circ) \right] \cdot \sin \left(60^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)$$

A.

$$= \sin \left(60^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) + \cos \left(\frac{3\alpha}{2} - 90^\circ \right) - \cos \left(\frac{\alpha}{2} + 30^\circ \right) = \cos \left(90^\circ - \frac{3\alpha}{2} \right) = \sin \frac{3\alpha}{2}$$

$$\cos 10^\circ \cdot \cos 30^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 70^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 70^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 10^\circ$$

B.

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \left[\cos 120^\circ + \cos 20^\circ \right] \cdot \cos 10^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left[-\frac{1}{2} + \cos 20^\circ \right] \cdot \cos 10^\circ$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{8} \cdot \cos 10^\circ + \frac{\sqrt{3}}{8} \cos 30^\circ + \frac{\sqrt{3}}{10} \cos 10^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{16}$$

$$4 \sin \frac{a}{3} \cdot \sin \frac{\pi+a}{3} \cdot \sin \frac{\pi-a}{3} = 2 \sin \frac{a}{3} \left[\cos \frac{2a}{3} - \cos \frac{2\pi}{3} \right]$$

C.

$$= 2 \cos \frac{2a}{3} \cdot \sin \frac{a}{3} + \sin \frac{a}{3} = \sin a - \sin \frac{a}{3} + \sin \frac{a}{3} = \sin a$$

$$4 \cos \frac{a}{3} \cdot \cos \frac{\pi+a}{3} \cdot \cos \frac{\pi-a}{3} = 2 \cos \frac{a}{3} \left[\cos \frac{2\pi}{3} + \cos \frac{2a}{3} \right]$$

D.

$$= -\cos \frac{a}{3} + 2 \cos \frac{2a}{3} \cdot \cos \frac{a}{3} = -\cos \frac{a}{3} + \cos a + \cos \frac{a}{3} = \cos a$$

Chỉ có B sai.

Câu 41: Trong các hệ thức sau, hệ thức nào **sai**?

$$\sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \cdot \cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{2 \sin 2x + \sqrt{3}}{4}$$

A.

$$\sin \frac{\pi}{5} \cdot \sin \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{2\pi}{5} \right)$$

B.

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos 2x = \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{8}$$

C.

$$8 \cos x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x = 2(\cos 2x - \cos 4x - \cos 6x + 1)$$

D.

Lời giải

Chọn C

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos 2x = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} - \cos 2x \right) \cos 2x$$

C.

$$= \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{2} \cos^2 2x = \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{4} \cos 4x - \frac{1}{4}$$

Câu 42: Trong các hệ thức sau, hệ thức nào **sai**?

$$3 + 4 \cos^2 x = 4 \sin(x - 60^\circ) \cdot \sin(x + 60^\circ)$$

A.

$$\sin^2 x - 3 = 4 \cos(x + 30^\circ) \cdot \cos(x + 150^\circ)$$

B.

$$3 - \cot^2 x = \frac{4 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \cdot \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)}{\cos^2 x}$$

C.

$$\tan^2 a - \tan^2 b = \frac{\sin(a+b) \cdot \sin(a-b)}{\cos^2 a \cdot \cos^2 b}$$

D.

Lời giải

Chọn A

$$3 + 4 \cos^2 x = 3 - 2(1 + \cos 2x) = 1 - 2 \cos 2x = 2 \left(\frac{1}{2} - \cos 2x \right) = 2(\cos 60^\circ - \cos 2x)$$

A.

$$= -4 \sin(30^\circ + x) \cdot \sin(30^\circ - x) = 4 \sin(x + 30^\circ) \cdot \sin(x - 30^\circ)$$

$$\sin^2 x + \sin^2 \left(\frac{2\pi}{3} + x \right) + \sin^2 \left(\frac{2\pi}{3} - x \right)$$

Câu 43: Biểu thức $\sin^2 x + \sin^2 \left(\frac{2\pi}{3} + x \right) + \sin^2 \left(\frac{2\pi}{3} - x \right)$ không phụ thuộc vào x và có kết quả rút gọn bằng:

A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{3}{2}$

C. $\frac{3}{4}$

D. $\frac{4}{3}$

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} & \sin^2 x + \sin^2 \left(\frac{2\pi}{3} + x \right) + \sin^2 \left(\frac{2\pi}{3} - x \right) \\ &= \sin^2 x + \left(\sin \frac{2\pi}{3} \cdot \cos x + \cos \frac{2\pi}{3} \cdot \sin x \right)^2 + \left(\sin \frac{2\pi}{3} \cdot \cos x - \cos \frac{2\pi}{3} \cdot \sin x \right)^2 \\ &= \sin^2 x + 2 \sin^2 \frac{2\pi}{3} \cdot \cos^2 x + 2 \cos^2 \frac{2\pi}{3} \cdot \sin^2 x \\ &= \sin^2 x + 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \cos^2 x + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \sin^2 x = \frac{3}{2} (\sin^2 x + \cos^2 x) = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Câu 44: Nếu biết $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ ($0 < \alpha < 90^\circ$), $\tan b = -\frac{1}{3}$ ($90^\circ < b < 180^\circ$) thì $\cos(2a - b)$ có giá trị đúng bằng:

- A. $-\frac{\sqrt{10}}{10}$ B. $\frac{\sqrt{10}}{10}$ C. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

Lời giải

Chọn A

$$\tan \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{1 - \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{4}{5}$$

$$\tan b = -\frac{1}{3} \quad (90^\circ < b < 180^\circ) \Rightarrow \cos b = \frac{-4}{\sqrt{1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2}} = \frac{-3}{\sqrt{10}}$$

$$\Rightarrow \sin b = \tan b \cdot \cos b = \frac{-1}{3} \cdot \frac{-3}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\Rightarrow \cos(2a - b) = \cos 2\alpha \cos b + \sin 2\alpha \sin b = \frac{3}{5} \cdot \frac{-3}{\sqrt{10}} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{-1}{\sqrt{10}}$$

Câu 45: Cho $M = 3\sin x + 4\cos x$. Chọn khẳng định đúng.

- A. $M \leq 5$ B. $M > 5$ C. $M \geq 5$ D. $-5 \leq M \leq 5$

Lời giải

Chọn D

$$M = 5 \left(\frac{3}{5} \sin x + \frac{4}{5} \cos x \right) = 5 \sin(x+a) \quad \text{với } \cos a = \frac{3}{5}; \sin a = \frac{4}{5}$$

$$-1 \leq \sin(x+a) \leq 1$$

Ta có:

$$\Leftrightarrow -5 \leq 5 \sin(x+a) \leq 5$$

Câu 46: Giá trị lớn nhất của $M = \sin^4 x + \cos^4 x$ bằng

- A.** $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{2}{3}$ **C.** $\frac{3}{4}$ **D.** $\frac{4}{5}$

Lời giải

Chọn A

$$M = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x$$

Ta có

$$0 \leq \sin^2 x \leq 1$$

Vì

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2} \sin^2 2x \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x \leq 1$$

Nên giá trị lớn nhất là $\frac{1}{2}$.

Câu 47: Giá trị nhỏ nhất của $M = \sin^4 x + \cos^4 x$ là

- A.** 0 **B.** $\frac{1}{4}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** 1

Lời giải

Chọn C

$$M = \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Dấu bằng xảy ra khi

Câu 48: Một tam giác ABC có các góc A, B, C thỏa mãn $\sin \frac{A}{2} \cos^3 \frac{B}{2} - \sin \frac{B}{2} \cos^3 \frac{A}{2} = 0$

thì tam giác đó có gì đặc biệt?

- A.** Không có gì đặc biệt. **B.** Tam giác đó vuông.
C. Tam giác đó đều. **D.** Tam giác đó cân.

Lời giải

Chọn D

$$\sin \frac{A}{2} \cos^3 \frac{B}{2} - \sin \frac{B}{2} \cos^3 \frac{A}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos^2 \frac{A}{2}} = \frac{\sin \frac{B}{2}}{\cos^2 \frac{B}{2}}$$

Ta có

$$\Leftrightarrow \tan \frac{A}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{A}{2} \right) = \tan \frac{B}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{B}{2} \right) \Leftrightarrow \tan \frac{A}{2} = \tan \frac{B}{2} \Leftrightarrow \frac{A}{2} = \frac{B}{2} \Leftrightarrow A = B$$

•Dạng ②: Câu trắc nghiệm đúng, sai

Câu 1. Cho biết $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Khi đó:

a) $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

b) $\sin 2\alpha = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$

c) $\cos 2\alpha = \frac{7}{9}$

d) $\cot 2\alpha = \frac{7\sqrt{2}}{8}$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
----------------	----------------	----------------	---------------

Vì $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\cos \alpha < 0$.

