**ĐỀ 88**

**HSG TOÁN 9 \_ TUYÊN QUANG \_ 2023-2024**

**Câu 1 (5,0 điểm).**

1. Rút gọn biểu thức P = $\left(\frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}}-\frac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}\right)$:$\left(\frac{2\left(x-2\sqrt{x}+1\right)}{x-1}\right)$ với x > 0; x$\ne $1
2. Cho các số thực dương a, b, c, d thoả mãn a $\geq $ c + d và b $\geq $c + d. Chứng minh rằng ab $\geq $ ad + bc.

**Câu 2 (5,0 điểm).**

1. Tìm m để phương trình $\left(x-1\right)\left(x^{2}-2x+m\right)=0$ (1) có ba nghiệm phân biệt $x\_{1};$ $x\_{2};$ $x\_{3}$ thỏa mãn $\frac{1}{x\_{1}}$ + $\frac{1}{x\_{2}}$ + $\frac{1}{x\_{3}}$ = $\frac{1}{3}$
2. Giải hệ phương trình $\left\{\begin{array}{c}x^{2}+ \frac{1}{y^{2}}+x+\frac{1}{y}=4\\x^{3}+\frac{1}{y^{3}}+\frac{x}{y}\left(\frac{1}{y}+x\right)=4\end{array}\right.$

**Câu 3 (5,0 điểm).**

Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi D là trung điểm của AC. Phân giác trong của góc $\hat{BAC}$ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD tại E (E thuộc miền trong tam giác ABC). Đường thẳng BD cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE tại F khác B. Đường thẳng AF cắt BE tại I và CI cắt BD tại K.

1. Chứng minh rằng BI là tia phân giác của góc $\hat{ABK}$
2. Gọi M là trung điểm của BC.Chứng minh tứ giác AFMC nội tiếp đường tròn.
3. Chứng minh rằng $AD^{2}$ = DK.DB

**Câu 4 (3,0 điểm).**

1. Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $x-y=xy$
2. Cho các số nguyên dương a; b; n không chia hết cho số nguyên tố lẻ p. Chứng minh rằng A = $\left(a-b\right)n^{\frac{p-1}{2}}+a+b$ không chia hết cho p.

**Câu 5 (2,0 điểm).**

Trên một tờ giấy A4 kích thước 210 mm $×$ 297 mm, bạn An vẽ 30 đường tròn bán kính 1cm. Chứng minh rằng sau khi bạn An vẽ 30 đường tròn, bạn Bình luôn dựng được 5 hình vuông có độ dài các cạnh là 2cm mà không có điểm chung với bất kỳ đường tròn nào và hai hình vuông bất kỳ cũng không giao nhau.

**---------- HẾT-----------**

**HƯỚNG DẪN GIẢI**

**Câu 1 (5,0 điểm).**

1. Rút gọn biểu thức P = $\left(\frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}}-\frac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}\right)$:$\left(\frac{2\left(x-2\sqrt{x}+1\right)}{x-1}\right)$ với x > 0; x$\ne $1
2. Cho các số thực dương a, b, c, d thoả mãn a $\geq $ c + d và b $\geq $c + d. Chứng minh rằng ab $\geq $ ad + bc.

**Lời giải**

a) Với x > 0; x$\ne $1

P = $\left(\frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}-\frac{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}\right)$:$\left(\frac{2\left(\sqrt{x}-1\right)^{2}}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}\right)$

= $\frac{x+\sqrt{x}+1-x+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$:$\frac{2(\sqrt{x}-1)}{\left(\sqrt{x}+1\right)}$

= $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$

Vậy P = $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ Với x > 0; x$\ne $1

b) Từ a $\geq $ c + d $⇒$ $a-c\geq $ d (1)

b $\geq $c + d $⇒$ $b-d\geq $ c (2)

Nhân (1) và (2) theo vế ta được

$\left(a-c\right)\left(b-d\right)\geq $*cd* $⇔$$ab-ad-bc+cd ⇔ ab\geq ad+bc$

**Câu 2 (5,0 điểm).**

1. Tìm m để phương trình $\left(x-1\right)\left(x^{2}-2x+m\right)=0$ (1) có ba nghiệm phân biệt $x\_{1};$ $x\_{2};$ $x\_{3}$ thỏa mãn $\frac{1}{x\_{1}}$ + $\frac{1}{x\_{2}}$ + $\frac{1}{x\_{3}}$ = $\frac{1}{3}$
2. Giải hệ phương trình $\left\{\begin{array}{c}x^{2}+ \frac{1}{y^{2}}+x+\frac{1}{y}=4\\x^{3}+\frac{1}{y^{3}}+\frac{x}{y}\left(\frac{1}{y}+x\right)=4\end{array}\right.$

