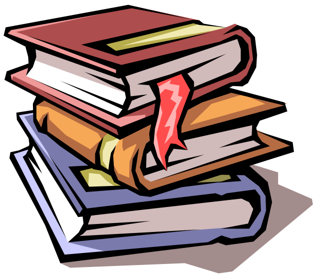
Tailieumontoan.com

Điện thoại (Zalo) 039.373.2038



TUYỂN TẬP ĐỀ THI
HỌC SINH GIỎI TOÁN CẤP TỈNH
NĂM 2021

Tài liệu sưu tầm, ngày 31 tháng 5 năm 2021

Mục Lục

Trang

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề số 1

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH LỚP 9
NĂM HỌC 2020 - 2021
Môn thi: **TOÁN**
Thời gian: **150 phút** *(không kể thời gian giao đề)*

Bài 1 (5.0 điểm).

a) Giải phương trình $x^2 - x + 8 = 4\sqrt{x+3}$

b) Chứng minh rằng biểu thức $K = \dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}$ có giá trị là số nguyên, trong đó a, b, c là ba số thực đôi một phân biệt.

Bài 2 (5.0 điểm).

a) Cho ba số a, b, c thỏa mãn $a+b+c$ và $ab-bc-ca$ cùng chia hết cho 3. Chứng minh rằng chia hết cho 9.

b) Cho đa thức $P(x) = x^3 + ax + b$ có một nghiệm là $1+\sqrt{3}$ (a, b là các số hữu tỉ). Chứng minh rằng đa thức *P(x)* chia hết đa thức $x^2 - 2x - 2$.

Bài 3 (2.0 điểm). Cho các số thực không âm a, b, c thay đổi thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = \sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a}$

Bài 4 (6.0 điểm). Cho đường tròn *(I)* nội tiếp tam giác nhọn ABC (AB < AC). Đường tròn (I) tiếp xúc với các cạnh BC, CA lần lượt tại điểm D, E. Qua điểm B, kẻ đường thẳng vuông góc với đường thẳng BI, cắt đường thẳng AI tại điểm J. Gọi P là hình chiếu vuông góc của điểm J trên đường thẳng BC.

a) Chứng minh rằng BD = CP.

b) Gọi N là giao điểm của hai đường thẳng AJ và BC. Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{AI} + \dfrac{1}{AJ} = \dfrac{2}{AN}$.

c) Gọi Q là giao điểm của hai đường thẳng JP và DE. Gọi K là trung điểm của PQ. Chứng minh rằng đường thẳng BK vuông góc với đường thẳng AP.

Bài 5 (2.0 điểm).

a) Tìm tất cả các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn $3^x + 2^y = 1 + 2^z$.

b) Cho một hình chữ nhật có diện tích bằng 1. Năm điểm phân biệt được đặt tùy ý vào hình chữ nhật sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng (mỗi điểm trong năm điểm đó có thể đặt được đặt trên cạnh hoặc đặt nằm trong hình chữ nhật).

i) Chứng minh rằng mọi tam giác tạo bởi ba điểm trong năm điểm đã cho đều có diện tích không vượt quá $\dfrac{1}{2}$.

ii) Với mỗi cách đặt năm điểm vào hình chữ nhật như trên, gọi n là số tam giác có ba đỉnh là ba điểm nằm trong năm điểm đó và diện tích không vượt qua $\dfrac{1}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của n.

LỜI GIẢI VÀ BÌNH LUẬN CÁC BÀI TOÁN

Bài 1 (5.0 điểm).

a) Giải phương trình $x^2 - x + 8 = 4\sqrt{x+3}$

b) Chứng minh rằng biểu thức $K = \dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}$ có giá trị là số nguyên, trong đó a, b, c là ba số thực đôi một phân biệt.

Lời giải.

a) Điều kiện . Phương trình đã cho có thể được viết lại thành

$$\left(x^2 - 2x + 1\right) + \left(x + 3 - 4\sqrt{x+3} + 4\right) = 0,$$

Hay $(x-1)^2 + \left(\sqrt{x+3} - 2\right)^2 = 0$

Vì $(x-1)^2 \geq 0$ và $\left(\sqrt{x+3}-2\right)^2 \geq 0$ nên (1) xảy ra khi và chỉ khi $(x-1)^2 = \left(\sqrt{x+3}-2\right)^2 = 0$ tức $x = 1$ (thỏa mãn). Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

b) Ta có

$$K = \frac{a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)} = \frac{a^2(b-c) + b^2(c-b+b-a) + c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)}$$

$$= \frac{\left(a^2 - b^2\right)(b-c) - \left(b^2 - c^2\right)(a-c)}{(a-b)(b-c)(a-c)} = \frac{(a-b)(b-c)(a+b-b-c)}{(a-b)(b-c)(a-c)} = 1.$$

Do đó, biểu thức K luôn nhận giá trị nguyên là 1.

Bài 2 (5.0 điểm).

a) Cho ba số a, b, c thỏa mãn $a+b+c$ và $ab-bc-ca$ cùng chia hết cho 3. Chứng minh rằng chia hết cho 9.

b) Cho đa thức $P(x) = x^3 + ax + b$ có một nghiệm là $1+\sqrt{3}$ (a, b là các số hữu tỉ). Chứng minh rằng đa thức *P(x)* chia hết đa thức $x^2 - 2x - 2$.

Lời giải.

a) Từ giả thiết ta có $(a+b)(a+b+c) + (ab-bc-ca)$ chia hết cho 3, hay $a^2 + b^2 + 3ab$ chia hết cho 3. Từ đó suy ra cùng chia hết cho 3.

Với mọi số nguyên x, ta có x chia 3 dư 0, 1 hoặc 2 nên x^2 chia 3 dư 0 hoặc 1.Suy ra a^2 và b^2 khi chia cho 3 có số dư là 0 hoặc 1. Như vậy, để $a^2 + b^2$ chia hết cho 3, ta phải có a^2 và b^2 cùng chia hết cho 3, tức a và b cùng chia hết cho 3. Mặt khác, do a + b + c chia hết cho 3 nên c cũng chia hết cho 3. Từ đây, dễ thấy $ab - bc - ca$ chia hết cho 9. Ta có điều phải chứng minh.

b) Từ giả thiết, ta có $P\left(1+\sqrt{3}\right)$, hay $(a+6)\sqrt{3} = -(a+b+10)$.

Nếu $a + 6 \neq 0$, ta có $\sqrt{3} = -\dfrac{a+b+10}{a+6}$ là một số hữu tỉ, mâu thuẫn vì $\sqrt{3}$ là một số vô tỉ. Do đó $a = -6$. Từ đó suy ra $a + b + 10 = 0$, tức $b = -4$. Vậy

$$P(x)=x^3-6x-4=(x^2-2x-2)(x+2)$$

Rõ ràng $P(x)$ chia hết cho đa thức x^2-2x-2.

Bài 3 (2.0 điểm). Cho các số thực không âm a, b, c thay đổi thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}$

Lời giải.

Giá trị lớn nhất của biểu thức Q. Với mọi số thực x, y và z, ta có

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\geq 0.$$

Từ đó suy ra $2(xy+yz+zx)\leq 2(x^2+y^2+z^2)$, hay $(x+y+z)^2\leq 3(x^2+y^2+z^2)$.

Sử dụng kết quả này, ta được:

$$Q^4=\left[\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}\right)^2\right]^2\leq\left[3(a+b+b+c+c+a)\right]^2$$
$$=36(a+b+c)^2\leq 36.3(a^2+b^2+c^2)=108.$$

Suy ra $Q\leq\sqrt[4]{108}$. Mặt khác, dễ thấy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức Q là $\sqrt[4]{108}$.

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức Q. Từ giả thiết, ta có $a^2,b^2,c^2\leq 1$. Suy ra $0\leq a,b,c\leq 1$.

Từ đây, ta có $a\geq a^2$ và $b\geq b^2$. Từ đó $a+b\geq a^2+b^2$. Mà $0\leq a^2+b^2=1-c^2\leq 1$ nên $a^2+b^2\geq(a^2+b^2)^2$. Tóm lại, ta có:

$$\sqrt{a+b}\geq\sqrt{a^2+b^2}\geq\sqrt{(a^2+b^2)^2}=a^2+b^2.$$

Chứng minh tương tự, ta cũng có: $\sqrt{b+c}\geq b^2+c^2,\sqrt{c+a}\geq c^2+a^2$.

Từ các kết quả trên, ta suy ra: $Q\geq a^2+b^2+b^2+c^2+c^2+a^2=2$.

Dấu đẳng thức xảy ra chẳng hạn khi $a=1$ và $b=c=0$. Vậy giá trị nhỏ nhất của Q là 2.

Bình luận: Để chứng minh $Q\geq 2$, ta còn có hai cách tiếp cận khác như sau.

Cách 1. Không mất tính tổng quát, giả sử $a\geq b\geq c$. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$\sqrt{a+b}+\sqrt{a+c}\geq 2\sqrt[4]{(a+b)(a+c)}=2\sqrt[4]{a^2+ab+ac+bc}$$
$$\geq 2\sqrt[4]{a^2+b^2+c^2+bc}=2\sqrt[4]{1+bc}\geq 2.$$

Lại có $\sqrt{b+c}\geq 0$ nên $Q\geq 2$.

Cách 2. Tương tự như trong lời giải đã trình bày ở trên, ta có $0\leq a,b,c\leq 1$ nên $a\geq a^2,b\geq b^2$ và $c\geq c^2$. Từ đây, với chú ý $(a+b)(a+c)\geq c^2,(b+c)(b+a)\geq b^2$ và $(c+a)(c+b)\geq c^2$, ta có

$$Q^2 = \left(\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}\right)^2 = 2(a+b+c)+2\left[\sqrt{(a+b)(a+c)}+\sqrt{(b+c)(b+a)}+\sqrt{(c+a)(c+b)}\right]$$
$$\geq 2(a+b+c)+2(a+b+c)=4(a+b+c)\geq 4\left(a^2+b^2+c^2\right)=4.$$

Suy ra $Q \geq 2.$

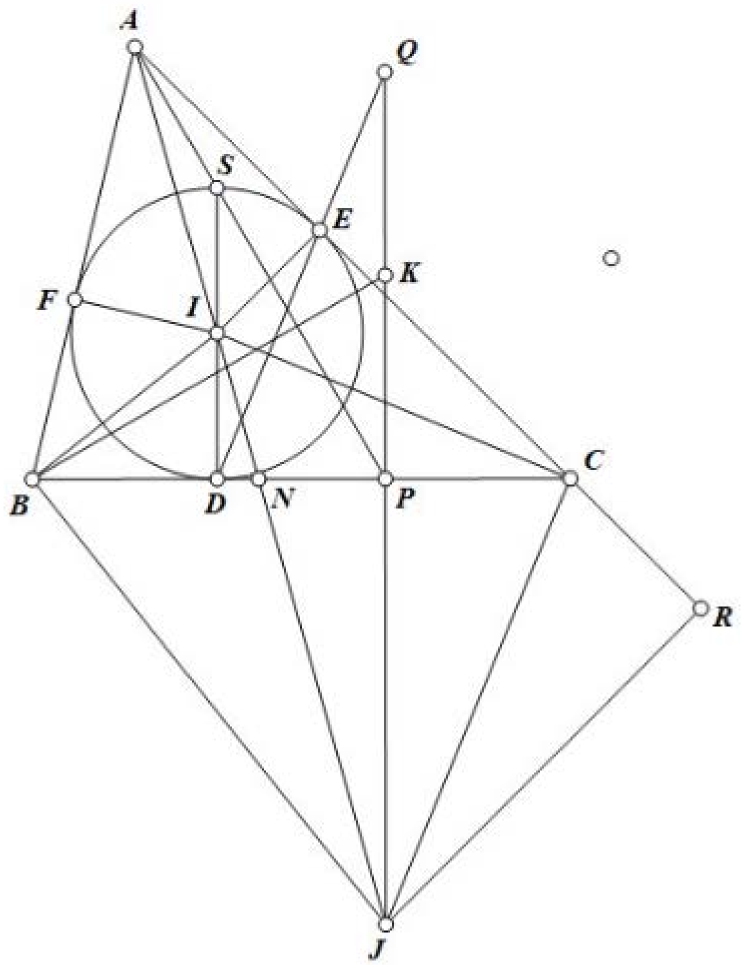
Bài 4 (6.0 điểm). Cho đường tròn *(I)* nội tiếp tam giác nhọn ABC (AB < AC). Đường tròn (I) tiếp xúc với các cạnh BC, CA lần lượt tại điểm D, E. Qua điểm B, kẻ đường thẳng vuông góc với đường thẳng BI, cắt đường thẳng AI tại điểm J. Gọi P là hình chiếu vuông góc của điểm J trên đường thẳng BC.

a) Chứng minh rằng BD = CP.

b) Gọi N là giao điểm của hai đường thẳng AJ và BC. Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{AI}+\dfrac{1}{AJ}=\dfrac{2}{AN}.$

c) Gọi Q là giao điểm của hai đường thẳng JP và DE. Gọi K là trung điểm của PQ. Chứng minh rằng đường thẳng BK vuông góc với đường thẳng AP.