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Ta có:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 1 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{7}{9}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = -\frac{4\sqrt{2}}{7}; \cot 2\alpha = \frac{1}{\tan 2\alpha} = -\frac{7\sqrt{2}}{8}$$

Câu 2. Cho biết $\cos 2\alpha = -\frac{1}{4}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Khi đó:

a) $\sin \alpha < 0, \cos \alpha < 0$

b) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{10}}{4}$

c) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{4}$

d) $\cot \alpha = \frac{\sqrt{15}}{5}$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
----------------	---------------	---------------	----------------

Vì $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên $\sin \alpha < 0, \cos \alpha < 0$.

$$\cos 2\alpha = -\frac{1}{4} \Rightarrow 1 - 2\sin^2 \alpha = -\frac{1}{4} \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{5}{8} \Rightarrow \sin \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{4};$$

Ta có:

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{10}{16}} = -\frac{\sqrt{6}}{4};$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{15}}{3}$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

Câu 3. Cho biết $\sin \alpha = \frac{3}{5}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Khi đó:

a) $\cos \alpha < 0$

b) $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$

c) $\tan \alpha = \frac{3}{4}$

d) $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{48 - \sqrt{3}}{11}$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

Vì $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \cos \alpha < 0$.

Ta có $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{4}{5}$

$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{3}{4}$.

$$\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\tan \alpha + \tan \frac{\pi}{3}}{1 - \tan \alpha \tan \frac{\pi}{3}} = \frac{\tan \alpha + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3} \tan \alpha}$$

Ta có:

$$\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{-\frac{3}{4} + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}\left(-\frac{3}{4}\right)} = \frac{-3 + 4\sqrt{3}}{4 + 3\sqrt{3}} = \frac{48 - 25\sqrt{3}}{11}$$

Suy ra:

Câu 4. Cho biết $\sin \alpha = -\frac{12}{13}, \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Khi đó:

a) $\cos \alpha > 0$

b) $\cos \alpha = \frac{5}{13}$

c) $\tan \alpha = -\frac{12}{5}$

d) $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \frac{5 - \sqrt{3}}{26}$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \alpha + \sin \frac{\pi}{3} \sin \alpha$$

Ta có:

$$= \frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{12}{13}\right) = \frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{6\sqrt{3}}{13}$$

$$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi \Rightarrow \cos \alpha > 0$$

Vì

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{5}{13}$$

Ta có

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{13} - \frac{6\sqrt{3}}{13} = \frac{5 - 12\sqrt{3}}{26}$$

Suy ra:

Câu 5. Cho biết $\sin x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ và $0 < x < \frac{\pi}{2}$; khi đó:

a) $\cos x > 0$

b) $\cos x = \frac{\sqrt{6}}{3}$

c) $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

d) $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{6} - 3}{8}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

a) Vì $0 < x < \frac{\pi}{2}$ nên $\cos x > 0$.

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Ta có:

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos x \cos \frac{\pi}{3} - \sin x \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6} - 3}{6}$$

Câu 6. Cho biết $\cos x = -\frac{12}{13}$ và $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$; khi đó:

a) $\sin x > 0$

b) $\sin x = -\frac{5}{13}$

c) $\cot x = \frac{5}{12}$

d) $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{5 - 12\sqrt{3}}{26}$

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
--------	---------	--------	---------

Vì $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ nên $\sin x < 0$.

$$\cos x = -\frac{12}{13} \Rightarrow \sin x = -\sqrt{1 - \cos^2 x} = -\sqrt{1 - \left(-\frac{12}{13}\right)^2} = -\frac{5}{13}$$

Ta có:

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos x - \cos\frac{\pi}{3}\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{12}{13}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{5}{13}\right) = \frac{5 - 12\sqrt{3}}{26}$$

Câu 7. Cho biết $\tan x = \sqrt{2}$ và $0 < x < 90^\circ$. Khi đó:

a) $\cos x > 0$

b) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

c) $\sin x = \frac{\sqrt{6}}{3}$

d) $\cos(x - 30^\circ) = \frac{3 - \sqrt{6}}{6}$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------

Vì $0 < x < 90^\circ$ nên $\cos x > 0$.

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = 1 + 2 = 3 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ta có:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \sin x = \tan x \cos x = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Mặt khác:

$$\cos(x - 30^\circ) = \cos x \cos 30^\circ + \sin x \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3 + \sqrt{6}}{6}$$

Câu 8. Biết $\sin a = \frac{8}{17}$, $\tan b = \frac{5}{12}$ và a, b là các góc nhọn. Khi đó:

a) $\tan a = \frac{8}{15}$

b) $\sin(a - b) = \frac{21}{221}$

c) $\cos(a + b) = \frac{14}{22}$

d) $\tan(a + b) = \frac{17}{14}$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

Vì a, b là các góc nhọn nên $\cos a > 0, \cos b > 0$.

$$\cos a = \frac{15}{17} \Rightarrow \tan a = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{8}{15}$$

Ta có:

$$\cos b = \frac{12}{13} \Rightarrow \sin b = \cos b \tan b = \frac{5}{13}$$

Khi đó:

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b = \frac{8}{17} \cdot \frac{12}{13} - \frac{15}{17} \cdot \frac{5}{13} = \frac{21}{221}$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b = \frac{15}{17} \cdot \frac{12}{13} - \frac{8}{17} \cdot \frac{5}{13} = \frac{140}{221}$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} = \frac{\frac{8}{15} + \frac{5}{12}}{1 - \frac{8}{15} \cdot \frac{5}{12}} = \frac{171}{140}$$

Câu 9. Biết $0 < a, b < \frac{\pi}{2}, a + b = \frac{\pi}{4}$ và $\tan a \tan b = 3 - 2\sqrt{2}$. Khi đó:

- a) $\tan a + \tan b = -2 + 2\sqrt{2}$.
- b) $\tan a = -1 + \sqrt{2}$
- c) $\tan b = -1 - \sqrt{2}$
- d) $\tan a - \tan b = -2 - 2\sqrt{2}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \Rightarrow \tan a + \tan b = \tan(a + b)(1 - \tan a \tan b) \quad a + b = \frac{\pi}{4} \text{ mà } \text{ và}$$

$$\tan a \tan b = 3 - 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \tan a + \tan b = \tan \frac{\pi}{4} [1 - (3 - 2\sqrt{2})] = -2 + 2\sqrt{2}$$

$$S = \tan a + \tan b; P = \tan a \tan b$$

Đặt

Khi đó $\tan a, \tan b$ là nghiệm của phương trình

$$X^2 - SX + P = 0 \Leftrightarrow X^2 - (2\sqrt{2} - 2)X + 3 - 2\sqrt{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow X = -1 + \sqrt{2}. \quad \text{Suy ra } \tan a = \tan b = -1 + \sqrt{2}$$

Câu 10. Biết $\tan \alpha = 2$. Khi đó:

a) $\cot \alpha = -\frac{1}{2}$

b) $\cos 2\alpha = -\frac{3}{5}$

c) $\sin 2\alpha = \frac{4}{5}$

d) $\tan 2\alpha = -\frac{4}{3}$

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
--------	---------	---------	---------

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = \frac{2}{\tan^2 \alpha + 1} - 1 = \frac{2}{5} - 1 = -\frac{3}{5};$$

Ta có:

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha = 2\tan \alpha \cos^2 \alpha = \frac{2\tan \alpha}{\tan^2 \alpha + 1} = \frac{4}{5}; \quad \tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = -\frac{4}{3}$$

Câu 11. Biết $\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Khi đó:

a) $\cos \alpha < 0$

b) $2\sin \alpha \cos \alpha = -\frac{4}{5}$

c) $\cos \alpha = \frac{-2}{\sqrt{5}}, \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$

d) $\cos \alpha = \frac{-1}{\sqrt{5}}, \sin \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------

