

**ĐỀ 18 ( THIỆU HÓA )**  
**GIAO LƯU HSG TOÁN 9 NĂM 2023 - 2024**  
**( NGÀY THI 05/11/2023 )**

**Câu 1:** (4,0 điểm).

1. Cho biểu thức  $P = \left( \frac{1}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}} + \frac{2-x}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} \right) \cdot \left( \frac{2}{\sqrt{3} - \sqrt{x+2}} + \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{3}}{x+2 - \sqrt{3x+6}} \right)$

Rút gọn P và tìm giá trị x của để biểu thức P có giá trị nguyên.

2. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn:  $a^3 - 12c^2 + 48c - 64 = 0$ ;  $b^3 - 12a^2 + 48a - 64 = 0$ ;  
 $c^3 - 12b^2 + 48b - 64 = 0$ . Tính giá trị biểu thức:  $Q = (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^{2023}$

**Câu 2:** (4,0 điểm).

1. Giải phương trình:  $3\sqrt{4x+1} + 4x\sqrt{3x-2} = 3x^2 + 4x + 5$

2. Giải hệ phương trình sau : 
$$\begin{cases} 2(x-2)\sqrt{x+6} = 6-y \\ (x-2)\sqrt{y+2} = \sqrt{y+1}\sqrt{x^2-4x+5} \end{cases}$$

**Câu 3:** (4,0 điểm).

1. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, y) với x, y nguyên tố cùng nhau và thỏa mãn phương trình:  $2(x^3 - x) = y^3 - y$

2. Cho số tự nhiên n và số nguyên tố p sao cho  $a = \frac{2n+2}{p}$  và  $b = \frac{4n^2+2n+1}{p}$  là các số nguyên.

Chứng minh rằng a và b không đồng thời là các số chính phương.

**Câu 4:** (6,0 điểm).

Cho tam giác ABC vuông tại A nội tiếp đường tròn (O; R) có đường cao AH. Vẽ đường tròn tâm A bán kính AH. Từ C kẻ tiếp tuyến CM với đường tròn (A) (M là tiếp điểm, M không thuộc BC). Vẽ đường kính MD của đường tròn (A). Gọi I là giao điểm của AC và HM, đường thẳng qua A vuông góc với CD cắt MH tại F.

1. Chứng minh D, B, F thẳng hàng.

2. Gọi P, Q là giao điểm của đường tròn (O) và (A), Chứng minh PQ đi qua trung điểm G của AH.

3. Giả sử BC cố định, A di chuyển. Xác định vị trí điểm A trên đường tròn (O) để PQ lớn nhất, khi đó tính PQ theo R.

**Câu 5:** (2,0 điểm)

Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn  $x + 3y + 2z = 0$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x^2 + 9y^2}{xy + 1} + z(z^2 - 8z + 17).$$

..... Hết .....

## HƯỚNG DẪN ĐỀ 18

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
<b>Câu 1</b>	<b>1</b>	ĐKXD: $x \geq -1, x \neq 1, x \neq 2.$	<i>0,25đ</i>
		$P = \left[ \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}}{1} + \frac{(2-x)(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}{x-2} \right] \cdot \left[ \frac{2}{\sqrt{3} - \sqrt{x+2}} - \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{3}}{\sqrt{x+2}(\sqrt{3} - \sqrt{x+2})} \right]$	<i>0,25đ</i>
		$= (\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1} - \sqrt{x+1} - \sqrt{3}) \left[ \frac{2\sqrt{x+2} - \sqrt{x+2} - \sqrt{3}}{\sqrt{x+2}(\sqrt{3} - \sqrt{x+2})} \right]$	<i>0,25đ</i>
		$= (\sqrt{x+2} - \sqrt{3}) \cdot \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3}}{\sqrt{x+2}(\sqrt{3} - \sqrt{x+2})} = \sqrt{\frac{3}{x+2}} - 1$	<i>0,25đ</i>
		Ta có $\sqrt{\frac{3}{x+2}} - 1 > -1$	<i>0,25đ</i>
		mà: $x \geq -1 \Rightarrow x+2 \geq 1 \Rightarrow \frac{3}{x+2} \leq 3 \Rightarrow \sqrt{\frac{3}{x+2}} - 1 \leq \sqrt{3} - 1$	<i>0,25đ</i>
		suy ra $-1 < \sqrt{\frac{3}{x+2}} - 1 \leq \sqrt{3} - 1 \Leftrightarrow -1 < P \leq \sqrt{3} - 1$	
		Để P nguyên thì $P = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{3}{x+2}} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (loại)	<i>0,25đ</i>
		Vậy không có giá trị x để P nguyên	<i>0,25đ</i>
		<b>2</b>	
suy ra một trong ba biểu thức $(a-4)^3; (b-4)^3; (c-4)^3$ ít nhất có một biểu thức không âm. Không mất tính tổng quát giả sử $(c-4)^3 \geq 0 \Leftrightarrow c \geq 4 \Leftrightarrow c-2 \geq 2 \Leftrightarrow (c-2)^2 \geq 4$	<i>0,5đ</i>		
Từ (1) ta có	<i>0,5đ</i>		