Lời giải.



a) Có J là tâm đường tròn bàng tiếp tam giác góc A tam giác ABC.

$$\Rightarrow CP = BD = \frac{BA+BC-AC}{2}$$

Hoặc lấy trung điểm M của IJ, khi đó MB = MC, MD = MP nên BD = CP.

b) Tính chất của hàng điểm điều hòa (kiến thức lớp 10)

Có : BI, BJ là phân giác trong, ngoài tam giác ABN suy ra $\frac{IA}{IN}=\frac{JA}{JN}$

Cách biến đổi đại số: Đặt $k=\frac{IA}{IN}=\frac{JA}{JN}, AN=a$ từ đó tính được AI, AJ theo a, k. Thay vào điều kiện phải chứng minh.

Cách khác: $\frac{IA}{IN}=\frac{JA}{JN}\Rightarrow\frac{AN}{AI}-1=1-\frac{AN}{\text{AJ}}\Rightarrow\frac{AN}{AI}+\frac{AN}{\text{AJ}}=2\Rightarrow\frac{1}{AI}+\frac{1}{\text{AJ}}=\frac{2}{AN}$

c) Gọi DI cắt AP tại S. Kẻ $JR\perp AC$

có: $\frac{IS}{JP}=\frac{AI}{\text{AJ}}=\frac{IE}{JR}\Rightarrow IS=ID$

Do $IC\perp DE, PQ\perp DC\Rightarrow\Delta IDC\sim\Delta DPQ\,(g.g)$

$\Rightarrow\frac{DI}{DC}=\frac{PD}{PQ}\Rightarrow\frac{DS}{BP}=\frac{DP}{PK}\Rightarrow\Delta DSP\sim\Delta PBK\,(c.g.c)$

$\Rightarrow\widehat{DSP}=\widehat{PBK}\Rightarrow BK\perp AP$

Bài 5 (2.0 điểm).

a) Tìm tất cả các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn $3^x+2^y=1+2^z$.

b) Cho một hình chữ nhật có diện tích bằng 1. Năm điểm phân biệt được đặt tùy ý vào hình chữ nhật sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng (mỗi điểm trong năm điểm đó có thể đặt được đặt trên cạnh hoặc đặt nằm trong hình chữ nhật).

i) Chứng minh rằng mọi tam giác tạo bởi ba điểm trong năm điểm đã cho đều có diện tích không vượt quá $\frac{1}{2}$.

ii) Với mỗi cách đặt năm điểm vào hình chữ nhật như trên, gọi n là số tam giác có ba đỉnh là ba điểm nằm trong năm điểm đó và diện tích không vượt qua $\frac{1}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của n.

Lời giải.

a) Xét các trường hợp sau.

Trường hợp 1: y = 1. Trong trường hợp này, ta có

$$2^z-1=3^x$$

Suy ra $2^z\equiv1\pmod 3$. Nếu z là số lẻ, tức $z=2k+1$ với k tự nhiên, thì ta có $2^z=2^{2k+1}=2.4^k\equiv2\pmod 3$, mâu thuẫn. Do đó z là số chẵn, tức $z=2k$ với k nguyên dương. Khi đó ta có $3^x=2^{2k}-1=\left(2^k-1\right)\left(2^k+1\right)$.

Suy ra 2^k-1 và 2^k+1 đều là lũy thừa của 3. Mà hai số này không cùng chia hết cho 3 (do $\left(2^k+1\right)-\left(2^k-1\right)=2$ không chia hết cho 3) nên trong hai số phải có một số bằng 1. Lại có

$2^k - 1 < 2^k + 1$ nên $2^k - 1 = 1$, tức $k = 1$. Một cách tương tự, ta tính được $z = 2$ và $x = 1$. Thử lại, ta thấy thỏa mãn.

Trường hợp 2: $y \geq 2$.Vì $3^x > 1$ nên từ phương trình đã cho, ta có $2^z > 2^y$, tức $z > y$. Suy ra 2^y và 2^z cùng chia hết cho 4. Từ đó ta có $3^x \equiv 1 \pmod 4$. Nếu x là số lẻ, tức $x = 2l + 1$ với l tự nhiên, thì $3^x = 3^{2l+1} = 3.9^l \equiv 3 \pmod 4$, mâu thuẫn. Do đó x là số chẵn, tức $x = 2l$ với l nguyên dương.

+) Giả sử $y \geq 4$. Khi đó, ta có 2^y và 2^z cùng chia hết cho 16 nên $3^x \equiv 1 \pmod{16}$. Nếu l là số lẻ, tức $l = 2t + 1$ với t tự nhiên, thì $3^x = 3^{4t+2} = 9.81^t \equiv 9 \pmod{16}$, mâu thuẫn. Do đó l là số chẵn, tức $l = 2t$ với t nguyên dương. Suy ra $3^x = 3^{4t} = 81^t \equiv 1 \pmod 5$. Từ đó $2^z - 2^y$ chia hết cho 5, hay $2^{z-y} \equiv 1 \pmod 5$.

Nếu $z - y$ là số lẻ, tức $z - y = 2u + 1$ với u tự nhiên, thì $2^{z-y} = 2.4^u \equiv \pm 2 \pmod 5$ mâu thuẫn. Do đó $z - y$ là số chẵn, tức $z - y = 2u$ với u nguyên dương. Khi đó, ta có $2^z - 2^y = 2^y\left(4^u - 1\right)$ chia hết cho 3. Lại có 3^x chia hết cho 3 nên 1 chia hết cho 3, mâu thuẫn.

+) Như vậy, ta phải có $y \leq 3$. Nếu $y = 2$ thì ta có $3^x + 3 = 2^z$, suy ra 2^z chia hết cho 3, mâu thuẫn. Do đó $y = 3$. Khi đó ta có: $2^z - 3^{2l} = 7$

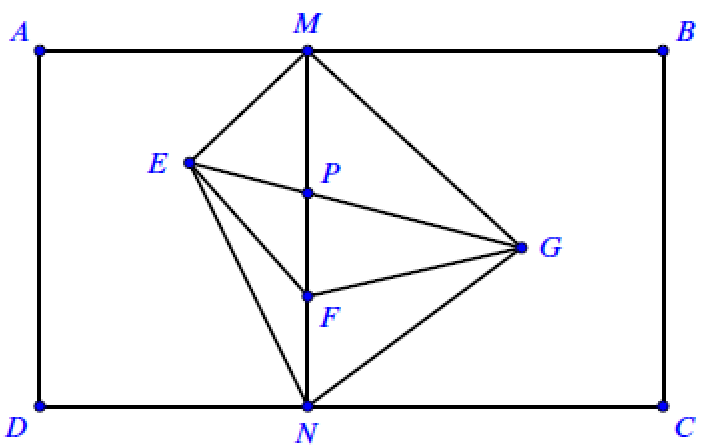
Từ đây, ta có $2^z \equiv 1 \pmod 3$. Chứng minh tưng tự **trường hợp 1**, suy ra z là số chẵn, tức $z = 2m$ với m nguyên dương. Khi đó ta có: $\left(2^m - 3^l\right)\left(2^m + 3^l\right) = 7$.

Vì $2^m - 3^l < 2^m + 3^l$ và $2^m + 3^l > 0$ nên $2^m + 3^l = 7$. Từ đó $m = 2$ và $l = 1$, hay ta có $z = 4$ và $x = 2$. Thử lại, ta thấy thỏa mãn.

Vậy có hai bộ số (x, y, z) thỏa mãn yêu cầu là (1, 1, 2) và (2, 3, 4).

b) i) Trước hết, ta chứng minh kết quả sau: Cho hình chữ nhật ABCD có diện tích S. Xét ba điểm E, F, G không thẳng hàng thuộc miền mặt phẳng giới hạn bởi hình chữ nhật ABCD.

Khi đó $S_{EFG} \leq \frac{1}{2}S$



Qua ba điểm E, F, G kẻ các đường thẳng vuông góc với đường thẳng AB. Trong các đường thẳng này, có một đường thẳng nằm giữa hoặc trùng với một trong hai đường thẳng kia.

Không mất tính tổng quát, giả sử đó là đường thẳng d qua điểm F. Khi đó, đường thẳng d sẽ cắt đoạn thẳng EG tại điểm P nào đó. Gọi M, N theo thứ tự là giao điểm của đường thẳng d và hai đường thẳng AB, CD. Khi đó, ta có

$$S_{EFG}=S_{EPF}+S_{GPF}\le S_{EMN}+S_{GMN}=\frac{1}{2}d\left(E,MN\right).MN+\frac{1}{2}d\left(G,MN\right).MN$$

$$\le\frac{1}{2}d\left(A,MN\right).MN+\frac{1}{2}d\left(B,MN\right).MN=\frac{1}{2}.AB.MN=\frac{1}{2}S,$$

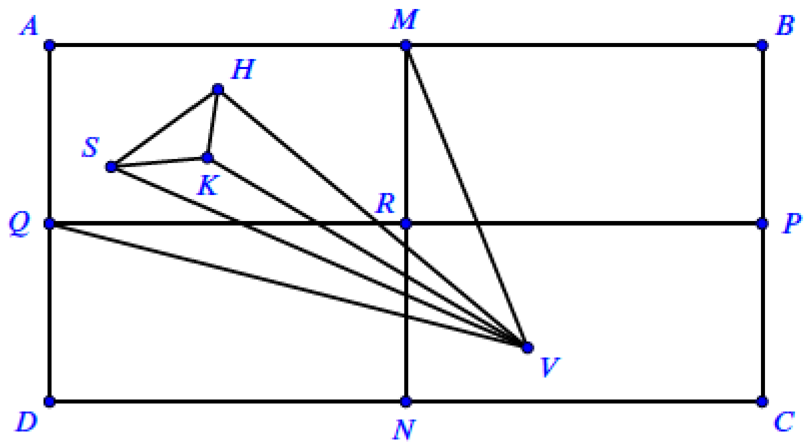
Trong đó d(X, ZT) được ký hiệu là khoảng cách từ điểm X đến đường thẳng ZT.

Từ kết quả vừa chứng minh trên, ta dễ dàng suy ra điều phải chứng minh.

ii) Trước hết, ta sẽ chứng minh $n\ge 2$. Thật vậy, giả sử $n\le 1$. Gọi hình chữ nhật đã cho là hình chữ nhật ABCD. Chia hình chữ nhật ABCD thành bốn hình chữ nhật nhỏ bằng nhau AMRQ, BMRP, CPRN, DQRN như hình vẽ bên dưới.

Xét hai hình chữ nhật AMND và BMNC. Ta thấy mỗi điểm trong năm điểm đã cho thuộc một trong hai miền mặt phẳng giới hạn bởi hai hình chữ nhật này. Do đó, có ba điểm thuộc cùng một hình chữ nhật. Không mất tính tổng quát, giả sử ba điểm đó là H, K, S và chúng cùng thuộc hình chữ nhật AMND.

Xét hai hình chữ nhật AMRQ và DQRN. Ta thấy mỗi điểm trong ba điểm H, K, S sẽ thuộc một trong hai miền mặt phẳng giới hạn bởi hai hình chữ nhật này. Do đó, có hai điểm thuộc cùng một hình chữ nhật. Không mất tính tổng quát, giả sử hai điểm đó là H, K và chúng cùng thuộc hình chữ nhật AMRQ.



Áp dụng kết quả đã chứng minh ở phần i) ta có $S_{HKS}\le\frac{1}{2}S_{AMND}=\frac{1}{4}$

Gọi hai điểm còn lại trong năm điểm là V và W. Nếu có một điểm nào đó trong hai điểm này thuộc đa giác ABPRND, chẳng hạn là V thì bằng cách sử dụng kết quả đã chứng minh ở phần i), ta cũng có $S_{HKV}\le\frac{1}{4}$. Suy ra $n\ge 2$, mâu thuẫn. Do đó, cả hai điểm V và W phải nằm trong hình chữ nhật CPRN.

Nếu S thuộc một trong hai hình chữ nhật DQRN và BMRP thì bằng cách sử dụng kết quả đã chứng minh ở phần i) ta có $S_{SVW} \le \dfrac{1}{4}$ mâu thuẫn. Do đó S nằm trong hình chữ nhật AMRQ.

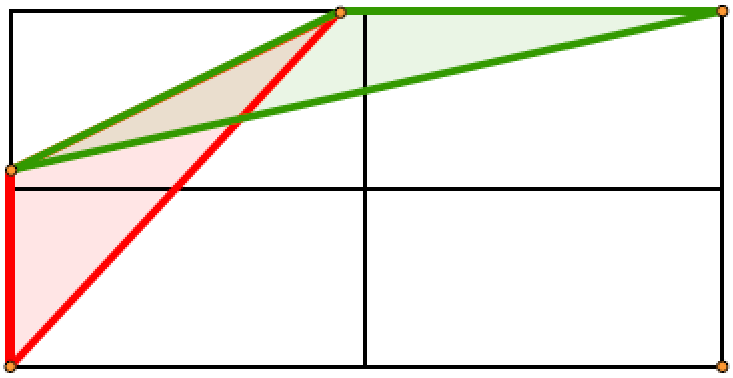
Gọi S_1 là diện tích của tứ giác (không nhất thiết lồi) tạo bởi H, K, S và V. Khi đó, rõ ràng

$$S_1 \le S_{VMAQ} = S_{\text{AMRQ}} + S_{VQR} + S_{VMR} \le \frac{1}{4} + S_{NQR} + S_{PMR} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}.$$

Mặt khác, trong ba tia VH, VK, VS luôn có một tia nằm giữa hai tia còn lại, chẳng hạn VK. Do đó: $S_1 = S_{VHK} + S_{VKS} \ge 2\min\{S_{VKH}, S_{VKS}\}$.