Vì $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên $\cos \alpha < 0$. Ta có hệ:
$$\begin{cases} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \\ 2\sin \alpha \cos \alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{4}{25 \cos^2 \alpha} + \cos^2 \alpha = 1 \\ \sin \alpha = -\frac{2}{5 \cos \alpha} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 25 \cos^4 \alpha - 25 \cos^2 \alpha + 4 = 0 \\ \sin \alpha = -\frac{2}{5 \cos \alpha} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos^2 \alpha = \frac{4}{5} \\ \cos^2 \alpha = \frac{1}{5} \\ \sin \alpha = -\frac{2}{5 \cos \alpha} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \cos \alpha = \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \sin \alpha = -\frac{2}{5 \cos \alpha} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \frac{-2}{\sqrt{5}}, \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \cos \alpha = \frac{-1}{\sqrt{5}}, \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Câu 12. Cho $\sin \alpha = \frac{2}{3}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Khi đó:

a) $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

b) $\tan \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

c) $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = \frac{\sqrt{5} - 2\sqrt{3}}{6}$

d) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{\sqrt{10} - 2\sqrt{2}}{6}$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
----------------	----------------	---------------	---------------

$$\sin \alpha = \frac{2}{3}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$$

Ta có:

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \quad \cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

Vì nên

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \alpha - \sin \frac{\pi}{3} \sin \alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{-\sqrt{5}}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{-\sqrt{5} - 2\sqrt{3}}{6}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha + \sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{-\sqrt{10} + 2\sqrt{2}}{6}$$

Câu 13. Cho $\cot x = -\sqrt{3}, \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$. Khi đó:

a) $\sin x = -\frac{\sqrt{10}}{10}$

b) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{10}$

c) $\sin\left(\frac{4\pi}{3} - x\right) = -\frac{\sqrt{10}}{5}$

d) $\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
----------------	---------------	----------------	----------------

$$\cot x = -\sqrt{3}, \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$$

$$\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x = 1 + (-\sqrt{3})^2 = 10 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{10} \Rightarrow \sin x = \pm \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\text{Vì } \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi \text{ nên } \sin x = -\frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\cos x = \cot x \cdot \sin x = -\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right) = \frac{\sqrt{30}}{10}$$

$$\sin\left(\frac{4\pi}{3} - x\right) = \sin\frac{4\pi}{3}\cos x - \cos\frac{4\pi}{3}\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{30}}{10}\right) - \frac{-1}{2} \cdot \frac{-\sqrt{10}}{10} = -\frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$\tan x = \frac{1}{\cot x} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\tan x + \tan\frac{\pi}{3}}{1 - \tan x \cdot \tan\frac{\pi}{3}} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3}}{1 - \frac{-\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Câu 14. Biết: $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Khi đó:

a) $\sin 2\alpha = \frac{\sqrt{2}}{9}$

b) $\cos 2\alpha = \frac{7}{9}$

c) $\tan 2\alpha = \frac{\sqrt{2}}{7}$

d) $\cot 2\alpha = \frac{7\sqrt{2}}{2}$

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
--------	---------	--------	--------

$$\sin \alpha = \frac{1}{3} \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

Ta có: và .

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \quad \cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Vì nên

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{7}{9}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{4\sqrt{2}}{2} : \frac{7}{9} = \frac{4\sqrt{2}}{7}$$

$$\cot 2\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{4\sqrt{2}}{2} : \frac{7}{9} = \frac{7\sqrt{2}}{8}$$

Câu 15. Cho $\cos \alpha = \frac{2}{5}, 2\pi < \alpha < \frac{5\pi}{2}$, khi đó:

a) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$

b) $\sin 2\alpha = \frac{4\sqrt{21}}{25}$

c) $\cos 2\alpha = -\frac{17}{25}$

d) $\tan 2\alpha = \frac{-4\sqrt{21}}{17}$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
---------	---------	---------	---------

$$\cos \alpha = \frac{2}{5}, 2\pi < \alpha < \frac{5\pi}{2}.$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{21}{25} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{21}}{5}$$

$$\text{Vì } 2\pi < \alpha < \frac{5\pi}{2} \text{ nên } \sin \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \frac{\sqrt{21}}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4\sqrt{21}}{25}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \left(\frac{2}{5}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{21}}{5}\right)^2 = -\frac{17}{25}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{4\sqrt{21}}{25} : \frac{-17}{25} = -\frac{4\sqrt{21}}{17}.$$

Câu 16. Biết: $\cos 2\alpha = \frac{5}{9}, 0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Khi đó:

a) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{28}}{9}$

b) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{53}}{9}$

c) $\tan \alpha = \frac{\sqrt{371}}{53}$

d) $\cot \alpha = \frac{\sqrt{371}}{14}$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
----------------	----------------	---------------	----------------

$$\cos 2\alpha = \frac{5}{9}, 0^\circ < \alpha < 90^\circ$$

Ta có:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \frac{1 - \left(\frac{5}{9}\right)^2}{2} = \frac{28}{81} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{28}}{9}$$

$$\text{Vì } 0^\circ < \alpha < 90^\circ \text{ nên } \sin \alpha = \frac{\sqrt{28}}{9}$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{\sqrt{28}}{9}\right)^2 = \frac{53}{81} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{53}}{9}$$

Vì $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ nên $\cos \alpha = \frac{\sqrt{53}}{9}$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2\sqrt{371}}{53}$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{\sqrt{371}}{14}$$

Câu 17. Biến đổi được các biểu thức sau về dạng tích số. Khi đó:

a) $\cos 3x + \cos x = 2 \cos 2x \cdot \cos 3x$

b) $\sin 3x + \sin 2x = 2 \sin 2x \cos \frac{x}{2}$;

c) $\cos 4x - \cos x = -2 \sin \frac{5x}{2} \sin \frac{3x}{2}$

d) $\sin 5x - \sin x = 2 \cos 3x \sin 2x$

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------------	---------------	----------------	----------------

a) $\cos 3x + \cos x = 2 \cos 2x \cdot \cos x$

b) $\sin 3x + \sin 2x = 2 \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{x}{2}$;

c) $\cos 4x - \cos x = -2 \sin \frac{5x}{2} \sin \frac{3x}{2}$

d) $\sin 5x - \sin x = 2 \cos 3x \sin 2x$

Câu 18. Cho $\sin x = \frac{1}{5}, \frac{\pi}{2} < x < \pi$. Khi đó:

a) $\sin 2x = \frac{4\sqrt{6}}{5}$.

b) $\cos 2x = \frac{23}{25}$

$$c) \tan 2x = \frac{20\sqrt{6}}{3}$$

$$d) \cot 2x = \frac{23\sqrt{6}}{120}$$

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
--------	---------	--------	--------

$$\frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow \frac{2\pi}{2} < 2x < 2\pi \Rightarrow \pi < 2x < 2\pi \Rightarrow \sin 2x < 0.$$

$$\frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow \cos x < 0$$

$$\sin x = \frac{1}{5} \Rightarrow \cos x = -\sqrt{1 - \sin^2 x} = -\frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x = 2 \cdot \frac{1}{5} \left(-\frac{2\sqrt{6}}{5} \right) = -\frac{4\sqrt{6}}{5}.$$

$$\frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow \frac{2\pi}{2} < 2x < 2\pi \Rightarrow \pi < 2x < 2\pi \Rightarrow \cos 2x > 0.$$

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x = 1 - 2 \cdot \frac{1}{25} = \frac{23}{25}.$$

$$\tan 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{-\frac{4\sqrt{6}}{5}}{\frac{23}{25}} = -\frac{20\sqrt{6}}{3}, \cot 2x = \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{\frac{23}{25}}{-\frac{4\sqrt{6}}{5}} = -\frac{23\sqrt{6}}{120}.$$

Câu 19. Cho $\cos x = \frac{1}{5}, \frac{\pi}{2} < x < \pi$. Khi đó:

$$a) \sin \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

$$b) \cos \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$c) \tan \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$d) \cot \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
--------	--------	---------	---------

$$\frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow \frac{\pi}{4} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \frac{x}{2} > 0.$$

$$\sin \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{5}}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$\frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow \frac{\pi}{4} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \frac{x}{2} > 0.$$

$$\cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{5}}{2}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

$$\tan \frac{x}{2} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{10}}{5}}{\frac{\sqrt{15}}{5}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\cot \frac{x}{2} = \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{15}}{5}}{\frac{\sqrt{10}}{5}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

•Dạng ③: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho $\sin x = \frac{1}{5}, \frac{\pi}{2} < x < \pi$. Tính $\cot 2x$.