**Lời giải**

a)

+ Từ $\frac{1}{x\_{1}}$ + $\frac{1}{x\_{2}}$ + $\frac{1}{x\_{3}}$ = $\frac{1}{3}$ suy ra $x\_{1}\ne $0*;* $x\_{2}\ne $0*;* $x\_{3}\ne $0

+ Từ phương trình (1) suy ra một nghiệm $x\_{1}$ = 1

+ Xét phương trình $x^{2}-2x+m=0 (2).$

Để phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt $x\_{1};$ $x\_{2};$ $x\_{3}$ thỏa mãn $\frac{1}{x\_{1}}$ + $\frac{1}{x\_{2}}$ + $\frac{1}{x\_{3}}$ = $\frac{1}{3}$ (\*) thì phương trình (2) phải có hai nghiệm phân biệt $x\_{2};$ $x\_{3}$ đều khác 1.

Điều kiện để phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt là: $∆$' = $1-m>0$

$⇔m<1$

Khi đó phương trình (2) có hai nghiệm $x\_{2}$ và $x\_{3}$ thỏa mãn định lí Viet:

$x\_{2}$ + $x\_{3}$ = 2; $x\_{2}x\_{3}$ = m.

+ Từ (\*) với$ x\_{1}$ = 1 ta có:

$\frac{1}{x\_{2}}$ + $\frac{1}{x\_{3}}$ = $\frac{1}{3}$ $-1$ $⇔$ $\frac{x\_{2}+ x\_{3}}{x\_{2}x\_{3}}$ = $\frac{-2}{3}$ $⇒$ $\frac{2}{m}$ = $\frac{-2}{3}$ $⇒$ m = -3 (Thỏa mãn điều kiện

m < 1)

+ Với m = -3 thay vào phương trình (2) ta được phương trình

$x^{2}-2x-3=0$ $⇔$ $\left(x+1\right)\left(x-3\right)=0$ $⇔$ $\left[\begin{array}{c}x=-1\\x=3\end{array}(TMĐK)\right.$

Kết luận m = -3 thỏa mãn điều kiện đề tài.

b) Giải hệ phương trình $\left\{\begin{array}{c}x^{2}+ \frac{1}{y^{2}}+x+\frac{1}{y}=4 (1)\\x^{3}+\frac{1}{y^{3}}+\frac{x}{y}\left(\frac{1}{y}+x\right)=4 (2)\end{array}\right.$

+ Điều kiện x$\ne $0; y$\ne $0

+ Áp dụng HĐT: $a^{2}$+$b^{2}$= $\left(a+b\right)^{2}-2ab.$

$a^{3}+b^{3}=\left(a+b\right)^{3}-3ab(a+b)$

Ta được

$x^{2}+ \frac{1}{y^{2}}= \left(x+\frac{1}{y}\right)^{2} -2\frac{x}{y}$ và $x^{3}+\frac{1}{y^{3}}$ = $\left(x+\frac{1}{y}\right)^{3}-3\frac{x}{y}\left(x+\frac{1}{y}\right)$

Khi đó hệ trở thành $\left\{\begin{array}{c}\left(x+\frac{1}{y}\right)^{2} -2\frac{x}{y}+x+\frac{1}{y}=4\\\left(x+\frac{1}{y}\right)^{3}-2\frac{x}{y}\left(x+\frac{1}{y}\right)=4\end{array}\right.$

Đặt $a=x+\frac{1}{y}$ và b = $\frac{x}{y}$ ta được hệ $\left\{\begin{array}{c}a^{2}-2b+a=4\\a^{3}-2ab = 4\end{array}\right.$ $⇔$ $\left\{\begin{array}{c}a^{3}-2ab+a^{2}=4a\\a^{3}-2ab =4\end{array}\right.$