Kết hợp với kết quả trên, ta suy ra $2\min\{S_{VKH}, S_{VKS}\} \le \dfrac{1}{4}$. Từ đó, kết hợp với $S_{HKS} \le \dfrac{1}{4}$, ta có $n \ge 2$ mâu thuẫn. Vậy ta phải có $n \ge 2$.

Mặt khác, ta có n = 2 được thỏa mãn trong trường hợp sau:



Vậy giá trị nhỏ nhất của n là 2.

Bình luận: Bài 5a) là một sự tương tự hóa của bài số học trong đề chọn đội tuyển Việt Nam dự thi IMO 2019: *Tìm tất cả số nguyên dương x, y, z thỏa mãn* $7^x + 2^y = 1 + 2^z$.

Trường hợp đặc biệt của bài toán cũng đã được sử dụng làm đề chọn đội tuyển Đại học Vinh tham dự kì thi học sinh giỏi Quốc gia 2019: *Tìm tất cả các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn:* $1 + 2^x = 3^y + 2.4^z$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NGHỆ AN

ĐỀ CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH LỚP 9
NĂM HỌC 2020 - 2021
Môn thi: **TOÁN – BẢNG A**
Thời gian: **150 phút** *(không kể thời gian giao đề)*

Câu 1 (3,0 điểm).

a) Tìm tất cả các giá trị nguyên của a để $A=a^2+4a+2021$ là một số chính phương.

b) Cho đa thức $P(x)$ với các hệ số nguyên thỏa mãn $P(2019).P(2020)=2021.$

Chứng minh rằng đa thức $P(x)-2022$ không có nghiệm nguyên.

Câu 2 (6,5 điểm).

a) Giải phương trình $x^2-5x+2=2\sqrt{x-1}-\sqrt[3]{x+3}.$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2-y(x^2-x-1)=x^2-x \\ y(x^2+1)-x^3+x^2=2. \end{cases}$

Câu 3 (1,5 điểm). Cho ba số thực không âm a,b,c thỏa mãn $ab+bc+ca=1.$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{a^2+b^2+c^2+3}{a+b+c-abc}.$

Câu 4 (6,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC có D,E,F lần lượt là chân các đường cao kẻ từ ba đỉnh A,B,C của tam giác. Gọi H là trực tâm tam giác ABC và K là trung điểm của $HC.$

a) Chứng minh rằng 4 điểm E,K,D,F cùng thuộc một đường tròn.

b) Đường thẳng đi qua K song song với BC cắt DF tại $M.$ Trên tia DE lấy điểm P sao cho $\widehat{MAP}=\widehat{BAC}$. Chứng minh rằng $\dfrac{S_{AMF}}{S_{AMP}}=\dfrac{MF}{MP}$ *(Trong đó S_{AMF},S_{AMP} lần lượt là diện tích các tam giác AMF và AMP).*

Câu 5 (3,0 điểm).

a) Cho hình thoi $ABCD$ có $AB=a.$ Gọi R_1,R_2 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp của các tam giác ABC và $ABD.$ Chứng minh rằng $R_1+R_2\ge a\sqrt{2}.$

b) Cho đa giác đều có 2021 đỉnh, sao cho mỗi đỉnh của đa giác đó chỉ được tô bằng một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng tồn tại 3 đỉnh của đa giác đã cho là các đỉnh của một tam giác cân mà các đỉnh đó được tô cùng một màu.

…………….**Hết**……………

Họ và tên thí sinh……………………………………. *Số báo danh……………………….*

Chú ý: Thí sinh không được phép sử dụng máy tính bỏ túi.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NGHỆ AN

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH LỚP 9
NĂM HỌC 2020 – 2021

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI CHÍNH THỨC
Môn thi: TOÁN – Bảng A
(Hướng dẫn chấm này gồm có 05 trang)

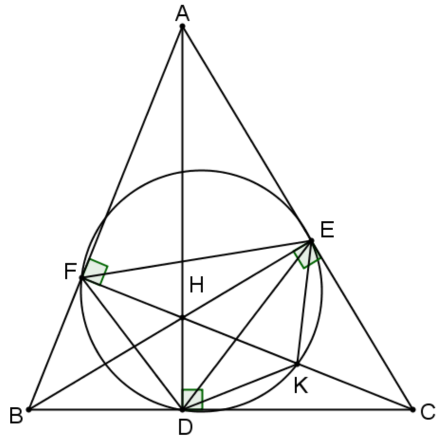
Câu	ĐÁP ÁN THAM KHẢO	Điểm
1.a (1,5đ)	***Tìm tất cả các giá trị nguyên của*** a ***để*** $A=a^2+4a+2021$ ***là một số chính phương.***	
	Ta có $a^2+4a+2021=y^2 \Leftrightarrow (a+2)^2+2017=y^2$	0,25
	$\Leftrightarrow 2017=y^2-(a+2)^2 \Leftrightarrow (y-a-2)(y+a+2)=2017$ Do 2017 là số nguyên tố nên ta có các trường hợp sau xảy ra	0,25
	+) TH1: $\begin{cases} y-a-2=2017 \\ y+a+2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-a=2019 \\ y+a=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1009 \\ a=-1010 \end{cases}$	0,25
	+) TH2: $\begin{cases} y-a-2=-2017 \\ y+a+2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-a=-2015 \\ y+a=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1009 \\ a=1006 \end{cases}$	0,25
	+) TH3: $\begin{cases} y-a-2=1 \\ y+a+2=2017 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-a=3 \\ y+a=2015 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1009 \\ a=1006 \end{cases}$	0,25
	+) TH4: $\begin{cases} y-a-2=-1 \\ y+a+2=-2017 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-a=1 \\ y+a=-2019 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1009 \\ a=-1010 \end{cases}$ Vậy có 2 giá trị nguyên của a thỏa mãn yêu cầu bài toán là $a=-1010$ và $a=1006$.	0,25
1.b (1,5đ)	***Cho đa thức*** $P(x)$ ***với các hệ số nguyên thỏa mãn*** $P(2019).P(2020)=2021$. ***Chứng minh rằng đa thức*** $P(x)-2022$ ***không có nghiệm nguyên.***	
	Giả sử đa thức $P(x)-2022$ có nghiệm nguyên $x=a,$ khi đó $P(x)-2022=(x-a).Q(x) \Leftrightarrow P(x)=2022+(x-a).Q(x)$. (Với $Q(x)$ là đa thức hệ số nguyên)	0,25
	Khi đó: • $P(2019)=2022+(2019-a).Q(2019)$	0,25
	• $P(2020)=2022+(2020-a).Q(2020)$	0,25
	Mà $P(2019).P(2020)=2021 \Rightarrow$ $[2022+(2019-a).Q(2019)][2022+(2020-a).Q(2020)]=2021$ $\Leftrightarrow 2022^2+2022[(2019-a).Q(2019)+(2020-a).Q(2020)]+$ $(2019-a)(2020-a)Q(2019).Q(2020) \ =2021 \quad (*)$	0,5

	Do $(2019-a)(2020-a)$ là hai số tự nhiên liên tiếp, suy ra vế trái của (*) là số chẵn. Vậy không tồn tại a để đẳng thức (*) xảy ra. Hay đa thức $P(x)-2022$ không có nghiệm nguyên.	0,25
2.a (3,0đ)	***Giải phương trình*** $x^2-5x+2=2\sqrt{x-1}-\sqrt[3]{x+3}.$	
	Điều kiện: $x\ge 1.$ Phương trình đã cho tương đương với $x^2-5x+2-2\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{x+3}=0$	0,5
	$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}\left(\sqrt{x-1}-2\right)+\left(\sqrt[3]{x+3}-2\right)+x^2-6x+5=0$	0,5
	$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}\dfrac{(x-5)}{\sqrt{x-1}+2}+\dfrac{x-5}{\sqrt[3]{(x+3)^2}+2\sqrt[3]{x+3}+4}+(x-1)(x-5)=0$	0,5
	$\Leftrightarrow (x-5)\left(\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}+2}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x+3)^2}+2\sqrt[3]{x+3}+4}+x-1\right)=0$	0,5
	$\Leftrightarrow x=5,$	0,5
	do $\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}+2}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x+3)^2}+2\sqrt[3]{x+3}+4}+x-1>0,\ \forall x\ge 1.$ Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $T=\{5\}.$	0,5
2.b (3,5đ)	***Giải hệ phương trình*** $\begin{cases} y^2-y\left(x^2-x-1\right)=x^2-x \\ y\left(x^2+1\right)-x^3+x^2=2 \end{cases}$	
	Ta có $y^2-y\left(x^2-x-1\right)=x^2-x\Leftrightarrow \left(y^2-1\right)-\left(x^2-x-1\right)(y+1)=0$	0,5
	$\Leftrightarrow (y+1)\left(y-x^2+x\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-1 \\ y=x^2-x \end{array}\right.$	0,75
	+) Với $y=-1,$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được $x^3=-3\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{-3}$. Khi đó hệ có nghiệm $\begin{cases} x=\sqrt[3]{-3} \\ y=-1 \end{cases}$	0,5
	+) Với $y=x^2-x,$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được $\left(x^2-x\right)\left(x^2+1\right)-x^3+x^2=2\Leftrightarrow x^4-2x^3+2x^2-x-2=0$	0,5
	$\Leftrightarrow \left(x^2-x\right)^2+\left(x^2-x\right)-2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x=1 \\ x^2-x=-2 \end{array}\right.$	0,5
	+) TH1: $x^2-x+2=0$ (vô nghiệm)	0,25

	+) TH2: $x^2-x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Khi đó hệ có các nghiệm $\begin{cases}x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\\y=1\end{cases}$; $\begin{cases}x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\\y=1\end{cases}$. Vậy hệ phương trình đã cho có các nghiệm $\begin{cases}x=\sqrt[3]{-3}\\y=-1\end{cases}$; $\begin{cases}x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\\y=1\end{cases}$; $\begin{cases}x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\\y=1\end{cases}$.	0,5
3 (1,5đ)	***Cho ba số thực không âm*** a,b,c ***thỏa mãn*** $ab+bc+ca=1$. ***Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*** $P=\frac{a^2+b^2+c^2+3}{a+b+c-abc}$.	
	Ta có +) $a^2+b^2+c^2+3=a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca)$ $=(a+b)(b+c)+(c+a)(a+b)+(b+c)(c+a)$	0,25
	+) $a+b+c-abc=(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$ $=(a+b)(b+c)(c+a)$ Khi đó suy ra $P=\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}$.	0,25
	Theo nguyên lí Dirichlet trong ba số thực a,b,c luôn tồn tại hai số ≥ 1 hoặc ≤ 1. Giả sử hai số đó là a và b. Khi đó: $(1-a)(1-b)\ge 0\Leftrightarrow a+b\le ab+1$	0,25
	Lại có $ab+bc+ca=1\Rightarrow 1-ab=c(a+b)\ge 0\Rightarrow ab\le 1$ Từ đó suy ra $0<a+b\le ab+1\le 2$	0,25
	Ta lại có: +) $\frac{1}{c+a}=\frac{a+b}{(c+a)(a+b)}=\frac{a+b}{a^2+1}=(a+b)-\frac{a^2(a+b)}{a^2+1}=(a+b)-\frac{a(a+b)}{a+\frac{1}{a}}\ge a+b-\frac{a(a+b)}{2}$. +) Hoàn toàn tương tự ta có: $\frac{1}{b+c}\ge a+b-\frac{b(a+b)}{2}$ Từ đó ta có $P=\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\ge\frac{1}{a+b}+2(a+b)-\frac{(a+b)^2}{2}$	0,25
	Đặt $a+b=x,\ 0<x\le 2$. Khi đó $P\ge\frac{1}{x}+2x-\frac{x^2}{2}=\frac{2+4x^2-x^3}{2x}$ $=\frac{(x-1)^2(2-x)+5x}{2x}=\frac{5}{2}+\frac{(x-1)^2(2-x)}{2x}\ge\frac{5}{2}$. Vậy $\min P=\frac{5}{2}$ đạt được khi và chỉ khi $a=1;b=1;c=0$ và các hoán vị.	0,25
4.a (3,0đ)	***Cho tam giác nhọn*** ABC ***có*** D,E,F ***lần lượt là chân các đường cao kẻ từ ba đỉnh*** A,B,C ***của tam giác. Gọi*** H ***là trực tâm tam giác*** ABC ***và*** K ***là trung điểm của*** HC.	

a) Chứng minh rằng 4 điểm E,K,D,F ***cùng thuộc một đường tròn.***

+) Do EK là trung tuyến của tam giác vuông $EHC \Rightarrow KE = KC \Rightarrow \widehat{KEC} = \widehat{ECK}$ — 0,75



$\Rightarrow \widehat{EKF} = \widehat{KCE} + \widehat{KEC} = 2\widehat{ECK}$ (1) — 0,5

+) Do tứ giác $HDCE$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ECK} = \widehat{EDH}$

+) Do tứ giác $FECB$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ECK} = \widehat{FBH}$

+) Do tứ giác $FBDH$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{FBH} = \widehat{FDH}$ — 0,75

Từ đó suy ra

$\widehat{FDE} = \widehat{FDH} + \widehat{EDH} = 2\widehat{HDE} = 2\widehat{ECK}$ (2) — 0,5