Lời giải

Cho $\sin x = \frac{1}{5}, \frac{\pi}{2} < x < \pi$. Tính $\cot 2x$.

$$\frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow \frac{2\pi}{2} < 2x < 2\pi \Rightarrow \pi < 2x < 2\pi \Rightarrow \begin{cases} \cos 2x > 0 \\ \tan 2x < 0 \end{cases}$$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 1 - 2 \cdot \frac{1}{25} = \frac{23}{25}$$

$$\frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow \cos x < 0$$

$$\sin x = \frac{1}{5} \Rightarrow \cos x = -\sqrt{1 - \sin^2 x} = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x = 2 \cdot \frac{1}{5} \left(-\frac{2\sqrt{6}}{5} \right) = -\frac{4\sqrt{6}}{5}$$

$$\cot 2x = \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{\frac{23}{25}}{-\frac{4\sqrt{6}}{5}} = -\frac{23\sqrt{6}}{120}$$

Câu 2: Cho các góc α, β thỏa mãn $\frac{\pi}{2} < \alpha, \beta < \pi, \sin \alpha = \frac{1}{3}, \cos \beta = -\frac{2}{3}$.

Tính $\sin(\alpha + \beta)$.

Lời giải

$$\frac{\pi}{2} < \alpha, \beta < \pi \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha < 0 \\ \sin \beta > 0 \end{cases}$$

Do

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}; \sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

Ta có

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{3} \left(-\frac{2}{3} \right) + \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3} \right) \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = -\frac{2 + 2\sqrt{10}}{9}$$

Suy ra

$$\sin(\alpha + \beta) = -\frac{2 + 2\sqrt{10}}{9}$$

Vậy

Câu 3: Cho $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ và $(90^\circ < \alpha < 180^\circ)$. Tính $\cos \alpha$.

Lời giải

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{3}{5} \right)^2 = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{4}{5} \quad 90^\circ < \alpha < 180^\circ \text{ nên}$$

Ta có:

$$\cos \alpha < 0 \quad \cos \alpha = -\frac{4}{5}$$

Vậy

Câu 4: Cho $\sin \alpha = -\frac{1}{3}$, với $(180^\circ < \alpha < 270^\circ)$. Tính $\cos \alpha$.

Lời giải

$$\sin \alpha = -\frac{1}{3} \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \quad \text{Vì } 270^\circ < \alpha < 360^\circ \text{ nên } \cos \alpha > 0 \quad \cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Ta có

Câu 5: Cho hai góc nhọn a và b . Biết $\cos a = \frac{1}{3}; \cos b = \frac{1}{4}$. Tính giá trị của biểu thức:
 $P = \cos(a+b)\cos(a-b)$.

Lời giải

$$\sin^2 a = 1 - \cos^2 a = \frac{8}{9}; \sin^2 b = 1 - \cos^2 b = \frac{15}{16}$$

Ta có:

$$\begin{aligned}
 P &= (\cos a \cos b - \sin a \sin b)(\cos a \cos b + \sin a \sin b) \\
 &= (\cos a \cos b)^2 - (\sin a \sin b)^2 = \cos^2 a \cos^2 b - \sin^2 a \sin^2 b \\
 &= \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{16} - \frac{8}{9} \cdot \frac{15}{16} = -\frac{119}{144}
 \end{aligned}$$

Câu 6: Cho hai góc nhọn a và b với $\tan a = \frac{1}{7}$ và $\tan b = \frac{3}{4}$. Tính $a + b$.

Lời giải

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} = \frac{\frac{1}{7} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{7} \cdot \frac{3}{4}} = 1$$

Ta có:

, suy ra $a + b = 45^\circ$

Câu 7: Cho tam giác ABC có: $\tan B \sin^2 C = \tan C \sin^2 B$. Khi đó tam giác ABC cân tại đỉnh nào?

Lời giải

$$0 < A, B, C < 180^\circ$$

Ta có

$$\frac{\sin B}{\cos B} \sin^2 C = \frac{\sin C}{\cos C} \sin^2 B \Leftrightarrow \frac{1}{\cos B} \sin C = \frac{1}{\cos C} \sin B$$

Từ giả thiết, ta có:

$$\Leftrightarrow \sin C \cos C = \sin B \cos B \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin 2C = \frac{1}{2} \sin 2B$$

$$\Leftrightarrow 2C = 2B + k2\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow 2C = 2B \quad (do \quad B, C \quad \text{là các góc của tam giác}) \Leftrightarrow B - C = 0 \Leftrightarrow B = C$$

Vậy tam giác ABC cân tại A .

Câu 8: Rút gọn $C = \tan 3x - \tan x - \frac{2 \sin x}{\cos 3x}$

Lời giải

$$C = \tan 3x - \tan x - \frac{2 \sin x}{\cos 3x} = \frac{\sin 3x}{\cos 3x} - \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{2 \sin x}{\cos 3x}$$

Ta có:

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sin 3x \cos x - \sin x \cos 3x}{\cos 3x \cos x} - \frac{2 \sin x}{\cos 3x} = \frac{\sin 2x}{\cos 3x \cos x} - \frac{2 \sin x}{\cos 3x} \\
 &= \frac{2 \sin x \cos x}{\cos 3x \cos x} - \frac{2 \sin x}{\cos 3x} = \frac{2 \sin x}{\cos 3x} - \frac{2 \sin x}{\cos 3x} = 0.
 \end{aligned}$$

Câu 9: Biến đổi thành tổng biểu thức sau: $4 \sin 3x \sin 2x \cos x$.

Lời giải

$$\begin{aligned}4 \sin 3x \sin 2x \cos x &= 4(\sin 3x \cos x) \sin 2x = 4 \cdot \frac{1}{2}(\sin 4x + \sin 2x) \sin 2x \\ &= 2 \sin 4x \sin 2x + 2 \sin^2 2x = (\cos 2x - \cos 6x) + 2 \left(\frac{1 - \cos 4x}{2} \right) = \cos 2x - \cos 4x - \cos 6x + 1\end{aligned}$$

Câu 10: Biết rằng $\cos x \cos \left(\frac{\pi}{3} - x \right) \cos \left(\frac{\pi}{3} + x \right) = k \cos 3x$, khi đó $k = ?$

Lời giải

$$\begin{aligned}\cos x \cos \left(\frac{\pi}{3} - x \right) \cos \left(\frac{\pi}{3} + x \right) &= \frac{1}{2} \cos x \left(\cos \frac{2\pi}{3} + \cos 2x \right) \\ &= \frac{1}{2} \cos x \cos 2x - \frac{1}{4} \cos x = \frac{1}{4} (\cos 3x + \cos x) - \frac{1}{4} \cos x = \frac{1}{4} \cos 3x\end{aligned}$$

Câu 11: Biết rằng $\sin 5x - 2 \sin x (\cos 4x + \cos 2x) = k \sin x$, khi đó $k = ?$

Lời giải

$$\begin{aligned}\sin 5x - 2 \sin x (\cos 4x + \cos 2x) &= \sin 5x - 2 \sin x \cos 4x - 2 \sin x \cos 2x \\ &= \sin 5x - (\sin 5x - \sin 3x) - (\sin 3x - \sin x) = \sin x\end{aligned}$$

Câu 12: Cho $\alpha - \beta = \frac{\pi}{3}$. Tính giá trị của biểu thức sau: $A = (\cos \alpha + \cos \beta)^2 + (\sin \alpha + \sin \beta)^2$

Lời giải

$$\begin{aligned}A &= \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + 2 \cos \alpha \cos \beta + \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta \\ &= 2 + 2 \cos \alpha \cos \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta = 2 + 2 \cos(\alpha - \beta) = 2 + 2 \cos \frac{\pi}{3} = 3\end{aligned}$$

Câu 13: Cho $\alpha - \beta = \frac{\pi}{3}$. Tính giá trị của biểu thức sau: $B = (\cos \alpha + \sin \beta)^2 + (\cos \beta - \sin \alpha)^2$

Lời giải

$$\begin{aligned}B &= \cos^2 \alpha + \sin^2 \beta + 2 \cos \alpha \sin \beta + \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \beta \\ &= 2 + 2 \sin \beta \cos \alpha - 2 \cos \beta \sin \alpha \\ &= 2 + 2 \sin(\beta - \alpha) = 2 + 2 \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) = 2 - \sqrt{3}\end{aligned}$$

Câu 14: Rút gọn biểu thức $\sin 6a \cot 3a - \cos 6a$;

Lời giải

$$\sin 6a \cot 3a - \cos 6a = 2 \sin 3a \cos 3a \frac{\cos 3a}{\sin 3a} - (2 \cos^2 3a - 1)$$

Ta có:

$$= 2 \cos^2 3a - (2 \cos^2 3a - 1) = 1 \quad a)$$

(không phụ thuộc

Câu 15: Rút gọn biểu thức $(\tan a - \tan b) \cot(a - b) - \tan a \tan b$.