		$a^3 - 12c^2 + 48c - 64 = 0 \Leftrightarrow a^3 - 16 = 12c^2 - 48c + 48 \Leftrightarrow a^3 - 16 = 12(c - 2)^2 \geq 48$ $\Leftrightarrow a^3 \geq 64 \Leftrightarrow a \geq 4 \Leftrightarrow (a - 4)^3 \geq 0$	
		<p>làm tương tự với (2) ta được <math>b \geq 4 \Leftrightarrow (b - 4)^3 \geq 0</math></p> <p>do đó <math>(a - 4)^3 + (b - 4)^3 + (c - 4)^3 = 0 \Rightarrow a = b = c = 4</math></p>	0,25đ
		<p>Vậy <math>Q = (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^{2023} = (\sqrt{4} + \sqrt{4} + \sqrt{4})^{2023} = 6^{2023}</math></p>	0,25đ
<b>Câu 2</b>	<b>1</b>	$3\sqrt{4x+1} + 4x\sqrt{3x-2} = 3x^2 + 4x + 5$	0,25đ
		<p>ĐK: <math>x \geq \frac{2}{3}</math></p>	
		<p>Ta có</p> $3\sqrt{4x+1} + 4x\sqrt{3x-2} = 3x^2 + 4x + 5 \Leftrightarrow [3\sqrt{4x+1} - (2x+5)] + x[4\sqrt{3x-2} - (3x+2)] = 0$	0,5đ
		<p>Ta có với <math>x \geq \frac{2}{3}</math> thì</p> $a = 3\sqrt{4x+1} + (2x+5) > 0$ $b = 4\sqrt{3x-2} + (3x+2) > 0$	
		<p>Khi đó phương trình:</p> $\frac{9(4x+1) - (2x+5)^2}{a} + \frac{x[16(3x-2) - (3x+2)^2]}{b} = 0$	0,25đ
		$\Leftrightarrow \frac{-4x^2 + 16x - 16}{a} + \frac{x(-9x^2 + 36x - 36)}{b} = 0$	0,25đ
		$\Leftrightarrow -(x-2)^2 \left( \frac{4}{a} + \frac{9x}{b} \right) = 0 \Leftrightarrow x = 2$	0,25đ
		<p>Do <math>\frac{4}{a} + \frac{9x}{b} &gt; 0</math> với <math>x \geq \frac{2}{3}</math></p>	0,25đ
		<p>Vậy phương trình có nghiệm <math>x = 2</math>.</p>	0,25đ
	<b>2</b>	<p>Điều kiện : <math>y \geq -2; x \geq -6</math></p>	0,25đ
		<p>Từ (2) :</p> $(x-2)\sqrt{y+2} = \sqrt{y+1}\sqrt{x^2 - 4x + 5}$ $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{y+2}}{\sqrt{y+1}} = \frac{\sqrt{(x-2)^2 + 1}}{(x-2)}$ $\Leftrightarrow \sqrt{\frac{y+2}{y+1}} = \sqrt{\frac{(x-2)^2 + 1}{(x-2)^2}}$	0,5đ