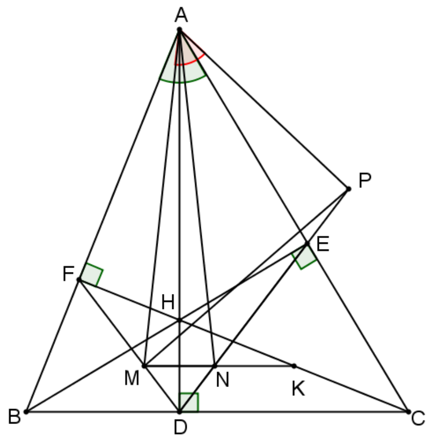
Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{EKF} = \widehat{FDE} \Rightarrow$ tứ giác $FDKE$ nội tiếp hay 4 điểm F, D, K, E cùng thuộc một đường tròn. — 0,5

4.b
(3,0đ)

Cho tam giác nhọn ABC ***có*** D,E,F ***lần lượt là chân các đường cao kẻ từ ba đỉnh*** A,B,C ***của tam giác. Gọi*** H ***là trực tâm tam giác*** ABC ***và*** K ***là trung điểm của*** HC.

b) Đường thẳng đi qua K ***song song với*** BC ***cắt*** DF ***tại*** M. ***Trên tia*** DE ***lấy điểm*** P ***sao cho*** $\widehat{MAP} = \widehat{BAC}$. ***Chứng minh rằng*** $\dfrac{S_{AMF}}{S_{AMP}} = \dfrac{MF}{MP}$ ***(Trong đó*** S_{AMF}, S_{AMP} ***lần lượt là diện tích các tam giác*** AMF ***và*** AMP***).***

Gọi N là giao điểm của MK và DE. — 0,25



+) Do $MN//BC \Rightarrow \widehat{BDN} = \widehat{MNE}$ (4) — 0,25

+) Do $ABDE$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BDE} + \widehat{BAE} = 180^0$ (5) — 0,25

+) Theo bài ra $\widehat{BAC} = \widehat{MAP}$ nên từ (4), (5)

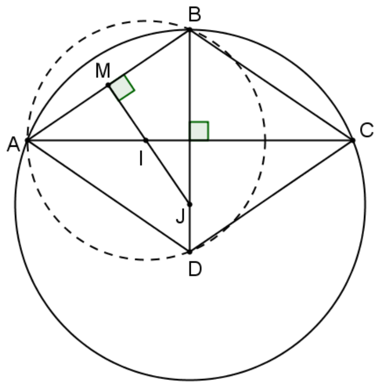
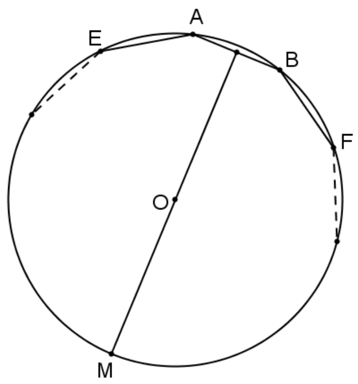
suy ra $\widehat{MNP} + \widehat{MAP} = 180^0$

$\Rightarrow MNPA$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AMP} = \widehat{ANP}$ (6) — 0,5

+) Lại có $\Delta AMD = \Delta AND (c.g.c) \Rightarrow \widehat{AMD} = \widehat{AND} \Rightarrow 180^0 -$ (7) — 0,5

Từ (6) và (7) suy ra $\widehat{AMP} = \widehat{AMF} = \varphi$. — 0,25

Gọi h_1, h_2 lần lượt là độ dài đường cao kẻ từ đỉnh F và P của các tam giác AMF và AMP. — 0,75

	Ta có : $S_{AMF}=\frac{1}{2}h_1.MA=\frac{1}{2}(MF.\sin\varphi).MA$; tương tự $S_{AMP}=\frac{1}{2}MA.MP.\sin\varphi$.	
	Từ đó suy ra $\frac{S_{AMF}}{S_{AMP}}=\frac{MF}{MP}$.	0,25
5.a (1,5đ)	***Cho hình thoi*** $ABCD$ ***có*** $AB=a$. ***Gọi*** R_1,R_2 ***lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác*** ABC ***và*** ABD. ***Chứng minh rằng*** $R_1+R_2\ge a\sqrt{2}$.	
	Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Đường trung trực của đoạn AB cắt các đường AC và BD lần lượt tại I và J. Khi đó I và J lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp của các tam giác ABD và ABC. 	0,25
	Dễ thấy ΔMAI" $\Delta MJB(g.g)\Rightarrow\frac{MA}{AI}=\frac{MJ}{JB}\Rightarrow\frac{MA}{R_2}=\frac{MJ}{R_1}$	0,25
	$\Rightarrow\frac{MA^2}{R_2^2}=\frac{MJ^2}{R_1^2}\Rightarrow\frac{MA^2}{R_2^2}=\frac{JB^2-MB^2}{R_1^2}$	0,25
	$\Rightarrow\frac{MA^2}{R_2^2}=\frac{R_1^2-MB^2}{R_1^2}\Rightarrow\frac{MA^2}{R_2^2}+\frac{MB^2}{R_1^2}=1\Rightarrow\frac{a^2}{4R_1^2}+\frac{a^2}{4R_2^2}=1$	0,25
	Khi đó $1=\frac{a^2}{4R_1^2}+\frac{a^2}{4R_2^2}\ge 2\sqrt{\frac{a^2}{4R_1^2}.\frac{a^2}{4R_2^2}}=\frac{a^2}{2R_1R_2}\Rightarrow R_1R_2\ge\frac{a^2}{2}$.	0,25
	Do đó $R_1+R_2\ge 2\sqrt{R_1R_2}\ge 2\sqrt{\frac{a^2}{2}}=a\sqrt{2}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow R_1=R_2$ hay tứ giác $ABCD$ là hình vuông.	0,25
5.b (1,5đ)	***Cho đa giác đều có*** 2021 ***đỉnh sao cho mỗi đỉnh của đa giác đó chỉ được tô bằng một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng tồn tại 3 đỉnh của đa giác đã cho là các đỉnh của một tam giác cân mà các đỉnh đó được tô cùng một màu.***	
	Do đa giác đã cho là đa giác đều nên đa giác đó nội tiếp đường tròn tâm O. Do 2021 là số lẻ nên tồn tại 2 đỉnh kề nhau tô cùng màu. Giả sử hai đỉnh đó là A và B và cùng được tô màu đỏ. 	0,25
	Cũng do đa giác đã cho đều và có số đỉnh lẻ nên tồn tại đỉnh M của đa giác nằm trên trung trực đoạn $AB\Rightarrow\Delta MAB$ cân.	0,25
	Ta xét hai khả năng xảy ra: +) Khả năng 1: Nếu M tô màu đỏ $\Rightarrow$ đpcm. +) Khả năng 2: Nếu M tô màu xanh.	0,25
	Gọi E,F là các đỉnh kề của A và B có: $EA=AB=BF\Rightarrow EF//AB\Rightarrow\Delta MEF$ cân tại M. Khi đó:	0,25

	- Nếu E, F màu xanh $\Rightarrow \Delta MEF$ cân và thỏa mãn bài toán.	0,25
	- Nếu một trong hai đỉnh E, F màu đỏ, giả sử E màu đỏ $\Rightarrow \Delta EAB$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Vậy luôn tồn tại 3 đỉnh của đa giác đều đã cho lập nên một tam giác cân có các đỉnh cùng màu.	0,25

……………**Hết**……………

Ghi chú: *Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn cho điểm tối đa.*

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO NGHỆ AN **ĐỀ CHÍNH THỨC**	KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH LỚP 9 **NĂM HỌC 2020 - 2021** Môn thi: **TOÁN – BẢNG B** Thời gian: **150 phút** *(không kể thời gian giao đề)*

Câu 1 (3,0 điểm).

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $x^2-y^2=6x+8$.

b) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n\in\mathbb{N}^*$ thì n^3+5n chia hết cho 6.

Câu 2 (6,5 điểm).

a) Giải phương trình $x-6=\sqrt{6-x}-\sqrt{x-1}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3+5x=y^3+5y\\ x^4+y^2=2.\end{cases}$

Câu 3 (1,5 điểm). Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2+z=3xy$. Chứng minh rằng $\dfrac{x}{y+z}+\dfrac{y}{x+z}+\dfrac{x^3+y^3}{16z}\ge\dfrac{7}{8}$.

Câu 4 (6,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC có D,E,F lần lượt là chân các đường cao kẻ từ ba đỉnh A,B,C của tam giác. Gọi H là trực tâm tam giác ABC và K là trung điểm của HC.

a) Chứng minh rằng 4 điểm E,K,D,F cùng thuộc một đường tròn.

b) Đường thẳng đi qua K song song với BC cắt DF tại M. Trên tia DE lấy điểm P sao cho $\widehat{MAP}=\widehat{BAC}$. Chứng minh rằng MA là phân giác $\widehat{FMP}$.

Câu 5 (3,0 điểm).

a) Cho hình thoi $ABCD$ có $AB=a$. Gọi R_1,R_2 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp của các tam giác ABC và ABD. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{R_1^2}+\dfrac{1}{R_2^2}=\dfrac{4}{a^2}$.

b) Cho đa giác đều có 2021 đỉnh, sao cho mỗi đỉnh của đa giác đó chỉ được tô bằng một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng tồn tại 3 đỉnh của đa giác đã cho là các đỉnh của một tam giác cân mà các đỉnh đó được tô cùng một màu.

……………**Hết**……………

Họ và tên thí sinh…………………………………… *Số báo danh……………………*

Chú ý: Thí sinh không được phép sử dụng máy tính bỏ túi.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NGHỆ AN

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH LỚP 9
NĂM HỌC 2020 – 2021

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI CHÍNH THỨC
Môn thi: TOÁN – Bảng B
(Hướng dẫn chấm này gồm có 04 trang)

Câu	ĐÁP ÁN THAM KHẢO	Điểm
1.a (1,5đ)	***Tìm tất cả các cặp số nguyên*** $(x;y)$ ***thỏa mãn*** $x^2-y^2=6x+8$.	
	Ta có $x^2-y^2=6x+8 \Leftrightarrow \left(x^2-6x+9\right)-y^2=17$	0,25
	$\Leftrightarrow (x-3)^2-y^2=17 \Leftrightarrow (x-3-y)(x-3+y)=17$	0,25
	Do 17 là số nguyên tố nên ta có các trường hợp sau: +) TH1: $\begin{cases} x-3-y=17 \\ x-3+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=20 \\ x+y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=12 \\ y=-8 \end{cases}$	0,25
	+) TH2: $\begin{cases} x-3-y=-17 \\ x-3+y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=-14 \\ x+y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-6 \\ y=8 \end{cases}$	0,25
	+) TH3: $\begin{cases} x-3-y=1 \\ x-3+y=17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=4 \\ x+y=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=12 \\ y=8 \end{cases}$	0,25
	+) TH3: $\begin{cases} x-3-y=-1 \\ x-3+y=-17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=2 \\ x+y=-14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-6 \\ y=-8 \end{cases}$ Vậy các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\{(12;-8),(-6;8),(12;8),(-6;-8)\}$.	0,25
1.b (1,5đ)	***Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên*** $n\in\mathbb{N}^*$ ***thì*** n^3+5n ***chia hết cho*** 6.	
	Ta có $n^3+5n=\left(n^3-n\right)+6n$	0,25
	$=n(n-1)(n+1)+6n$	0,5
	Do $n(n-1)(n+1)$ là tích của ba số tự nhiên liên tiếp $\Rightarrow n(n-1)(n+1)\,\vdots\,6$	0,5
	Lại do $6n\,\vdots\,6$, từ đó suy ra $n(n-1)(n+1)+6n\ \vdots\ 6 \Rightarrow n^3+5n\,\vdots\,6$	0,25

2.a (3,0đ)	***Giải phương trình*** $x-6=\sqrt{6-x}-\sqrt{x-1}.$	
	Điều kiện $1\le x\le 6$	0,5
	Phương trình đã cho tương đương với $x-6+\sqrt{x-1}-\sqrt{6-x}=0$	0,5
	$\Leftrightarrow (x-5)+\left(\sqrt{x-1}-2\right)+\left(1-\sqrt{6-x}\right)=0$	0,5
	$\Leftrightarrow (x-5)+\dfrac{x-5}{\sqrt{x-1}+2}+\dfrac{x-5}{1+\sqrt{6-x}}=0$	0,5
	$\Leftrightarrow (x-5)\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+2}+\dfrac{1}{1+\sqrt{6-x}}\right)=0\Leftrightarrow x=5,$	0,5
	Do $1+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+2}+\dfrac{1}{1+\sqrt{6-x}}>0,\forall x\in[1;6]$ Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=5.$	0,5
2.b (3,5đ)	***Giải hệ phương trình*** $\begin{cases}x^3+5x=y^3+5y\\x^4+y^2=2.\end{cases}$	
	Ta có $x^3+5x=y^3+5y\Leftrightarrow\left(x^3-y^3\right)+5(x-y)=0$	0,5
	$\Leftrightarrow (x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)+5(x-y)=0\Leftrightarrow (x-y)\left(x^2+xy+y^2+5\right)=0$	0,5
	$\Leftrightarrow x=y,$ do $x^2+xy+y^2+5>0,\forall x,y\in\mathbb{R}.$	1,0
	Với $x=y,$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được $x^4+x^2-2=0$ $\Leftrightarrow\left(x^2-1\right)\left(x^2+2\right)=0$	0,5
	$\Leftrightarrow x^2=1,$ do $x^2+2>0,\forall x\in\mathbb{R}$	0,5
	$\Leftrightarrow x=\pm1.$ Vậy hệ phương trình đã cho có các nghiệm $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases};\begin{cases}x=-1\\y=-1.\end{cases}$	0,5
3 (1,5đ)	***Cho các số thực dương*** x,y,z ***thỏa mãn điều kiện*** $x^2+y^2+z=3xy$***. Chứng minh rằng*** $\dfrac{x}{y+z}+\dfrac{y}{x+z}+\dfrac{x^3+y^3}{16z}\ge\dfrac{7}{8}.$	
	Ta có $3xy=x^2+y^2+z\ge 2xy+z\Rightarrow xy\ge z$ Suy ra :	0,25
	+) $\dfrac{x^3+y^3}{16z}=\dfrac{(x+y)\left(x^2+y^2-xy\right)}{16z}\ge\dfrac{(x+y)xy}{16z}\ge\dfrac{x+y}{16}\quad(1)$	0,25