Lời giải

$$(\tan a - \tan b) \cot(a - b) - \tan a \tan b = \frac{\tan a - \tan b}{\tan(a - b)} - \tan a \tan b$$

Ta có:

$$= \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} - \tan a \tan b = 1 + \tan a \tan b - \tan a \tan b = 1$$

(không phụ thuộc ^a).

Câu 16: Biến đổi thành tích biểu thức $\frac{\sin 7a + \sin 5a}{\sin 7a - \sin 5a}$;

Lời giải

$$\frac{\sin 7a + \sin 5a}{\sin 7a - \sin 5a} = \frac{2 \sin 6a \cos a}{2 \cos 6a \sin a} = \tan 6a \cot a$$

Ta có:

Câu 17: Biến đổi thành tổng biểu thức $\sin x \sin 2x \sin 3x$.

Lời giải

$$\sin x \sin 2x \sin 3x = (\sin 3x \sin x) \sin 2x = \frac{1}{2} (\cos 2x - \cos 4x) \sin 2x$$

Ta có:

$$= \frac{1}{2} (\sin 2x \cos 2x - \sin 2x \cos 4x) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \sin 4x - \frac{1}{2} (\sin 6x - \sin 2x) \right]$$
$$= \frac{1}{4} (\sin 4x - \sin 6x + \sin 2x)$$

Câu 18: Biết $\tan^2 x + \cot^2 x + 2 = \frac{a}{\sin^2 2x}$ tìm a ?

Lời giải

$$\begin{aligned} \tan^2 x + \cot^2 x + 2 &= \frac{4}{\sin^2 2x} \Leftrightarrow (\tan^2 x + 1) + (\cot^2 x + 1) = \frac{4}{\sin^2 2x} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} &= \frac{4}{\sin^2 2x} \Leftrightarrow \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{4}{\sin^2 2x} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} &= \frac{4}{\sin^2 2x} \Leftrightarrow \frac{1}{(\sin x \cos x)^2} = \frac{4}{\sin^2 2x} \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{1}{4} \sin^2 2x} = \frac{4}{\sin^2 2x} \end{aligned}$$

Câu 19: Biết $\sin^6 x + \cos^6 x = a + \frac{3}{8} \cos 4x$ tìm a ?

Lời giải

$$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x)$$

Ta có:

$$= 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x = 1 - \frac{3}{8} (1 - \cos 4x) = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4x.$$

Câu 20: Biết $\frac{3 - 4 \cos 2a + \cos 4a}{3 + 4 \cos 2a + \cos 4a} = k \tan^4 a$ tìm k ?

Lời giải

$$\frac{3 - 4 \cos 2a + \cos 4a}{3 + 4 \cos 2a + \cos 4a} = \frac{2 \cos^2 2a - 4 \cos 2a + 2}{2 \cos^2 2a + 4 \cos 2a + 2} = \frac{2(\cos^2 2a - 2 \cos 2a + 1)}{2(\cos^2 2a + 2 \cos 2a + 1)}$$

Ta có:

$$= \frac{(1 - \cos 2a)^2}{(1 + \cos 2a)^2} = \frac{[1 - (1 - 2 \sin^2 a)]^2}{[1 + (2 \cos^2 a - 1)]^2} = \frac{4 \sin^4 a}{4 \cos^4 a} = \tan^4 a.$$

Câu 21: Cho tam giác ABC . Biết $\sin A + \sin B + \sin C = k \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$, tìm k ?

Lời giải

$$VT = \sin A + \sin B + \sin C$$

$$\begin{aligned} &= 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} \\ &= 2 \sin \frac{\pi - C}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \cos \frac{\pi - C}{2} \cos \frac{C}{2} \\ &= 2 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{C}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \cos \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{A+B}{2} \right) \\
&= 2 \cos \frac{C}{2} \cdot 2 \cos \frac{A-B+A+B}{4} \cdot \cos \frac{A-B-A-B}{4} \\
&= 4 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}
\end{aligned}$$

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

Vậy

Câu 22: Rút gọn biểu thức sau: $A = \frac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x}$

Lời giải

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x} \\
&= \frac{(\sin 3x + \sin x) + (\sin 4x + \sin 2x)}{(\cos 3x + \cos x) + (\cos 4x + \cos 2x)} = \frac{2 \sin 2x \cos x + 2 \sin 3x \cos x}{2 \cos 2x \cos x + 2 \cos 3x \cos x} \\
&= \frac{2 \cos x (\sin 2x + \sin 3x)}{2 \cos x (\cos 2x + \cos 3x)} = \frac{2 \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \cos \frac{5x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \tan \frac{5x}{2}
\end{aligned}$$

Câu 23: Rút gọn biểu thức sau: $B = \frac{\sin 2x + 2 \sin 3x + \sin 4x}{\cos 3x + 2 \cos 4x + \cos 5x}$

Lời giải

Câu 24: Cho $\cot \alpha = 3$. Tính $A = \frac{3 \sin \alpha - 2 \cos \alpha}{12 \sin^3 \alpha + 4 \cos^3 \alpha}$

Lời giải

$$A = \frac{3 \sin \alpha - 2 \cos \alpha}{12 \sin^3 \alpha + 4 \cos^3 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \frac{(3 - 2 \cot \alpha)}{12 + 4 \cot^3 \alpha} = (1 + \cot^2 \alpha) \frac{3 - 2 \cot \alpha}{12 + 4 \cot^3 \alpha} = -\frac{1}{4}$$

Câu 25: Cho $\tan \alpha = 2$. Tính $C = \frac{\sin \alpha}{\sin^3 \alpha + 2 \cos^3 \alpha}$

Lời giải

$$C = \frac{\sin \alpha}{\sin^3 \alpha + 2 \cos^3 \alpha} = \frac{\tan \alpha \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha}}{\tan^3 \alpha + 2} = \frac{\tan \alpha (1 + \tan^2 \alpha)}{\tan^3 \alpha + 2} = \frac{2(1 + 2^2)}{2^3 + 2} = 1$$

Câu 26: Cho $\alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$ và $\cos \alpha \neq \cos \beta$. Tính $\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\cos \alpha - \cos \beta}$

Lời giải

$$\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\cos \alpha - \cos \beta} = \frac{2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}}{-2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}} = -\cot \frac{\alpha + \beta}{2} = -\cot \frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}$$

Câu 27: Cho tam giác ABC có $AB = c, AC = b, BC = a$, thỏa $\frac{-1 + \cos(\pi + B)}{\sin(\pi - A - C)} = -\frac{2a + c}{\sqrt{4a^2 - c^2}}$.
Hỏi tam giác ABC là tam giác gì?