		$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{(y+1)+1}{y+1}} = \sqrt{\frac{(x-2)^2+1}{(x-2)^2}}$ <p>Chỉ ra <math>y+1=(x-2)^2</math>. Thay vào (1) ta được phương trình :</p>	0,25đ
		$(1) \Leftrightarrow (x-2)^2 + 2(x-2)\sqrt{x+6} - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = x-2 \geq 0 \\ t^2 + 2t\sqrt{t+8} = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = x-2 \geq 0 \\ 2t\sqrt{t+8} = 7 - t^2 \end{cases}$	0,25đ
		$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq t = x-2 \leq \sqrt{7} \\ 4t^2(t+8) = (7-t^2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq t = x-2 \leq \sqrt{7} \\ t^4 - 4t^3 - 46t^2 + 49 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq t = x-2 \leq \sqrt{7} \\ (t-1)(t^3 - 3t^2 - 49t - 49) = 0 \end{cases}$	0,25đ
		<p>*) Trường hợp : <math>t = 1</math> hay <math>x - 2 = 1</math> suy ra <math>x = 3</math> và <math>y + 1 = 1</math> hay <math>y = 0</math> .          *) Trường hợp : <math>t^3 - 3t^2 - 49t - 49 = 0</math> Phương trình vô nghiệm</p> <p>Vậy nghiệm hệ là <math>(x;y)=(3;0)</math></p>	0,25đ
<b>Câu 3</b>	<b>1</b>	<p>Tìm tất cả các cặp số nguyên dương <math>(x, y)</math> với <math>x, y</math> nguyên tố cùng nhau và thỏa mãn phương trình: <math>2(x^3 - x) = y^3 - y</math></p> <p>Áp dụng hằng đẳng thức:  <math>a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)</math> ta có:  <math>2(x^3 - x) = y^3 - y</math>  <math>\Leftrightarrow x^3 + x^3 + (-y^3) = 2x - y \Leftrightarrow (2x - y)(x^2 + y^2 + 2xy - 1) = 3x^2y</math> (*)  <math>\Rightarrow \begin{cases} 3x^2y : 2x - y \\ 3x^2(2x - y) : 2x - y \end{cases} \Rightarrow 6x^3 : 2x - y</math></p>	0,5đ
		<p>Mặt khác, <math>(x, y) = 1 \Rightarrow (2x - y, x) = 1 \Rightarrow (2x - y, x^3) = 1</math>  <math>\Rightarrow 6 : 2x - y \Rightarrow 2x - y \in \{1; 2; 3; 6\}</math> (do từ (*) <math>\Rightarrow 2x - y \in \mathbb{N}^*</math>)</p>	0,25đ
		<p>Trường hợp 1: <math>2x - y = 1 \Leftrightarrow y = 2x - 1</math> thay vào PT đã cho ta được:  <math>6x(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1</math></p>	0,25đ
		<p>Trường hợp 2: <math>2x - y = 2 \Leftrightarrow y = 2x - 2</math> thay vào PT đã cho ta được:  <math>(x-1)(x^2 - 3x + 1) = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 0</math> (loại)</p>	0,25đ
		<p>Trường hợp 3: <math>2x - y = 3 \Leftrightarrow y = 2x - 3</math> thay vào PT đã cho ta được:  <math>x(x-3)^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow y = 5</math></p>	0,25đ
		<p>Trường hợp 4: <math>2x - y = 6 \Leftrightarrow y = 2x - 6</math> thay vào PT đã cho ta được:  <math>x^3 - 12x^2 + 36x - 35 = 0</math>          Do <math>x, y</math> nguyên dương nên <math>x &gt; 3</math> và <math>x \in U(35) \Rightarrow x \in \{5; 7; 35\}</math></p>	0,25đ

Bằng cách thử trực tiếp ta thấy không có giá trị nào thỏa mãn  
 Vậy các cặp  $(x, y)$  thỏa mãn đề bài là:  $(1; 1), (4; 5)$

0,25đ

2

Do  $b = \frac{4n^2 + 2n + 1}{p}$  là số nguyên nên  $p$  lẻ

0,5đ

Và do  $a = \frac{2n+2}{p}$  nguyên nên  $\begin{cases} 2n+2 : p \\ 4n^2 + 2n + 1 : p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n+1 : p \\ (4n-2)(n-1) + 3 : p \end{cases} \Rightarrow 3 : p \Rightarrow p = 3$

Giả sử  $a, b$  là các số chính phương, khi đó  $a.b$  chính phương. Đặt  $a.b = m^2$  ta có