+ Trừ vế với vế ta được $a^{2}=4a-4⇔\left(a-2\right)^{2}=0⇔a$= 2*.*

+ Với a = 2 $⇒$ b = 1 khi đó ta có: $\left\{\begin{array}{c}x+\frac{1}{y}=2\\\frac{x}{y} = 1\end{array}\right.⇔ x=y=1$ (TMĐK)

+ Kết luận hệ có nghiệm duy nhất (x,y) = (1,1)

**Câu 3 (5,0 điểm).**

Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi D là trung điểm của AC. Phân giác trong của góc $\hat{BAC}$ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD tại E (E thuộc miền trong tam giác ABC). Đường thẳng BD cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE tại F khác B. Đường thẳng AF cắt BE tại I và CI cắt BD tại K.

1. Chứng minh rằng BI là tia phân giác của góc $\hat{ABK}$
2. Gọi M là trung điểm của BC.Chứng minh tứ giác AFMC nội tiếp đường tròn.
3. Chứng minh rằng $AD^{2}$ = DK.DB

**Lời giải**

****

**a) Chứng minh rằng BI là tia phân giác của** $\hat{ABK}$

- Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD và O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE.

Khi đó ta có: $△$AEC = $△$AEB (c-g-c) $⇒$ $\hat{ACE}$ = $\hat{ABE}$ (1)

Mà $\hat{ACE}$ = $\hat{EBD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung ED của đường tròn (O)) (2)

- Từ (1) và (2) suy ra $\hat{ABE}$ = $\hat{EBD}$ hay BI là phân giác $\hat{ABK}$.

**b) Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh tứ giác AFMC nội tiếp đường tròn.**

- Tứ giác ABFE nội tiếp đường tròn (O’) nên $\hat{DFE}$ = $\hat{BAE}$

Mà $\hat{BAE}$ = $\hat{EAD}$ (do AE là phân giác $\hat{BAC}$) suy ra $\hat{DFE}$ =$\hat{ EAD}$

- Từ BE là phân giác $\hat{ABF}$ suy ra $\hat{AE} = \hat{EF}$ suy ra $△$EAF cân tại E. Do đó $\hat{EAF}$ = $\hat{AFE}$

- Từ đó $\hat{EAD}$ +$\hat{ EAF}$ = $\hat{EFD}$ + $\hat{EFA}$ hay $\hat{FAD}$ = $\hat{DFA}$ suy ra $△$DAF cân tại D

Do đó DF = DA = DC. Suy ra $△$AFC vuông tại F (3).

- $△$ABC cân tại A có M là trung điểm BC nên $△$AMC vuông tại M (4)

- Từ (3) và (4) suy ra tứ giác AFMC nội tiếp đường tròng (D); đường kính AC.

**c) Chứng minh rằng** $AD^{2}$ = DK.DB

+ Kẻ DH // AF, H - CI. Khi đó:

$\frac{CD}{CA}$ = $\frac{HD}{AI}$; $\frac{KF}{KD}$ = $\frac{FI}{HD}$ suy ra $\frac{CD}{CA}$ . $\frac{KF}{KD}$ = $\frac{HD}{AI}$ . $\frac{FI}{HD}$ = $\frac{FI}{AI}$ do đó $\frac{AI}{FI}$ . $\frac{CD}{CA}$ . $\frac{KF}{KD}$ = 1

Mà BI là phân giác$\hat{ ABF} $nên $\frac{AI}{FI}$ = $\frac{AB}{BF}$ suy ra $\frac{AB}{BF}$ . $\frac{CD}{CA}$ . $\frac{KF}{KD}$ = 1

$⇒$ $\frac{CD}{FB}$ . $\frac{KF}{KD}$ = 1

Do đó DC = DF nên $\frac{DF}{BF}$ . $\frac{KF}{KD}$ = 1 $⇒$ $\frac{BF}{DF}$ = $\frac{KF}{KD}$ hay $\frac{BF}{DA}$ = $\frac{KF}{KD}$

Suy ra $\frac{BF}{DA}$ + 1 = $\frac{KF}{KD} $+ 1 $⇒$ $\frac{BF + DF}{DA}$ = $\frac{KF + KD}{KD}$

Do đó $\frac{BD}{DA}$ = $\frac{DF}{DK}$ $⇒$ $\frac{BD}{DA}$ = $\frac{DA}{DK}$ hay $\frac{BD}{DA}$ = $\frac{DA}{DK}$ suy ra $AD^{2}=DK.DB$

**Câu 4 (3,0 điểm).**

1. Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $x-y=xy$
2. Cho các số nguyên dương a; b; n không chia hết cho số nguyên tố lẻ p. Chứng minh rằng A = $\left(a-b\right)n^{\frac{p-1}{2}}+a+b$ không chia hết cho p.