Lời giải

$$\begin{aligned} \frac{-1 + \cos(\pi + B)}{\sin(\pi - A - C)} &= -\frac{2a + c}{\sqrt{4a^2 - c^2}} \Leftrightarrow \frac{-1 - \cos B}{\sin(\pi - (A + C))} = -\frac{2a + c}{\sqrt{4a^2 - c^2}} \\ \Leftrightarrow \frac{1 + \cos B}{\sin B} &= \frac{2a + c}{\sqrt{4a^2 - c^2}} \Leftrightarrow \frac{1 + \cos B}{\sin B} = \frac{2a + c}{\sqrt{4a^2 - c^2}} \Leftrightarrow \left(\frac{1 + \cos B}{\sin B} \right)^2 = \left(\frac{2a + c}{\sqrt{4a^2 - c^2}} \right)^2 \\ \Leftrightarrow \frac{(1 + \cos B)^2}{\sin^2 B} &= \frac{(2a + c)^2}{4a^2 - c^2} \Leftrightarrow \frac{(1 + \cos B)^2}{1 - \cos^2 B} = \frac{(2a + c)^2}{4a^2 - c^2} \Leftrightarrow \frac{1 + \cos B}{1 - \cos B} = \frac{2a + c}{2a - c} \\ \Leftrightarrow \frac{1 + \cos B}{1 - \cos B} - 1 &= \frac{2a + c}{2a - c} - 1 \Leftrightarrow 2ac \cdot \cos B = c^2 \Leftrightarrow a^2 + c^2 - b^2 = c^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b. \end{aligned}$$

Câu 28: Cho $\cos a = 0,2$ với $\pi < a < 2\pi$. Tính $\sin \frac{a}{2}, \cos \frac{a}{2}, \tan \frac{a}{2}$.

Lời giải

Do $\pi < a < 2\pi$ nên $\frac{\pi}{2} < \frac{a}{2} < \pi$. Suy ra, $\sin \frac{a}{2} > 0, \cos \frac{a}{2} < 0$.

Ta có: $\sin^2 \left(\frac{a}{2} \right) = \frac{1 - \cos a}{2} = 0,4$

Vậy $\sin \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{10}}{5}, \cos \frac{a}{2} = -\frac{\sqrt{15}}{5}, \tan \frac{a}{2} = -\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Câu 29: Không sử dụng máy tính, tính các giá trị lượng giác của góc 105° .

Lời giải

$$\begin{aligned}\cos 105^\circ &= \cos(60^\circ + 45^\circ) = \cos 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \sin 45^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \\ \sin 105^\circ &= \sin(60^\circ + 45^\circ) = \sin 60^\circ \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \sin 45^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \\ \tan 105^\circ &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{\sqrt{2} - \sqrt{6}}; \cot 105^\circ = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{\sqrt{2} + \sqrt{6}}\end{aligned}$$

Câu 30: Cho $\cos 2x = -\frac{4}{5}$, với $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$.

Tính $\sin x, \cos x, \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right), \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

Lời giải

Vì $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ nên $\sin x > 0, \cos x > 0$. Áp dụng công thức hạ bậc, ta có

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{9}{10} \Rightarrow \sin x = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{10} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

Theo công thức cộng, ta có

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin x \cos \frac{\pi}{3} + \cos x \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2\sqrt{10}}$$

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 2x \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \sin 2x = -\frac{4}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{2}}{10}$$

Câu 31: Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $A = \sin \frac{\pi}{9} - \sin \frac{5\pi}{9} + \sin \frac{7\pi}{9}$

b) $B = \sin 6^\circ \sin 42^\circ \sin 66^\circ \sin 78^\circ$

Lời giải

a) $A = \sin \frac{\pi}{9} - \sin \frac{5\pi}{9} + \sin \frac{7\pi}{9} = \left(\sin \frac{\pi}{9} + \sin \frac{7\pi}{9}\right) - \sin \frac{5\pi}{9}$

$$= 2 \sin \frac{4\pi}{9} \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{5\pi}{9} = \sin \frac{4\pi}{9} - \sin \frac{5\pi}{9} = 0.$$

b) Vì $\sin 78^\circ = \cos 12^\circ; \sin 66^\circ = \cos 24^\circ; \sin 42^\circ = \cos 48^\circ$ nên

$$B = \sin 6^\circ \cos 12^\circ \cos 24^\circ \cos 48^\circ.$$

Nhân hai vế với $\cos 6^\circ$ và áp dụng công thức góc nhân đôi, ta được:

$$\cos 6^\circ \cdot B = \cos 6^\circ \sin 6^\circ \cos 12^\circ \cos 24^\circ \cos 48^\circ = \frac{1}{16} \sin 96^\circ = \frac{1}{16} \sin(90^\circ + 6^\circ) = \frac{1}{16} \cos 6^\circ$$

Vậy $B = \frac{1}{16}$.

Câu 32: Cho $\tan \frac{a}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Tính $\sin a, \cos a, \tan a$.

Lời giải

$$\sin a = 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} = \frac{2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}}{\sin^2 \frac{a}{2} + \cos^2 \frac{a}{2}} = \frac{2 \tan \frac{a}{2}}{1 + \tan^2 \frac{a}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Ta có:

$$\cos a = \cos^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{a}{2} = \frac{\cos^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{a}{2}}{\sin^2 \frac{a}{2} + \cos^2 \frac{a}{2}} = \frac{1 - \tan^2 \frac{a}{2}}{1 + \tan^2 \frac{a}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$\tan a = \frac{\sin a}{\cos a} = 2\sqrt{2}.$$

Câu 33: Cho $\cos(a+2b) = 2 \cos a$. Chứng minh rằng: $\tan(a+b) \tan b = -\frac{1}{3}$.

Lời giải

Ta có: $\cos(a+2b) = 2 \cos a \Leftrightarrow \cos[(a+b)+b] = 2 \cos[(a+b)-b]$

$$\Leftrightarrow 3 \sin(a+b) \sin b = -\cos(a+b) \cdot \cos b \Leftrightarrow \tan(a+b) \tan b = -\frac{1}{3}.$$

Câu 34: Không dùng máy tính cầm tay. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\sin \frac{19\pi}{24} \cos \frac{37\pi}{24}$

b) $\cos \frac{41\pi}{12} - \cos \frac{13\pi}{12}$

c) $\frac{\tan \frac{\pi}{7} + \tan \frac{3\pi}{28}}{1 + \tan \frac{6\pi}{7} \tan \frac{3\pi}{28}}$

Lời giải

a) $\sin \frac{19\pi}{24} \cos \frac{37\pi}{24} = \frac{1}{2} \left[\sin \left(\frac{19\pi}{24} - \frac{37\pi}{24} \right) + \sin \left(\frac{19\pi}{24} + \frac{37\pi}{24} \right) \right]$

$$= \frac{1}{2} \left[\sin \left(-\frac{3\pi}{4} \right) + \sin \frac{7\pi}{3} \right] = \frac{1}{2} \left(-\sin \frac{3\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{4}$$

b)
$$\cos \frac{41\pi}{12} - \cos \frac{13\pi}{12} = -2 \sin \frac{\frac{41\pi}{12} + \frac{13\pi}{12}}{2} \sin \frac{\frac{41\pi}{12} - \frac{13\pi}{12}}{2} = -2 \sin \frac{9\pi}{4} \sin \frac{7\pi}{6}$$

$$= 2 \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\tan \frac{\pi}{7} + \tan \frac{3\pi}{28}}{1 + \tan \frac{6\pi}{7} \tan \frac{3\pi}{28}} = \frac{\tan \frac{\pi}{7} + \tan \frac{3\pi}{28}}{1 + \tan \left(\pi - \frac{\pi}{7} \right) \tan \frac{3\pi}{28}} = \frac{\tan \frac{\pi}{7} + \tan \frac{3\pi}{28}}{1 - \tan \frac{\pi}{7} \tan \frac{3\pi}{28}}$$

$$= \tan \left(\frac{\pi}{7} + \frac{3\pi}{28} \right) = \tan \frac{\pi}{4} = 1.$$

c)

Câu 35: Cho $\cos \alpha = \frac{11}{61}$ và $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$, tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\sin \left(\frac{\pi}{6} - \alpha \right)$

b) $\cot \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right)$

c) $\cos \left(2\alpha + \frac{\pi}{3} \right)$

d) $\tan \left(\frac{3\pi}{4} - 2\alpha \right)$

Lời giải

a) Vì $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ nên $\sin \alpha < 0$.