0,25đ

$$ab = m^2 \Leftrightarrow \frac{2n+2}{3} \cdot \frac{4n^2 + 2n + 1}{3} = m^2 \Leftrightarrow (2n+2)(4n^2 + 2n + 1) = 9m^2$$

$$\Leftrightarrow (2n+1)^3 + 1 = 9m^2 \Leftrightarrow (3m-1)(3m+1) = (2n+1)^3$$

Do đó  $m$  chẵn, dễ dàng thấy  $(3m-1; 3m+1) = 1$  suy ra tồn tại các số nguyên dương

0,25đ

$x, y$  sao cho  $\begin{cases} 3m+1 = x^3 \\ 3m-1 = y^3 \end{cases}, (x, y) = 1; x > y$

Trừ theo về hai đẳng thức ta có:

0,25đ

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2) = 2$$

$$*) \begin{cases} x-y=1 \\ x^2 + xy + y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x-1 \\ x^2 + x(x-1) + (x-1)^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow 3x^2 - 3x - 1 = 0$$

0,25đ

Không có nghiệm nguyên

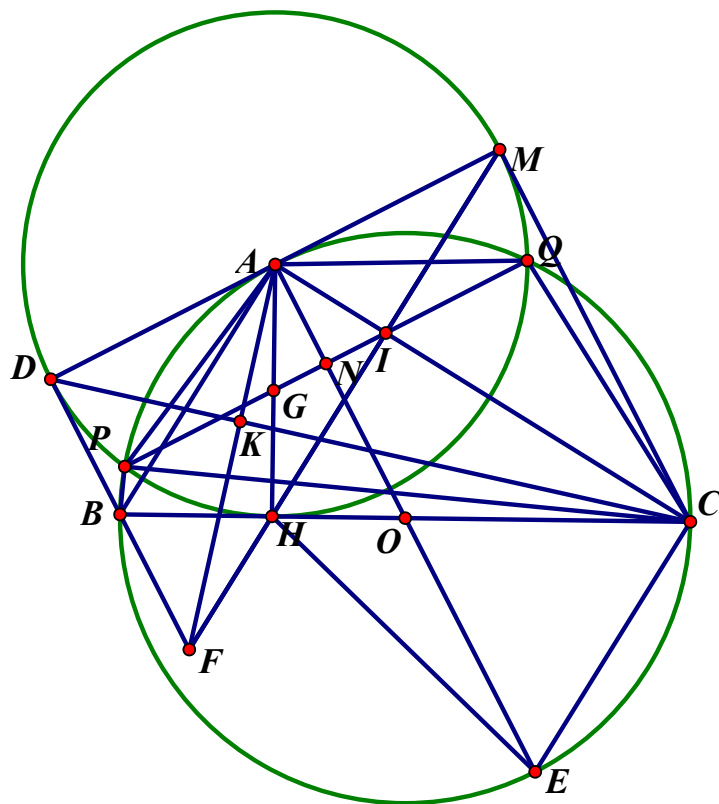
$$*) \begin{cases} x-y=2 \\ x^2 + xy + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases} \text{ vô lý vì } x, y \text{ không âm.}$$

0,25đ

Vậy  $a$  và  $b$  không đồng thời là các số chính phương.

0,25đ

Câu 4.1  
4



Gọi K là giao điểm của AF và DC. Do CM và CH là hai tiếp tuyến của (A) nên AC vuông góc MH

0,25đ

Áp dụng hệ thức trong tam giác MAC ta có:

$$AM^2 = AI \cdot AC$$

Ta có tam giác AIF đồng dạng với AKC (g-g) nên:  $\frac{AI}{AK} = \frac{AF}{AC} \Leftrightarrow AI \cdot AC = AK \cdot AF$

0,5đ

$$\text{Suy ra } AM^2 = AK \cdot AF \Rightarrow AD^2 = AK \cdot AF \Rightarrow \frac{AD}{AK} = \frac{AF}{AD}$$

Xét tam giác ADK và AFD có:

0,5đ

Góc DAF chung và  $\frac{AD}{AK} = \frac{AF}{AD}$  suy ra tam giác ADK đồng dạng với AFD (g-c-g)

Nên góc ADF = góc AKD =  $90^\circ$  suy ra  $FD \perp AD$  (1)

Lại có  $\sphericalangle DAB + \sphericalangle MAC = 90^\circ \Rightarrow \sphericalangle DAB = \sphericalangle ACM = \sphericalangle ACH = \sphericalangle BAH$