**Lời giải**

a) $x-y=xy$ $⇔$ $\left(x+1\right)y=x$ (1)

+ Nếu $x =-1$ thì VT = 0;VP = -1, suy ra phương trình vô nghiệm

+ Nếu $x \ne -$1 thì y = $\frac{x}{x+1}$ = $\frac{x+1-1}{x+1}$ = 1 - $\frac{1}{x+1}$

Do đó y $\in $ Z $⇔$ $x+1\in $ $U$(1) = {$-1;1\}$

Nếu $x+1=1⇔ x = 0 ⇒ $y = 0

Nếu $x+1=-1$ $⇔$ $x=-2⇒y=2$

Vậy có hai cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn phương trình là (0; 0), (2; -2)

b)

+ Vì các số nguyên dương a, b, n không chia hết cho số nguyên tố lẻ p nên

(a, p) = 1; (b, p) = 1; (n, p) = 1

+ Ta có p là số nguyên tố và (n, p) = 1 nên theo định lí Fermat nhỏ ta có

$n^{p-1}$ = 1 (mod p) $⇒$ $n^{p-1} - 1\vdots $p hay $n^{2.\frac{p-1}{2}}-1\vdots $p $⇒$ $\left(n^{\frac{p-1}{2}}\right)^{2}$ $- 1\vdots $p hay $\left(n^{\frac{p-1}{2}}-1\right)\left(n^{\frac{p-1}{2}}+1\right)\vdots $p

Vì p nguyên tố nên $n^{\frac{p-1}{2}}-1\vdots $p hoặc$ n^{\frac{p-1}{2}}+1$ $\vdots $p

- Xét A = $\left(a-b\right)n^{\frac{p-1}{2}}$ $+ a+b $

$= a.n^{\frac{p-1}{2}}$ $-b.n^{\frac{p-1}{2}}+a+b=a\left(n^{\frac{p-1}{2}}+1\right)-b\left(n^{\frac{p-1}{2}}-1\right)$

\* TH 1:

Nếu $n^{\frac{p-1}{2}}-1$ $\vdots $p thì $n^{\frac{p-1}{2}}-1=pk (k\in $N) Suy ra

$A=a(pk+1+1)-bp=pk(a-b)+2a$ không chia hết cho p

\* TH 2:

Nếu $n^{\frac{p-1}{2}}+1$ $\vdots $p thì $n^{\frac{p-1}{2}}+1=pt (t\in $N) Do đó

A = $apt-b(pt-1-1)=pt(a-b)+b$ không chia hết cho p

Vậy A không chia hết cho P.

**Câu 5 (2,0 điểm).**

Trên một tờ giấy A4 kích thước 210 mm $×$ 297 mm, bạn An vẽ 30 đường tròn bán kính 1cm. Chứng minh rằng sau khi bạn An vẽ 30 đường tròn, bạn Bình luôn dựng được 5 hình vuông có độ dài các cạnh là 2cm mà không có điểm chung với bất kỳ đường tròn nào và hai hình vuông bất kỳ cũng không giao nhau.

**Lời giải.**

+ Chia chiều rộng tờ giấy A4 thành 10 phần bằng nhau, mỗi phần có chiều dài là $21:10=2,1$ cm

+ Chia chiều dài tờ giấy A4 thành 14 phần bằng nhau, mỗi phần có chiều dài là $29,7:14≈ $2,12 cm.

+ Với cách chia trên ta chia tờ giấy A4 thành 10.14 = 140 hình chữ nhật có kích thước 2,1 x 2,12 cm (Các hình chữ nhật này không có điểm trong chung)

+ Vẽ 30 hình tròn bán kính 1 cm nên theo nguyên lí Drichle tồn tại ít nhất

$\left[\frac{140}{30}+1\right]$ = 5 hình chữ nhật không chứa hình tròn nào. Mà trong 5 hình chữ nhật này vẽ được 5 hình vuông cạnh 2cm, suy ra điều phải chứng minh.