Do đó,
$$\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{11}{61} \right)^2} = -\frac{60}{61}.$$

Suy ra

$$\sin \left(\frac{\pi}{6} - \alpha \right) = \sin \frac{\pi}{6} \cos \alpha - \cos \frac{\pi}{6} \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{11}{61} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{60}{61} \right) = \frac{11 + 60\sqrt{3}}{122}.$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{60}{61}}{\frac{11}{61}} = -\frac{60}{11}$$

b) Ta có

$$\cot\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1 - \tan\alpha \tan\frac{\pi}{4}}{\tan\alpha + \tan\frac{\pi}{4}} = \frac{1 - \left(-\frac{60}{11}\right) \cdot 1}{\left(-\frac{60}{11}\right) + 1} = -\frac{71}{49}$$

Do đó

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot \left(\frac{11}{61}\right)^2 - 1 = -\frac{3479}{3721};$$

c) Ta có

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \left(-\frac{60}{61}\right) \cdot \frac{11}{61} = -\frac{1320}{3721} \quad \text{Suy ra}$$

$$\begin{aligned} \cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{3}\right) &= \cos 2\alpha \cos \frac{\pi}{3} - \sin 2\alpha \sin \frac{\pi}{3} = -\frac{3479}{3721} \cdot \frac{1}{2} - \left(-\frac{1320}{3721}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{-3479 + 1320\sqrt{3}}{7442}. \end{aligned}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{-\frac{1320}{3721}}{-\frac{3479}{3721}} = \frac{1320}{3479}$$

d) Ta có

$$\tan\left(\frac{3\pi}{4} - 2\alpha\right) = \frac{\tan \frac{3\pi}{4} - \tan 2\alpha}{1 + \tan \frac{3\pi}{4} \tan 2\alpha} = \frac{-1 - \frac{1320}{3479}}{1 + (-1) \cdot \frac{1320}{3479}} = -\frac{4799}{2159}$$

Suy ra

Câu 36: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sin x \cos^5 x - \cos x \sin^5 x$

$$\frac{\sin 3x \cos 2x + \sin x \cos 6x}{\sin 4x};$$

b) $\frac{\cos x - \cos 2x + \cos 3x}{\sin x - \sin 2x + \sin 3x}$

c) $\frac{2 \sin(x+y)}{\cos(x+y) + \cos(x-y)} - \tan y$

d) $\frac{2 \sin(x+y)}{\cos(x+y) + \cos(x-y)} - \tan y$

Lời giải

a) $\sin x \cos^5 x - \cos x \sin^5 x = \sin x \cos x (\cos^4 x - \sin^4 x)$

$$= \frac{1}{2} \sin 2x (\cos^2 x - \sin^2 x) (\cos^2 x + \sin^2 x)$$

$$= \frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{4} \sin 4x$$

b) $\frac{\sin 3x \cos 2x + \sin x \cos 6x}{\sin 4x} = \frac{\frac{1}{2}(\sin x + \sin 5x) + \frac{1}{2}[\sin(-5x) + \sin 7x]}{\sin 4x}$

$$= \frac{\sin x + \sin 5x - \sin 5x + \sin 7x}{2 \sin 4x} = \frac{\sin x + \sin 7x}{2 \sin 4x}$$

$$= \frac{2 \sin 4x \cos 3x}{2 \sin 4x} = \cos 3x;$$

$$c) \frac{\cos x - \cos 2x + \cos 3x}{\sin x - \sin 2x + \sin 3x} = \frac{(\cos x + \cos 3x) - \cos 2x}{(\sin x + \sin 3x) - \sin 2x} = \frac{2 \cos 2x \cos x - \cos 2x}{2 \sin 2x \cos x - \sin 2x}$$

$$= \frac{\cos 2x(2 \cos x - 1)}{\sin 2x(2 \cos x - 1)} = \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \cot 2x;$$

$$d) \frac{2 \sin(x+y)}{\cos(x+y) + \cos(x-y)} - \tan y = \frac{2(\sin x \cos y + \cos x \sin y)}{2 \cos x \cos y} - \tan y$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y} - \tan y = \tan x + \tan y - \tan y$$

$$= \tan x.$$

Câu 37: Cho $\sin \alpha + \cos \alpha = m$. Tìm m để $\sin 2\alpha = -\frac{3}{4}$.

Lời giải

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha \right) = \sqrt{2} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right)$$

Ta có

$$\text{Vì } -1 \leq \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \leq 1 \text{ nên } -\sqrt{2} \leq \sin \alpha + \cos \alpha \leq \sqrt{2}. \text{ Suy ra } -\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}.$$

$$\text{Ta lại có } (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = 1 + \sin 2\alpha.$$

$$\text{Suy ra } \sin 2\alpha = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1 = m^2 - 1.$$

$$\text{Khi đó, } \sin 2\alpha = -\frac{3}{4} \text{ hay } m^2 - 1 = -\frac{3}{4}, \text{ suy ra } m = \frac{1}{2} \text{ hoặc } m = -\frac{1}{2} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Câu 38: Cho $\sin \alpha = \frac{3}{5}, \cos \beta = \frac{12}{13}$ và $0^\circ < \alpha, \beta < 90^\circ$. Tính giá trị của biểu thức $\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta)}$.

Lời giải

$$\text{Vì } 0^\circ < \alpha < 90^\circ \text{ nên } \cos \alpha > 0. \text{ Do đó, } \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Vì } 0^\circ < \beta < 90^\circ \text{ nên } \sin \beta > 0. \text{ Do đó, } \sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = \frac{5}{13}.$$

$$\text{Khi đó, } \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} = \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{12}{13} + \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{13}}{\frac{4}{5} \cdot \frac{12}{13} - \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{13}} = \frac{56}{65};$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \frac{4}{5} \cdot \frac{12}{13} + \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{13} = \frac{63}{65}.$$

Câu 39: Phương trình dao động điều hoà của một vật tại thời điểm t giây được cho bởi công thức $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, trong đó $x(t)(cm)$ là li độ của vật tại thời điểm t giây, A là biên độ dao động ($A > 0$) và $\varphi \in [-\pi; \pi]$ là pha ban đầu của dao động.

Xét hai dao động điều hoà có phương trình lần lượt là:

$$x_1(t) = 3 \cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{3}\right) (cm) \text{ và } x_2(t) = 3 \cos\left(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{6}\right) (cm).$$

a) Xác định phương trình của dao động tổng hợp $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$.

b) Tìm biên độ và pha ban đầu của dao động tổng hợp trên.

Lời giải

a) Ta có
$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = 3 \cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{3}\right) + 3 \cos\left(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= 3 \cdot 2 \cos \frac{\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{3}\right) + \left(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{6}\right)}{2} \cos \frac{\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{3}\right) - \left(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{6}\right)}{2}$$

$$= 6 \cos \frac{\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{6}}{2} \cos \frac{\frac{\pi}{2}}{2} = 3\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{12}\right).$$

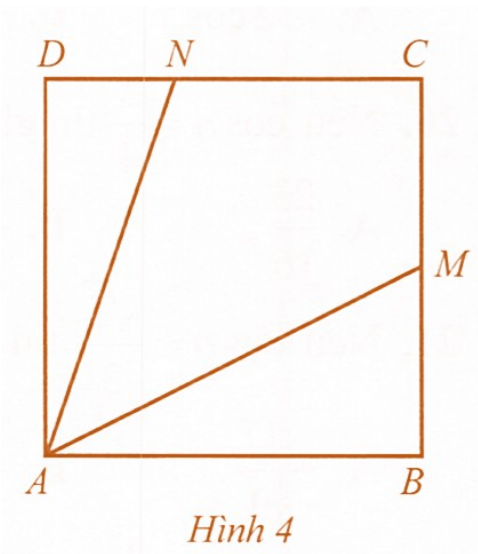
$$x(t) = 3\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{12}\right).$$

Vậy phương trình của dao động tổng hợp là

b) Dao động tổng hợp trên có biên độ là $A = 3\sqrt{2} \text{ cm}$ và pha ban đầu là $\varphi = \frac{\pi}{12}$.

Câu 40: Trên một mảnh đất hình vuông $ABCD$, bác An đặt một chiếc đèn pin tại vị trí A chiếu chùm sáng phân kì sang phía góc C . Bác An nhận thấy góc chiếu sáng của đèn pin giới hạn bởi hai tia AM và AN , ở đó các điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh BC, CD sao

cho
$$BM = \frac{1}{2}BC, DN = \frac{1}{3}DC$$



Hình 4

- a) Tính $\tan(\angle BAM + \angle DAN)$.
 b) Góc chiếu sáng của đèn pin bằng bao nhiêu độ?

Lời giải

a) Trong tam giác vuông ABM , $\tan \angle BAM = \frac{BM}{BA} = \frac{1}{2}$.