0,5đ

Xét hai tam giác DAB và HAB có:

AB chung

$$AD = AH$$

$$\sphericalangle DAB = \sphericalangle BAH$$

Suy ra

	$\Delta DAB = \Delta HAB (c - g - c) \Rightarrow \widehat{BDA} = \widehat{BHA} = 90^\circ$ $\Rightarrow BD \perp AD \quad (2)$	
	Từ (1) và (2) suy ra D, B, F thẳng hàng	0,25đ
<b>4.2</b>	Kẻ đường kính AE của đường tròn (O) Gọi N là giao điểm của AO và PQ, do PQ là dây chung của hai đường tròn (O) và (A) nên OA là trung trực của PQ	0,25đ
	Ta có $\Delta ANG \sim \Delta AHO (g - g) \Rightarrow \frac{AN}{AH} = \frac{AG}{AO} \Rightarrow AG \cdot AH = AN \cdot AO$	0,5đ
	Mà $AN \cdot AO = \frac{1}{2} AN \cdot AE \Rightarrow AG \cdot AH = \frac{1}{2} AN \cdot AE$	0,25đ
	Lại có $\Delta ANI \sim \Delta ACE (g - g) \Rightarrow \frac{AN}{AC} = \frac{AI}{AE} \Rightarrow AN \cdot AE = AI \cdot AC$ $\Rightarrow AG \cdot AH = \frac{1}{2} AI \cdot AC$	0,5đ
	Theo hệ thức lượng trong tam giác AMC có: $AH^2 = AI \cdot AC \Rightarrow AG \cdot AH = \frac{1}{2} AH^2 \Rightarrow AG = \frac{1}{2} AH$	0,25đ
	Vậy G là trung điểm của AH	0,25đ
<b>4.3</b>	Do PQ là dây của đường tròn (O) nên để PQ lớn nhất thì ON nhỏ nhất hay AN lớn nhất ( vì OA = R không đổi)	0,5đ
	Theo câu ta có $AG \cdot AH = AO \cdot AN \Rightarrow AN = \frac{AH}{2R}$	0,25đ
	Do đó để AN lớn nhất thì AH lớn nhất, mà AH lớn khi A chính giữa cung BC	0,25đ
	Khi A chính giữa cung BC thì H trùng O, khi đó AQ = OQ = AO = R	0,5đ
	suy ra tam giác AOQ đều có QN là đường cao, suy ra $QN = \frac{\sqrt{3}}{2} R \Rightarrow PQ = \sqrt{3} R$	0,5đ
<b>Câu 5</b>	Cho các số thực không âm $x, y, z$ thỏa mãn $x + 3y + 2z = 0$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:	

$$P = \frac{x^2 + 9y^2}{xy + 1} + z(z^2 - 8z + 17).$$

+) Ta có:  $x + 3y + 2z = 3 \Rightarrow x + 3y = 3 - 2z \Rightarrow 3 - 2z \geq 0 \Rightarrow z \leq \frac{3}{2}$

0,25đ

+) Lại có  $\frac{x^2 + 9y^2}{xy + 1} = \frac{x^2 + 9y^2}{xy + 1} + 6 - 6 = \frac{x^2 + 9y^2 + 6xy + 6}{xy + 1} - 6 = \frac{(x + 3y)^2 + 6}{xy + 1} - 6$

0,5đ

$$\leq \frac{(3 - 2z)^2 + 6}{1} - 6, \text{ do } \begin{cases} x + 3y = 3 - 2z \\ xy \geq 0 \end{cases}$$

0,25đ

Khi đó  $P \leq (3 - 2z)^2 + z^3 - 8z^2 + 17z = z^3 - 4z^2 + 5z + 9 = (z^2 - 2z + 1)(z - 2) + 11$

0,5đ

$$= 11 + (z - 1)^2(z - 2) \leq 11, \text{ do } z - 2 < 0, " 0 \leq z \leq \frac{3}{2}.$$

0,25đ

Dấu "=" xảy ra  $\hat{U} \quad z = 1.$

Vậy  $\max P = 11 \hat{U} \quad (x; y; z) = \left(0; \frac{1}{3}; 1\right)$  hoặc  $(x; y; z) = \left(\frac{2}{3}; 0; 1\right)$

0,25đ