+) $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}=\frac{x^2}{xy+xz}+\frac{y^2}{xy+yz}\geq\frac{(x+y)^2}{2xy+z(x+y)}\geq\frac{(x+y)^2}{xy(2+x+y)}\geq\frac{4}{2+x+y}$ (2) — 0,5

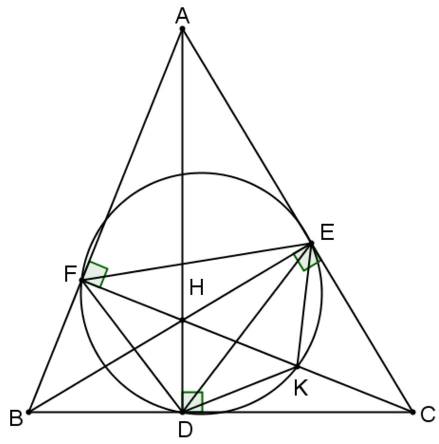
Từ (1) và (2) cho ta $P\geq\frac{4}{(x+y)+2}+\frac{x+y}{16}\Rightarrow P\geq\frac{4}{x+y+2}+\frac{x+y+2}{16}-\frac{1}{8}$

$\geq 2\sqrt{\frac{4}{x+y+2}\cdot\frac{x+y+2}{16}}-\frac{1}{8}=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$. Vậy $\min P=\frac{7}{8}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y=3\\z=9\end{cases}$ — 0,5

4.a (3,0đ)

Cho tam giác nhọn ABC ***có*** D,E,F ***lần lượt là chân các đường cao kẻ từ ba đỉnh*** A,B,C ***của tam giác. Gọi*** H ***là trực tâm tam giác*** ABC ***và*** K ***là trung điểm của*** HC.

a) Chứng minh rằng 4 điểm E,K,D,F ***cùng thuộc một đường tròn.***



+) Do EK là trung tuyến của tam giác vuông $EHC\Rightarrow KE=KC\Rightarrow\widehat{KEC}=\widehat{ECK}$ — 0,5

$\Rightarrow\widehat{EKF}=\widehat{KCE}+\widehat{KEC}=2\widehat{ECK}$ (1) — 0,5

+) Do tứ giác $HDCE$ nội tiếp $\Rightarrow\widehat{ECK}=\widehat{EDH}$

+) Do tứ giác $FECB$ nội tiếp $\Rightarrow\widehat{ECK}=\widehat{FBH}$

+) Do tứ giác $FBDH$ nội tiếp $\Rightarrow\widehat{FBH}=\widehat{FDH}$ — 1,0

Từ đó suy ra

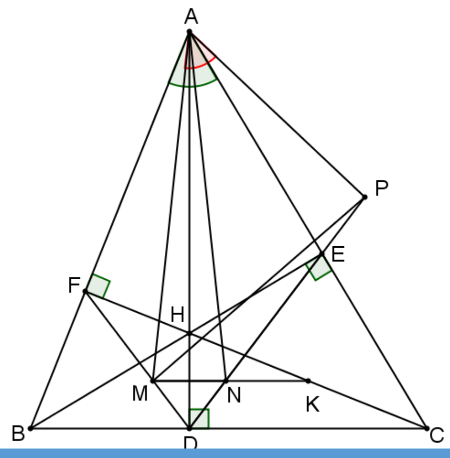
$\widehat{FDE}=\widehat{FDH}+\widehat{EDH}=2\widehat{HDE}=2\widehat{ECK}$ (2) — 0,5

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{EKF}=\widehat{FDE}\Rightarrow$ tứ giác $FDKE$ nội tiếp hay 4 điểm F,D,K,E cùng thuộc một đường tròn. — 0,5

4.b (3,0đ)

Cho tam giác nhọn ABC ***có*** D,E,F ***lần lượt là chân các đường cao kẻ từ ba đỉnh*** A,B,C ***của tam giác. Gọi*** H ***là trực tâm tam giác*** ABC ***và*** K ***là trung điểm của*** HC.

b) Đường thẳng đi qua K ***song song với*** BC ***cắt*** DF ***tại*** M. ***Trên tia*** DE ***lấy điểm*** P ***sao cho*** $\widehat{MAP}=\widehat{BAC}$. ***Chứng minh rằng*** MA ***là phân giác*** $\widehat{FMP}$.



Gọi N là giao điểm của MK và DE. — 0,5

+) Do $MN//BC\Rightarrow\widehat{BDN}=\widehat{MNE}$ (4)

+) Do $ABDE$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow\widehat{BDE}+\widehat{BAE}=180^0$ (5) — 0,5

+) Theo bài ra $\widehat{BAC}=\widehat{MAP}$ nên từ (4), (5)

suy ra $\widehat{MNP}+\widehat{MAP}=180^0$

$\Rightarrow MNPA$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow\widehat{AMP}=\widehat{ANP}$ (6) — 0,5

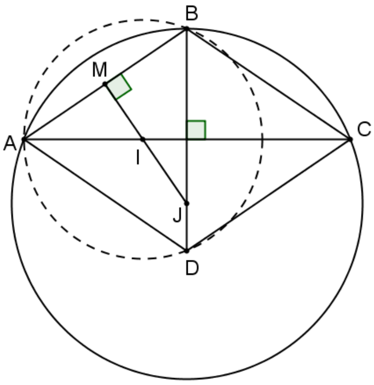
+) Lại có $\Delta AMD=\Delta AND(c.g.c)\Rightarrow\widehat{AMD}=\widehat{AND}$ — 0,5

$\Rightarrow 180^0 - \widehat{AMD} = 180^0 - \widehat{AND} \Rightarrow \widehat{AMF} = \widehat{ANP}$ (7) — 0,5

Từ (6) và (7) suy ra $\widehat{AMP} = \widehat{AMF} \Rightarrow MA$ là phân giác $\widehat{FMP}$. — 0,5

5.a (1,5đ)

Cho hình thoi $ABCD$ ***có*** $AB = a$. ***Gọi*** R_1, R_2 ***lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp của các tam giác*** ABC ***và*** ABD. ***Chứng minh rằng*** $\dfrac{1}{R_1^2} + \dfrac{1}{R_2^2} = \dfrac{4}{a^2}$.



Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Đường trung trực của đoạn AB cắt các đường AC và BD lần lượt tại I và J. Khi đó I và J lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp của các tam giác ABD và ABC. — 0,25

Dễ thấy ΔMAI” $\Delta MJB\,(g.g) \Rightarrow \dfrac{MA}{AI} = \dfrac{MJ}{JB}$ — 0,25

$\Rightarrow \dfrac{MA}{R_2} = \dfrac{MJ}{R_1} \Rightarrow \dfrac{MA^2}{R_2^2} = \dfrac{MJ^2}{R_1^2}$ — 0,25

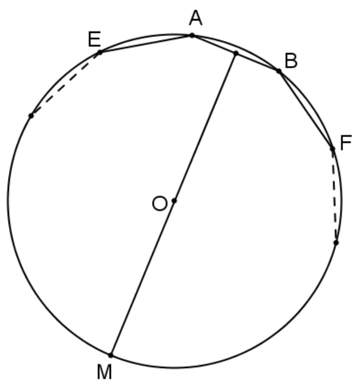
$\Rightarrow \dfrac{MA^2}{R_2^2} = \dfrac{JB^2 - MB^2}{R_1^2}$ — 0,25

$\Rightarrow \dfrac{MA^2}{R_2^2} = \dfrac{R_1^2 - MB^2}{R_1^2} \Rightarrow \dfrac{MA^2}{R_2^2} + \dfrac{MB^2}{R_1^2} = 1$ — 0,25

$\Rightarrow \dfrac{a^2}{4R_1^2} + \dfrac{a^2}{4R_2^2} = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{R_1^2} + \dfrac{1}{R_2^2} = \dfrac{4}{a^2}$. — 0,25

5.b (1,5đ)

Cho đa giác đều có 2021 ***đỉnh sao cho mỗi đỉnh của đa giác đó chỉ được tô bằng một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng tồn tại 3 đỉnh của đa giác đã cho là các đỉnh của một tam giác cân mà các đỉnh đó được tô cùng một màu.***



Do đa giác đã cho là đa giác đều nên đa giác đó nội tiếp đường tròn tâm O.

Do 2021 là số lẻ nên tồn tại 2 đỉnh kề nhau tô cùng màu. Giả sử hai đỉnh đó là A và B và cùng được tô màu đỏ. — 0,25

Cũng do đa giác đã cho đều và có số đỉnh lẻ nên tồn tại đỉnh M của đa giác nằm trên trung trực đoạn $AB \Rightarrow \Delta MAB$ cân. — 0,25

Ta xét hai khả năng xảy ra:

+) Khả năng 1: Nếu M tô màu đỏ $\Rightarrow$ đpcm.

+) Khả năng 2: Nếu M tô màu xanh. — 0,25

Gọi E, F là các đỉnh kề của A và B có: $EA = AB = BF \Rightarrow EF // AB \Rightarrow \Delta MEF$ cân tại M. Khi đó: — 0,25

- Nếu E, F màu xanh $\Rightarrow \Delta MEF$ cân và thỏa mãn bài toán. — 0,25

	- Nếu một trong hai đỉnh E,F màu đỏ, giả sử E màu đỏ $\Rightarrow \Delta EAB$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Vậy luôn tồn tại 3 đỉnh của đa giác đều đã cho lập nên một tam giác cân có các đỉnh cùng màu.	0,25

……………**Hết**……………

Ghi chú: *Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn cho điểm tối đa.*

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NAM

ĐỀ CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH LỚP 9
NĂM HỌC 2020 - 2021
Môn thi: **TOÁN**
Thời gian: **150 phút** *(không kể thời gian giao đề)*

Câu 1 (3,0 điểm).

Cho biểu thức $Q=\left(\dfrac{x-2\sqrt{x}}{x-4}-\dfrac{x-x\sqrt{x}-6}{x+\sqrt{x}-2}+\dfrac{\sqrt{x}+1}{1-\sqrt{x}}\right).\dfrac{x+39}{x+3\sqrt{x}-10}$ (với $x\ge 0; x\ne 1; x\ne 4$).

a) Rút gọn Q.

b) Tìm x để Q đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 2 (2,0 điểm).

Trong mặt phẳng Oxy, cho parabol $(P): y=\dfrac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $(d): y=mx+2$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A,B sao cho diện tích tam giác OAB bằng 5 (đơn vị diện tích).

Câu 3 (4,0 điểm).

a) Giải phương trình $2x^2+5x+11=(x+7)\sqrt{2x^2+1}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+y}\left(\sqrt{y}+1\right)=\sqrt{x^2+y^2}+2 & (1)\\ x\sqrt{y-1}+y\sqrt{x-1}=\dfrac{x^2+4y-4}{2} & (2)\end{cases}$.

Câu 4 (2,0 điểm).

Tìm các số nguyên dương a,b,c thỏa mãn $\dfrac{a-b\sqrt{2021}}{b-c\sqrt{2021}}$ là số hữu tỷ và $a^2+b^2+c^2$ là số nguyên tố.

Câu 5 (7,0 điểm).

1. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD,BE,CF của tam giác ABC cắt nhau tại H, EF cắt (O) tại P và Q (P thuộc cung nhỏ AB).

a) Chứng minh tam giác APQ cân.

b) Chứng minh $DH.DA=DE.DF$.

c) Chứng minh $MN//BC$.

2. Cho đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC, (I) tiếp xúc với ba cạnh BC,CA,AB lần lượt tại các điểm D,E,F. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh các đường thẳng AM,EF,DI đồng quy.