Trong tam giác vuông ADN , $\tan \angle DAN = \frac{DN}{DA} = \frac{1}{3}$.

$$\tan(\angle BAM + \angle DAN) = \frac{\tan \angle BAM + \tan \angle DAN}{1 - \tan \angle BAM \tan \angle DAN} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 1$$

Do đó,

b) Do $\tan(\angle BAM + \angle DAN) = 1$ nên $\angle BAM + \angle DAN = 45^\circ$.

Suy ra $\angle MAN = 90^\circ - (\angle BAM + \angle DAN) = 45^\circ$.

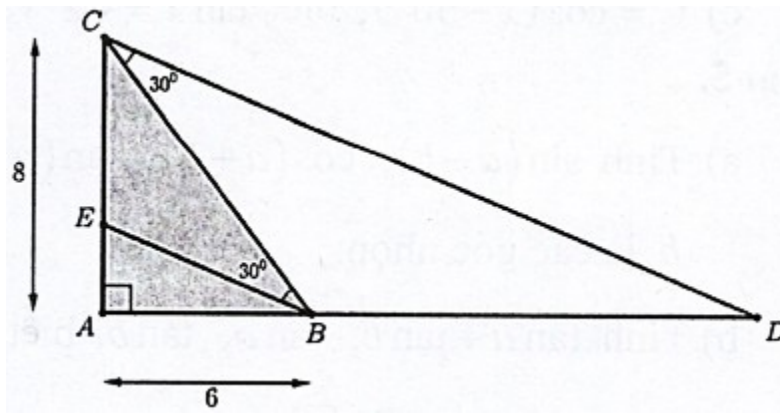
Vậy góc chiếu sáng của đèn pin bằng 45° .

Câu 41: Cho tam giác ABC vuông tại A có cạnh $AB = 6, AC = 8$. Điểm E thuộc đoạn AC sao cho $\angle BE = 30^\circ$, điểm D thuộc tia đối của tia BA sao cho $\angle BCD = 30^\circ$.

a) Tìm $\tan \angle ACD$, từ đó tính độ dài đoạn AD .

b) Tính $\tan \angle ABE$, từ đó tính độ dài cạnh AE .

(Các kết quả trong bài được làm tròn đến hàng phần trăm).



Lời giải

$$\tan \angle ACD = \tan(\angle ACB + 30^\circ) = \frac{\tan \angle ACB + \tan 30^\circ}{1 - \tan \angle ACB \tan 30^\circ} = \frac{\frac{6}{8} + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{6}{8} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{48 + 25\sqrt{3}}{39}$$

a)

Tam giác ACD vuông tại A có:

$$AD = AC \tan \angle ACD = 8 \cdot \frac{48 + 25\sqrt{3}}{39} \approx 18,73$$

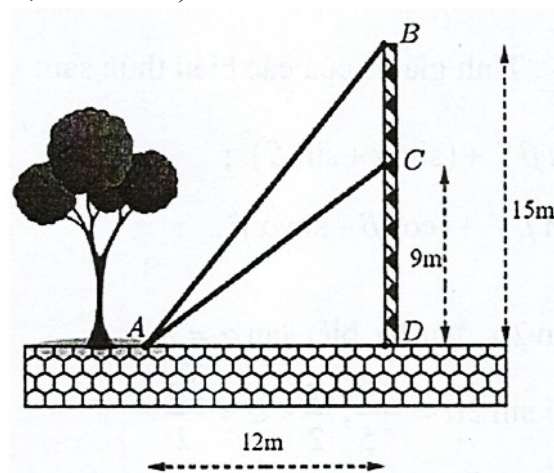
$$\tan \angle ABE = \tan(\angle ABC - 30^\circ) = \frac{\tan \angle ABC - \tan 30^\circ}{1 + \tan \angle ABC \tan 30^\circ} = \frac{\frac{8}{6} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{8}{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{48 - 25\sqrt{3}}{11}$$

b)

Tam giác ABE vuông tại A có:

$$AE = AB \tan \angle ABE = 6 \cdot \frac{48 - 25\sqrt{3}}{11} \approx 2,56$$

Câu 42: Từ một vị trí A , người ta buộc hai sợi cáp AB và AC đến một cái trụ cao $15m$, được dựng vuông góc với mặt đất, chân trụ ở vị trí D . Biết $CD = 9m$ và $AD = 12m$. Tìm góc nhọn $\alpha = \angle BAC$ tạo bởi hai sợi dây cáp đó, đồng thời tính gần đúng α (làm tròn đến hàng phần chục, đơn vị độ).



Lời giải

Ta có:

$$\tan \alpha = \tan(\angle BAD - \angle CAD)$$

$$= \frac{\tan \angle BAD - \tan \angle CAD}{1 + \tan \angle BAD \tan \angle CAD} = \frac{\frac{15}{12} - \frac{9}{12}}{1 + \frac{15}{12} \cdot \frac{9}{12}} = \frac{8}{31}$$

$$\alpha \approx 14,47^\circ$$

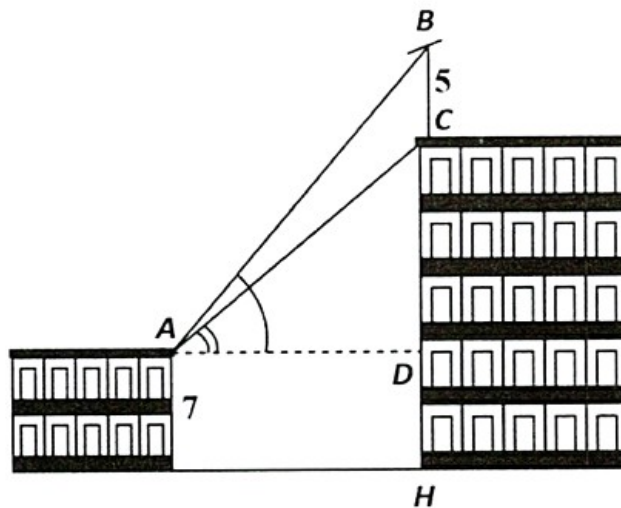
Vì vậy

$$B = \frac{\sin 2x + 2\sin 3x + \sin 4x}{\cos 3x + 2\cos 4x + \cos 5x} = \frac{2\sin 3x \cos x + 2\sin 3x}{2\cos 4x \cos x + 2\cos 4x} = \frac{2\sin 3x(\cos x + 1)}{2\cos 4x(\cos x + 1)} = \frac{\sin 3x}{\cos 4x}$$

Câu 43: Trên nóc một tòa nhà có một cột ăng-ten cao $5m$. Từ vị trí quan sát A cao $7m$ so với mặt đất, có thể nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột ăng-ten dưới góc α và β so với phương nằm ngang. Biết chiều cao của tòa nhà là $18,9m$, hai tòa nhà cách nhau $10m$.

a) Tính $\tan \alpha$;

b) Tính góc α (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ).



Lời giải

a) Ta có: $AD = 10m$

$$CD = 18,9 - 7 = 11,9m$$

$$BD = BC + CD = 11,9 + 5 = 16,9m$$

$$\tan \alpha = \frac{BD}{AD} = \frac{16,9}{10}$$

$$\tan \alpha = \frac{16,9}{10} \Rightarrow \alpha = 59^\circ$$

b)

Câu 44: Trong Vật lí, phương trình tổng quát của một vật dao động điều hoà cho bởi công thức $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, trong đó t là thời điểm (tính bằng giây), $x(t)$ là li độ của vật tại thời điểm t , A là biên độ dao động ($A > 0$) và $\varphi \in [-\pi; \pi]$ là pha ban đầu của dao động. Xét hai dao động điều hoà có phương trình:

$$x_1(t) = 3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{6}\right) (cm), x_2(t) = 3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{4}\right) (cm)$$

. Tìm dao động tổng hợp

$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ và sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích để tìm biên độ và pha ban đầu của dao động tổng hợp này.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } x(t) &= x_1(t) + x_2(t) = 3 \cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{6}\right) + 3 \cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= 3 \cdot 2 \left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{4}}{2}\right) \cos\left(\frac{\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{4}}{2}\right) \right) \\ &= 6 \cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{5\pi}{24}\right) \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{24}\right) = 6 \cos\left(\frac{\pi}{24}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{5\pi}{24}\right) \end{aligned}$$

Vậy biên độ của dao động là $6 \cos\left(\frac{\pi}{24}\right)$. Pha ban đầu của chuyển động là $\frac{5\pi}{24}$.

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>