Câu 6 (2,0 điểm). Cho a,b,c là ba số thực dương, tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{ab+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{bc+c^2}}+\frac{c}{\sqrt{ca+a^2}}\ge\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

……………**Hết**……………

Họ và tên thí sinh…………………………………… *Số báo danh……………………*

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO **HÀ NAM**	KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THCS NĂM HỌC 2020 – 2021 Môn: TOÁN – Lớp 9

HƯỚNG DẪN CHẤM – ĐỀ CHÍNH THỨC

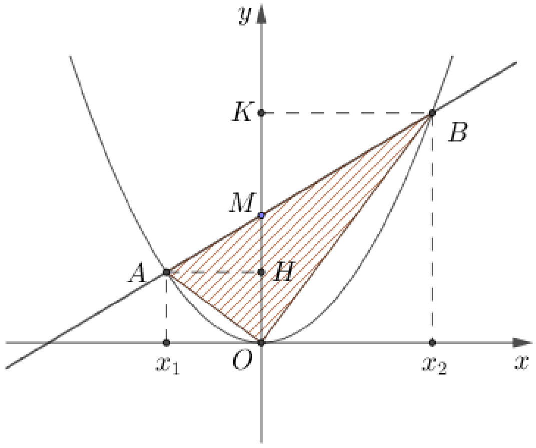
(*Hướng dẫn chấm gồm 07 trang*)

I. HƯỚNG DẪN CHUNG

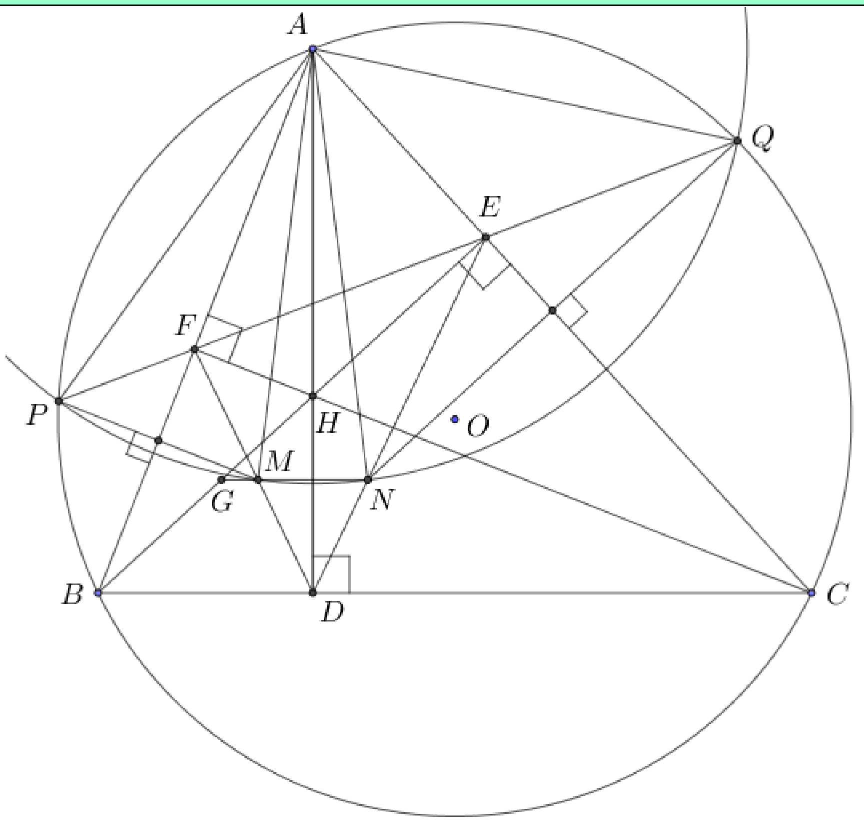
- *Hướng dẫn chấm chỉ trình bày sơ lược các bước giải, lời giải của học sinh cần lập luận chặt chẽ, hợp logic. Nếu học sinh trình bày cách làm khác mà đúng thì vẫn được điểm theo thang điểm tương ứng.*
- *Đối với bài toán hình học nếu học sinh chứng minh có sử dụng đến hình vẽ thì yêu cầu phải vẽ hình, nếu học sinh vẽ hình sai hoặc không vẽ hình thì không cho điểm phần tương ứng.*
- *Điểm toàn bài không làm tròn.*

II. ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM

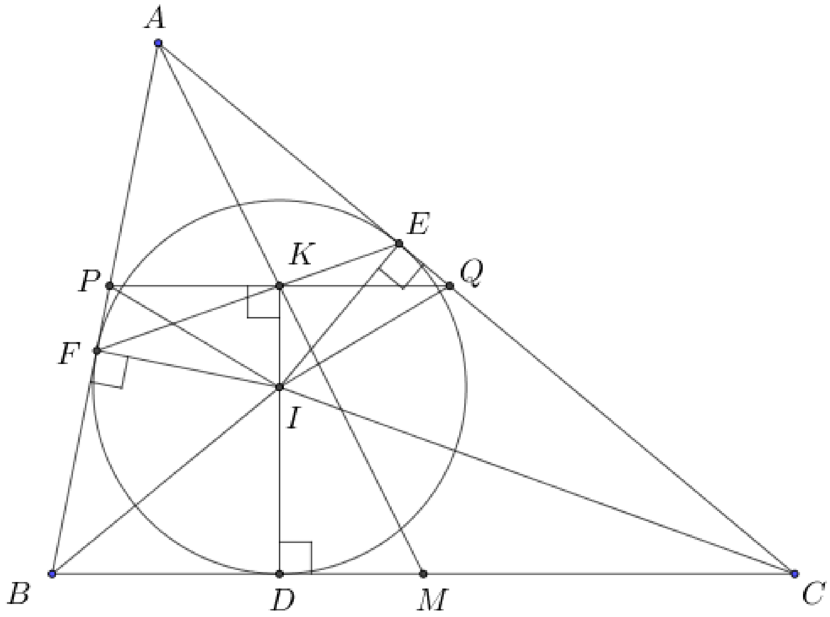
Câu	Sơ lược lời giải	Điểm
1. (3,0 điểm)	Cho biểu thức $Q=\left(\dfrac{x-2\sqrt{x}}{x-4}-\dfrac{x-x\sqrt{x}-6}{x+\sqrt{x}-2}+\dfrac{\sqrt{x}+1}{1-\sqrt{x}}\right).\dfrac{x+39}{x+3\sqrt{x}-10}$ (với $x\ge 0; x\ne 1; x\ne 4$). a) Rút gọn Q.	**2,0**
	Ta có $Q=\left[\dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}-\dfrac{x-x\sqrt{x}-6}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right].\dfrac{x+39}{x+3\sqrt{x}-10}$ $=\left[\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}-\dfrac{x-x\sqrt{x}-6}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right].\dfrac{x+39}{x^2+3\sqrt{x}-10}$	0,5
	$=\dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)-\left(x-x\sqrt{x}-6\right)-\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}.\dfrac{x+39}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+5\right)}$	0,5
	$=\dfrac{x\sqrt{x}-4\sqrt{x}-x+4}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}.\dfrac{x+39}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+5\right)}$	0,5
	$=\dfrac{(x-4)\left(\sqrt{x}-1\right)}{(x-4)\left(\sqrt{x}-1\right)}.\dfrac{x+39}{\sqrt{x}+5}=\dfrac{x+39}{\sqrt{x}+5}$	0,5
	b) Tìm x để Q đạt giá trị nhỏ nhất.	**1,0**
	Ta có $Q=\dfrac{x+39}{\sqrt{x}+5}=\dfrac{(x-25)+64}{\sqrt{x}+5}$ $\Leftrightarrow Q=\sqrt{x}-5+\dfrac{64}{\sqrt{x}+5}$	0,25
	$\Leftrightarrow Q=\sqrt{x}+5+\dfrac{64}{\sqrt{x}+5}-10\ge 6$	0,25

	Dấu "=" xảy ra khi $\sqrt{x}+5=\dfrac{64}{\sqrt{x}+5}\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}+5\right)^2=64\Leftrightarrow x=9$	0,25
	Vậy $x=9$ thì Q đạt giá trị nhỏ nhất bằng 6.	0,25
2. (2,0 điểm)	Trong mặt phẳng Oxy, cho parabol $(P): y=\dfrac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $(d): y=mx+2$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A,B sao cho diện tích tam giác OAB bằng 5 (đơn vị diện tích).	**2,0**
	 Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P): $\dfrac{1}{2}x^2=mx+2\,(1)$ $\Leftrightarrow x^2-2mx-4=0$ Ta có $a.c=-4<0$ nên (1) luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1<0<x_2$ với mọi $m\in\mathbb{R}$. Suy ra (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1;y_1),B(x_2;y_2)$ nằm về hai phía trục tung.	0,5
	Theo Vi – et, ta có $\begin{cases}x_1+x_2=2m\\x_1x_2=-4\end{cases}$ Vì đường thẳng d luôn đi qua điểm $M(0;2)\in Oy$ nên M nằm trong đoạn AB.	0,5
	$\Rightarrow S_{OAB}=S_{OAM}+S_{OBM}=\dfrac{1}{2}AH.OM+\dfrac{1}{2}BK.OM$ (với H,K là hình chiếu vuông góc của A,B lên Oy). Ta có $OM=2, AH=\lvert x_1\rvert=-x_1, BK=\lvert x_2\rvert=x_2$ nên $S_{\Delta OAB}=x_2-x_1=5$ $\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-4x_1x_2=25$	0,5
	$\Leftrightarrow 4m^2+16=25\Leftrightarrow m=\pm\dfrac{3}{2}$ (thỏa mãn). Vậy $m=\pm\dfrac{3}{2}$.	0,5
3. (4,0 điểm)	a) Giải phương trình $2x^2+5x+11=(x+7)\sqrt{2x^2+1}$.	**2,0**
	Điều kiện có nghiệm: $x>-7$.	0,5

	Đặt $t=\sqrt{2x^2+1},(t\ge 1)\Rightarrow 2x^2+1=t^2$ Phương trình đã cho trở thành $t^2-(x+7)t+5(x+2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=5\\ t=x+2\end{array}\right.$	
	+) $t=5\Leftrightarrow\sqrt{2x^2+1}=5\Leftrightarrow x^2=12\Leftrightarrow x=\pm 2\sqrt{3}$ (thỏa mãn).	0,5
	+) $t=x+2\Leftrightarrow\sqrt{2x^2+1}=x+2\Leftrightarrow\begin{cases}x+2\ge 1\\ 2x^2+1=(x+2)^2\end{cases}$	0,5
	$\Leftrightarrow\begin{cases}x>-1\\ x^2-4x-3=0\end{cases}\Rightarrow x=2\pm\sqrt{7}$ (thỏa mãn). Vậy phương trình có 4 nghiệm: $x=\pm 2\sqrt{3}; x=2\pm\sqrt{7}$.	0,5
	b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+y}\left(\sqrt{y}+1\right)=\sqrt{x^2+y^2}+2 & (1)\\ x\sqrt{y-1}+y\sqrt{x-1}=\dfrac{x^2+4y-4}{2} & (2)\end{cases}$.	**2,0**
	Điều kiện xác định: $x\ge 1; y\ge 1$. $(2)\Leftrightarrow x\sqrt{4y-4}+y\sqrt{4x-4}=x^2+4y-4$ $\Leftrightarrow x^2+4y-4\le\dfrac{x^2+4y-4+y^2+4x-4}{2}\Leftrightarrow x^2-y^2-4x+4y\le 0$ $\Leftrightarrow(x-y)(x+y-4)\le 0\ (3)$. Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}x^2=4y-4\\ y^2=4x-4\end{cases}(*)$.	0,5
	$(1)\Leftrightarrow\sqrt{xy+y^2}+\sqrt{x+y}=\sqrt{x^2+y^2}+2$ $\Leftrightarrow\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{y^2+xy}=\sqrt{x+y}-2$ $\Leftrightarrow\dfrac{x^2-xy}{\sqrt{y^2+xy}+\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{x+y-4}{\sqrt{x+y}+2}\Leftrightarrow\dfrac{x(x-y)}{\sqrt{y^2+xy}+\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{x+y-4}{\sqrt{x+y}+2}$ Suy ra $(x-y)(x+y-4)\ge 0\ (4)$.	0,5
	Từ (3) và $(4)\Rightarrow(x-y)(x+y-4)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y\\ x+y-4=0\end{array}\right.$ +) Với $x=y$ thay vào (2), ta được $2x\sqrt{x-1}=\dfrac{x^2+4x-4}{2}$ $\Leftrightarrow x^2-4x\sqrt{x-1}+4(x-1)=0$ $\Leftrightarrow\left(x-2\sqrt{x-1}\right)^2=0\Leftrightarrow x-2\sqrt{x-1}=0\Leftrightarrow x=2$ (thỏa mãn).	0,5
	+) Với $x+y-4=0\Leftrightarrow x=4-y$ thay vào (1), ta được $2\left(\sqrt{y}+1\right)=\sqrt{(4-y)^2+y^2}+2$ $\Leftrightarrow 4y=2y^2-8y+16\Leftrightarrow y^2-6y+8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=2\Rightarrow x=2\ (tm)\\ y=4\Rightarrow x=0\ (l)\end{array}\right.$.	0,5

<table>
<tr><td></td><td>Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(2;2)$.</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="5">**4. (2,0 điểm)**</td><td>Tìm các số nguyên dương a,b,c thỏa mãn $\dfrac{a-b\sqrt{2021}}{b-c\sqrt{2021}}$ là số hữu tỷ và $a^2+b^2+c^2$ là số nguyên tố.</td><td>**2,0**</td></tr>
<tr><td>Đặt $\dfrac{a-b\sqrt{2021}}{b-c\sqrt{2021}}=\dfrac{m}{n}$ trong đó $m,n\in\mathbb{Z};n>0;(|m|,n)=1$.
$\Rightarrow an-bm=(bn-cm)\sqrt{2021}$.</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>Vì $\sqrt{2021}$ là số vô tỷ và $a,b,c,m,n\in\mathbb{Z}$
$\Rightarrow\begin{cases}an-bm=0\\bn-cm=0\end{cases}\Rightarrow\dfrac{a}{b}=\dfrac{m}{n}=\dfrac{b}{c}\Leftrightarrow ac=b^2$.</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>$a^2+b^2+c^2=(a+c)^2-2ac+b^2=(a+c)^2-b^2=(a+b+c)(a-b+c)$
Do a,b,c nguyên dương nên $a+b+c>a-b+c$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>Lại có $a^2+b^2+c^2$ là số nguyên tố nên $\begin{cases}a-b+c=1\\a^2+b^2+c^2=a+b+c\end{cases}$
$\Rightarrow a=b=c=1$ (thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$ là số nguyên tố).
Vậy $a=b=c=1$.</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td rowspan="3">**5. (7,0 điểm)**</td><td>**1.** Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD,BE,CF của tam giác ABC cắt nhau tại H, EF cắt (O) tại P và Q (P thuộc cung nhỏ AB).</td><td>**5,0**</td></tr>
<tr><td>a) Chứng minh tam giác APQ cân.</td><td>**1,5**</td></tr>
<tr><td></td><td>0,5</td></tr>
</table>

	Ta có $\widehat{BEC}=\widehat{BFC}=90°$ nên tứ giác $BCEF$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AEF}=\widehat{ABC}$ (1)	
	Xét đường tròn (O) với các cung nhỏ $\overset\frown{AP},\overset\frown{AQ}$ và $\overset\frown{CQ}$ Ta có $\widehat{AEF}=\dfrac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset\frown{AP}+\text{sđ}\overset\frown{CQ}\right)$ (góc có đỉnh bên trong đường tròn) (2). $\widehat{ABC}=\text{sđ}\overset\frown{AC}=\dfrac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset\frown{AQ}+\text{sđ}\overset\frown{CQ}\right)$ (3).	0,5
	Từ $(1),(2)$ và (3) suy ra $\text{sđ}\overset\frown{AP}=\text{sđ}\overset\frown{AQ}\Rightarrow \overset\frown{AP}=\overset\frown{AQ}\Rightarrow AP=AQ$. Vậy tam giác APQ cân tại A (đpcm).	0,5
	b) Chứng minh $DH.DA=DE.DF$.	**1,5**
	Ta có $\widehat{ADB}=\widehat{AEB}=90°$ nên tứ giác $AEDB$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BAD}=\widehat{BED}$ và $\widehat{ABE}=\widehat{ADE}$ (4).	0,5
	Tương tự, ta có $\widehat{BDH}=\widehat{BFH}=90°$ nên tứ giác $BDHF$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ABE}=\widehat{FDA}$ (5). Từ (4) và $(5)\Rightarrow \widehat{FDA}=\widehat{ADE}$ (6).	0,5
	Từ (4) và (6), suy ra $\Delta AFD\sim\Delta EHD$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{DF}{DH}=\dfrac{DA}{DE}\Rightarrow DA.DH=DE.DF$ (đpcm).	0,5
	c) Chứng minh $MN\,//\,BC$.	**2,0**
	Ta có điểm M đối xứng với điểm P qua $AB\Rightarrow AP=AM$ Điểm N đối xứng với điểm Q qua $AC\Rightarrow AQ=AN$ Mà $AP=AQ$ nên $AP=AQ=AM=AN$ Suy ra P,Q,M,N cùng thuộc đường tròn (A).	0,5
	$\Rightarrow \widehat{MNQ}+\widehat{MPQ}=180°\Rightarrow \widehat{MPQ}=180°-\widehat{MNQ}$ (7). Lại có $MP\,//\,CF$ (cùng vuông góc với AB) $\Rightarrow \widehat{MPQ}=\widehat{CFQ}$ (đồng vị)	0,5
	Tứ giác $BCEF$ nội tiếp nên $\widehat{CFQ}=\widehat{CBE}\Rightarrow \widehat{MPQ}=\widehat{CBE}$ (8). Gọi G là giao điểm của MN và BE Do $NQ\,//\,BE$ (cùng vuông góc với AC) $\Rightarrow \widehat{EGN}+\widehat{MNQ}=180°$ (góc trong cùng phía) $\Rightarrow \widehat{EGN}=180°-\widehat{MNQ}$ (9).	0,5
	Từ $(7),(8)$ và $(9)\Rightarrow \widehat{EGN}=\widehat{EBC}$. Vậy $MN\,//\,BC$ (hai góc ở vị trí đồng vị bằng nhau) (đpcm).	0,5
	2. Cho đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC, (I) tiếp xúc với ba cạnh BC,CA,AB lần lượt tại các điểm D,E,F. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh các đường thẳng AM,EF,DI đồng quy.	**2,0**

	 Gọi K là giao điểm của DI và EF. Vẽ đường thẳng đi qua K song song với BC lần lượt lượt cắt AB, AC tại P và Q. Ta có $DI \perp BC, PQ // BC \Rightarrow DI \perp PQ$ $\widehat{PFI} = \widehat{PKI} = 90°$ nên tứ giác $PKIF$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{IFK} = \widehat{IPK}$ (1).	0,5
	Tương tự, ta có tứ giác $IKEQ$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{IEK} = \widehat{IQK}$ (2). Mà $IE = IF$ (cùng bằng bán kính đường tròn (I)) $\Rightarrow \Delta IEF$ cân tại I $\Rightarrow \widehat{IEK} = \widehat{IFK}$ (3). Từ $(1),(2)$ và (3) suy ra $\widehat{IPQ} = \widehat{IQP} \Rightarrow \Delta IPQ$ cân tại $I \Rightarrow K$ là trung điểm của PQ.	0,5
	$\Rightarrow PK = KQ = \dfrac{PQ}{2} \Rightarrow \dfrac{PK}{BM} = \dfrac{2PK}{2BM} = \dfrac{PQ}{BC}$ Trong ΔABC có $PQ // BC \Rightarrow \dfrac{AP}{AB} = \dfrac{PQ}{BC}$	0,5
	Xét ΔAPK và ΔABM có $\widehat{APK} = \widehat{ABM}$ (đồng vị) và $\dfrac{AP}{AB} = \dfrac{PK}{BM}$ (cùng bằng $\dfrac{PQ}{BC}$). $\Rightarrow \Delta APK \sim \Delta ABM\,(g.g) \Rightarrow \widehat{PAK} = \widehat{BAM}$ Suy ra hai tia AK, AM trùng nhau $\Rightarrow K \in AM$. Vậy DI, EF, AM đồng quy tại K (đpcm).	0,5
(2,0 điểm)	Cho a,b,c là ba số thực dương, tùy ý. Chứng minh rằng: $\dfrac{a}{\sqrt{ab+b^2}} + \dfrac{b}{\sqrt{bc+c^2}} + \dfrac{c}{\sqrt{ca+a^2}} \ge \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.	**2,0**
	Bất đẳng thức đã cho được viết lại	0,5

	$\frac{a}{\sqrt{2b(a+b)}}+\frac{b}{\sqrt{2c(b+c)}}+\frac{c}{\sqrt{2a(a+c)}}\geq\frac{3}{2}$ Áp dụng AM – GM, ta có $\sqrt{2b(a+b)}\leq\frac{2b+(a+b)}{2}=\frac{a+3b}{2}\Rightarrow\frac{a}{\sqrt{2b(a+b)}}\geq\frac{2a}{a+3b}$ Tương tự, ta có $\frac{b}{\sqrt{2c(b+c)}}\geq\frac{2b}{b+3c};\frac{c}{\sqrt{2c(a+c)}}\geq\frac{2c}{a+3c}$	
	Suy ra $\frac{a}{\sqrt{2b(a+b)}}+\frac{b}{\sqrt{2c(b+c)}}+\frac{c}{\sqrt{2c(a+c)}}\geq\frac{2a}{a+3b}+\frac{2b}{b+3c}+\frac{2c}{c+3a}$ Xét $P=\frac{a}{a+3b}+\frac{b}{b+3c}+\frac{c}{c+3a}=\frac{a^2}{a^2+3ab}+\frac{b^2}{b^2+3bc}+\frac{c^2}{c^2+3ca}$ $\Leftrightarrow P\geq\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca)}$ $\Leftrightarrow P\geq\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+\frac{1}{3}(ab+bc+ca)+\frac{8}{3}(ab+bc+ca)}$ Lại có $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca\Leftrightarrow\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)\geq\frac{1}{3}(ab+bc+ca)$	0,5
	Suy ra $P\geq\frac{(a+b+c)^2}{\frac{4}{3}(a^2+b^2+c^2)+\frac{8}{3}(ab+bc+ca)}$ $\Leftrightarrow P\geq\frac{3(a+b+c)^2}{4(a+b+c)^2}=\frac{3}{4}$.	0,5
	Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c$. Vậy $\frac{a}{\sqrt{2b(a+b)}}+\frac{b}{\sqrt{2c(b+c)}}+\frac{c}{\sqrt{2c(a+c)}}\geq\frac{3}{2}$ (đpcm).	0,5

-----HẾT-----

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO NAM ĐỊNH	ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI NĂM HỌC 2020 - 2021
ĐỀ CHÍNH THỨC	Môn: **Toán** – Lớp: **9** Thời gian làm bài: 150 phút *(Đề thi gồm: 01 trang)*

Câu 1: **(3,0 điểm)**

1) Cho $P=\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt[3]{(a+3)\sqrt{a}-3a-1}:\left(\dfrac{a-4}{3\left(\sqrt{a}-2\right)}-1\right)$ với $a\ge 0;\ a\ne 1;\ a\ne 4.$

Rút gọn biểu thức $P.$

2) Tìm tất cả các số thực x,y,z thỏa mãn điều kiện $2\sqrt{x}+2\sqrt{y-x}+3\sqrt{z-y}=\dfrac{1}{2}(z+17).$

Câu 2. (5,0 điểm)

1) Giải phương trình $6x\sqrt{2x^3+7}=6x^3+2x+22-4\sqrt{2x^3+7}.$

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy^2+3x^2=2y \\ x^2y+y^2=-2x. \end{cases}$

Câu 3. (3,0 điểm)

1) Tính tổng tất cả các số nguyên x thỏa mãn $x^2+x-a=0$ với a là số nguyên tố.

2) Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình $(x+y)^2+y+3x=z^2+1.$

Câu 4. (7,0 điểm) Trên đường tròn (O) lấy ba điểm A,B,C sao cho tam giác ABC nhọn. Gọi AD,BE,CF là các đường cao của tam giác ABC; đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại P. Qua D kẻ đường thẳng song song với đường thẳng EF cắt đường thẳng AC và AB lần lượt tại Q và R, M là trung điểm của BC.

1) Chứng minh tứ giác $BQCR$ là tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh hai tam giác EPM và DEM đồng dạng.

3) Giả sử BC là dây cung cố định không đi qua tâm O, A di động trên cung lớn BC của đường tròn (O). Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 5. (2,0 điểm)

1) Cho 2021 số tự nhiên từ 4 đến 2024 trên bảng, mỗi lần thay một hoặc một vài số bởi tổng các chữ số của nó cho đến khi trên bảng chỉ còn lại các số từ 1 đến 9. Hỏi cuối cùng, trên bảng có bao nhiêu số 3, bao nhiêu số 7?

2) Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn $x^3+y^3+z^3=24.$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=\dfrac{xyz+2(x+y+z)^2}{xy+yz+zx}-\dfrac{8}{xy+yz+zx+1}.$

------------**Hết**------------

Họ và tên thí sinh:... Số báo danh:.........................Ký tên: ....
Họ, tên và chữ ký của GT 1:..............................Họ, tên và chữ ký của GT 2:.............................

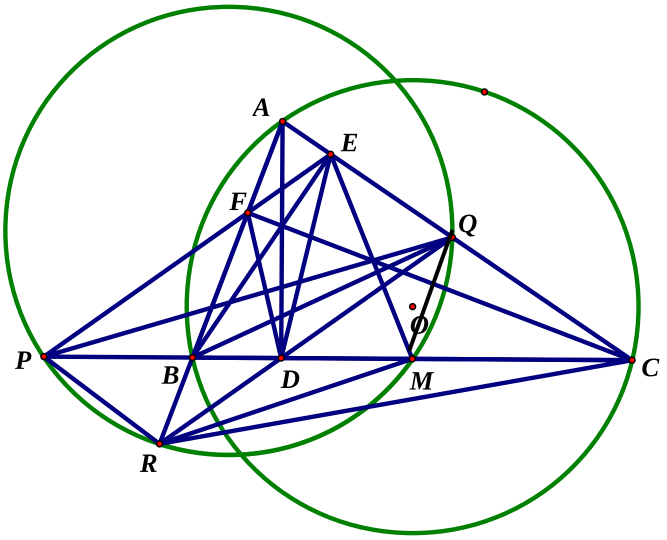
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NAM ĐỊNH

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM
ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC 2020 - 2021
Môn: **Toán** – Lớp: **9**

Câu	Đáp án	Điểm
1.1 *(1,5)*	***Rút gọn*** $P=\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt[3]{(a+3)\sqrt{a}-3a-1}:\left(\dfrac{a-4}{3(\sqrt{a}-2)}-1\right)$	**(1,5)**
	Tính được $\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}=2-\sqrt{3}$	0,5
	Tính được $\sqrt[3]{(a+3)\sqrt{a}-3a-1}=\sqrt[3]{a\sqrt{a}-3a+3\sqrt{a}-1}=\sqrt[3]{\left(\sqrt{a}-1\right)^3}=\sqrt{a}-1$	0,25
	$\dfrac{a-4}{3(\sqrt{a}-2)}-1=\dfrac{\sqrt{a}+2}{3}-1=\dfrac{\sqrt{a}-1}{3}$	0, 5
	Suy ra $P=2-\sqrt{3}+\left(\sqrt{a}-1\right):\dfrac{\sqrt{a}-1}{3}=2-\sqrt{3}+3=5-\sqrt{3}$.	0,25
1.2 *(1,5)*	Tìm tất cả các số thực $x;y;z$ thỏa mãn điều kiện $2\sqrt{x}+2\sqrt{y-x}+3\sqrt{z-y}=\dfrac{1}{2}(z+17)$.	**(1,5)**
	Điều kiện: $\begin{cases}x\ge 0\\ y-x\ge 0\\ z-y\ge 0\end{cases}$ hay $0\le x\le y\le z$.	0,5
	Ta có $2\sqrt{x}+2\sqrt{y-x}+3\sqrt{z-y}=\dfrac{1}{2}(z+17)\Leftrightarrow 4\sqrt{x}+4\sqrt{y-x}+6\sqrt{z-y}=z+17$	0,25
	$\Leftrightarrow 4\sqrt{x}+4\sqrt{y-x}+6\sqrt{z-y}=z-y+9+y-x+4+x+4$	0,25
	$\Leftrightarrow \left(\sqrt{z-y}-3\right)^2+\left(\sqrt{y-x}-2\right)^2+\left(\sqrt{x}-2\right)^2=0$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x}=2\\ \sqrt{y-x}=2\\ \sqrt{z-y}=3\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x=4\\ y=8\\ z=17\end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện) KL:…	0,25
2.1 *(2,5)*	***Giải phương trình*** $6x\sqrt{2x^3+7}=6x^3+2x+22-4\sqrt{2x^3+7}$.	**(2,5)**
	Điều kiện $2x^3+7\ge 0$ hay $x\ge\sqrt[3]{-\dfrac{7}{2}}$	0,5
	$6x\sqrt{2x^3+7}=6x^3+2x+22-4\sqrt{2x^3+7}\Leftrightarrow (6x+4)\sqrt{2x^3+7}=6x^3+2x+22$	0,25

	Đặt $t=\sqrt{2x^3+7}\ (t\ge 0)$ thì $2x^3=t^2-7$	
	Phương trình trên trở thành $(6x+4)t=3(t^2-7)+2x+22$	0,25
	$\Leftrightarrow 3t^2-2(3x+2)t+2x+1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2x+1\\ t=\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$	0,5
	TH1: $t=\dfrac{1}{3}$ ta được $\sqrt{2x^3+7}=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow 2x^3+7=\dfrac{1}{9}\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{-\dfrac{31}{9}}$	0,25
	TH2: $t=2x+1$ ta được $\sqrt{2x^3+7}=2x+1\Leftrightarrow \begin{cases}2x+1\ge 0\\ 2x^3+7=4x^2+4x+1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -\dfrac{1}{2}\\ 2x^3-4x^2-4x+6=0\end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -\dfrac{1}{2}\\ x^3-2x^2-2x+3=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -\dfrac{1}{2}\\ (x-1)(x^2-x-3)=0\end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\end{array}\right.$	0,5
	Đối chiếu điều kiện kết luận phương trình đã cho có ba nghiệm…	0,25
2.2 *(2,5)*	***Giải hệ phương trình*** $\begin{cases}xy^2+3x^2=2y\\ x^2y+y^2=-2x\end{cases}$.	**(2,5)**
	Nếu $x=0$ tính được $y=0$ Nếu $y=0$ tính được $x=0$ Do đó ta được $(x;y)=(0;0)$ là một nghiệm của hệ phương trình đã cho.	0,25
	Với x và y khác 0. Ta có $\begin{cases}xy^2+3x^2=2y\\ x^2y+y^2=-2x\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}xy+3\dfrac{x^2}{y}=2\\ xy+\dfrac{y^2}{x}=-2\end{cases}$ Đặt $\dfrac{x^2}{y}=a;\dfrac{y^2}{x}=b$ ta có hệ phương trình trên trở thành $\begin{cases}ab+3a=2 & (1)\\ ab+b=-2 & (2)\end{cases}$	0,5
	Suy ra $b-3a=-4$ hay $b=3a-4$ Thay $b=3a-4$ vào (1) ta có $a(3a-4)+3a=2$, tìm được $a=1$ hoặc $a=-\dfrac{2}{3}$	0,5
	TH1: với $a=1$ thì $b=-1$ $\Rightarrow \begin{cases}\dfrac{x^2}{y}=1\\ \dfrac{y^2}{x}=-1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x=-1\\ y=1\end{cases}$	0,5

	TH 2: với $a=-\dfrac{2}{3}$ thì $b=-6$ $\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{x^2}{y}=-\dfrac{2}{3}\\ \dfrac{y^2}{x}=-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{9}\\ y=-2\sqrt[3]{3}\end{cases}$	0,5
	Kết luận: vậy hệ phương trình đã cho có ba nghiệm là $(0;0)$; $(-1;1)$; $\left(-\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{9};-2\sqrt[3]{3}\right)$	0,25
3.1 *(1,5)*	Tính tổng tất cả các số nguyên x thỏa mãn $x^2+x-a=0$ với a là số nguyên tố.	**(1,5)**
	Từ giả thiết suy ra $a=x^2+x$ hay $a=x(x+1)$ mà x và $x+1$ là hai số nguyên liên tiếp nên $x(x+1)$ là số chẵn, do đó a là số chẵn.	0, 5
	Mặt khác a là số nguyên tố nên $a=2$	0,5
	Khi đó ta được $x^2+x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-2\end{array}\right.$ KL: tổng tất cả các số nguyên x thỏa mãn là $1-2=-1$	0, 5
3.2 *(1,5)*	Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình $(x+y)^2+y+3x=z^2+1$.	**(1,5)**
	$(x+y)^2+y+3x=z^2+1.\Leftrightarrow(x+y)^2+3x+y-1=z^2$ (*) Mà $3x+y-1>0$ với mọi x,y nguyên dương $\Rightarrow z^2>(x+y)^2$ (1)	0,5
	Ta lại có $(x+y+2)^2-z^2=(x+y+2)^2-(x+y)^2-3x-y+1$ $=(x+y)^2+4(x+y)+4-(x+y)^2-3x-y+1=x+3y+5>0$ với mọi x,y nguyên dương Nên $(x+y+2)^2>z^2$ (2)	0,5
	Từ (1) và (2) suy ra $z^2=(x+y+1)^2$ Thay vào (*) ta được $(x+y)^2+3x+y-1=(x+y+1)^2\Leftrightarrow x=y+2$ Do đó $z=2y+3$	0,25
	Vậy tất cả các nghiệm nguyên dương $(x;y;z)$ của phương trình có dạng $(k+2;k;2k+3)$ với k là số nguyên dương.	0,25
4 *(7,0)*	Trên đường tròn (O) lấy ba điểm A,B,C sao cho tam giác ABC nhọn. Gọi AD, BE, CF là các đường cao của tam giác ABC; đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại P. Qua D kẻ đường thẳng song song với đường thẳng EF cắt đường thẳng AC và AB lần lượt tại Q và R, M là trung điểm của BC. 1) Chứng minh tứ giác $BQCR$ là tứ giác nội tiếp. 2) Chứng minh hai tam giác EPM và DEM đồng dạng. 3) Giả sử BC là dây cung cố định không đi qua tâm O, A di động trên cung lớn	**(7,0)**

	BC của đường tròn (O). Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR luôn đi qua một điểm cố định.	
		
4.1 *(2,5)*	Chứng minh rằng tứ giác $BQCR$ là tứ giác nội tiếp.	**(2,5)**
	Chứng minh tứ giác $BCEF$ là tứ giác nội tiếp.	0,5
	Suy ra $\widehat{AFE}=\widehat{BCQ}$	0,5
	Chỉ ra $\widehat{AFE}=\widehat{BRQ}$	0,5
	Suy ra $\widehat{BRQ}=\widehat{BCQ}$	0,5
	Chỉ ra tứ giác $BQCR$ nội tiếp	0,5
4.2 *(2,5)*	Chứng minh hai tam giác EPM và DEM đồng dạng.	**(2,5)**
	Chỉ ra tam giác ECM cân tại M	0,5
	Chứng minh được $\widehat{EMD}=2\widehat{ACB}$	0,5
	Tứ giác $BCEF;ACDF$ nội tiếp nên $\widehat{ACB}=\widehat{AFE}=\widehat{BFD}$ Suy ra $\widehat{EMD}=2\widehat{ACB}=\widehat{AFE}+\widehat{BFD}\Rightarrow\widehat{EMD}+\widehat{DFE}=180^0$	0,5
	Chỉ ra tứ giác $DMEF$ nội tiếp, suy ra $\widehat{BDF}=\widehat{PEM}$	0, 5
	Mà $\widehat{BDF}=\widehat{BAC}=\widehat{MDE}$ nên $\widehat{MDE}=\widehat{PEM}$. Suy ra tam giác EPM và DEM đồng dạng	0,5
4.3 *(2,0)*	Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR luôn đi qua một điểm cố định.	**(2,0)**
	Do tứ giác $DMEF$ nội tiếp, suy ra $\widehat{PFD}=\widehat{EMD}$	0,5
	Mà $\widehat{PDF}=\widehat{EDM}$ nên tam giác PFD đồng dạng với tam giác EMD suy ra $\dfrac{PD}{DF}=\dfrac{ED}{MD}$	0,5
	Do $\widehat{RFD}=\widehat{ACB}=\widehat{AFE}=\widehat{FRD}$ nên tam giác FDR cân tại D suy ra $FD=DR$ Chứng minh tương tự tam giác DEQ cân tại D nên $DE=DQ$.	0,5
	Ta có $FD=DR;DE=DQ$ suy ra $\dfrac{PD}{DR}=\dfrac{DQ}{MD}$	0,25

	Chỉ ra hai tam giác PDR và QDM đồng dạng, suy ra $\widehat{PRQ}=\widehat{PMQ}$	
	Chỉ ra tứ giác $PRMQ$ nội tiếp nên đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR đi qua điểm M cố định	0,25
5.1 *(1,0)*	Cho 2021 số tự nhiên từ 4 đến 2024 trên bảng, mỗi lần thay một hoặc một vài số bởi tổng các chữ số của nó cho đến khi trên bảng chỉ còn lại các số từ 1 đến 9. Hỏi cuối cùng, trên bảng có bao nhiêu số 3, bao nhiêu số 7?	**(1,0)**
	Một số chia cho 9 dư k thì tổng các chữ số của nó chia 9 cũng dư k	0,25
	Do đó sau khi thay đủ số lần, mà mỗi lần thay một hoặc một vài số bởi tổng các chữ số của nó thì cuối cùng trên bảng chỉ còn lại các số dư k tương ứng của các số đã cho.	0,25
	Các số chia 9 dư 3 trong dãy từ 4 đến 2024 là: 12; 21; 30; … ; 2019. Dãy trên có $\dfrac{2019-12}{9}+1=224$ (số), do đó trên bảng có 224 số 3	0,25
	Các số chia 9 dư 7 trong dãy từ 4 đến 2024 là: 7; 16; 25; … ; 2023. Dãy trên có $\dfrac{2023-7}{9}+1=225$ (số), do đó trên bảng có 225 số 7 Vậy cuối cùng trên bảng có 224 số 3, có 225 số 7.	0,25
5.2 *(1,0)*	Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn $x^3+y^3+z^3=24$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=\dfrac{xyz+2(x+y+z)^2}{xy+yz+zx}-\dfrac{8}{xy+yz+zx+1}$.	**(1,0)**
	Ta có $x^3+8+8\ge 3.\sqrt[3]{x^3.8.8}=12x$ hay $x^3+16\ge 12x$ Tương tự $y^3+16\ge 12y$; $z^3+16\ge 12z$ Cộng vế ba bất đẳng thức trên ta được $12(x+y+z)\le x^3+y^3+z^3+48=72$ $\Rightarrow x+y+z\le 6$	0,25
	Có $24=x^3+y^3+z^3\ge 3\sqrt[3]{x^3.y^3.z^3}=3xyz\Rightarrow xyz\le 8$	0,25
	Có $24-3xyz=x^3+y^3+z^3-3xyz=(z+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$ $\le 6(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$ $\Rightarrow 8-xyz\le 2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=2\left((x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)\right)$ $\Rightarrow xyz+2(x+y+z)^2\ge 8+6(xy+yz+zx)$ $\Rightarrow 8+6(xy+yz+zx)\le xyz+2(x+y+z)^2\le 8+2.6^2=80$ $\Rightarrow 0<xy+yz+zx\le 12$	0,25
	Có $M\ge \dfrac{8+6(xy+yz+zx)}{xy+yz+zx}-\dfrac{8}{xy+yz+zx+1}=6+\dfrac{8}{t}-\dfrac{8}{t+1}=f(t)$ với $t=xy+yz+zx$; $t\in(0;12]$	0,25

	Khi đó $f\left(t\right)=6+\dfrac{8}{t\left(t+1\right)}\geq 6+\dfrac{8}{12\left(12+1\right)}=\dfrac{236}{39}$ Kết luận: giá trị nhỏ nhất của biểu thức M là $\dfrac{236}{39}$ khi $x=y=z=2.$	

Chú ý:

- Nếu thí sinh làm đúng mà cách giải khác với đáp án và phù hợp kiến thức của chương trình THCS thì tổ chấm thống nhất cho điểm thành phần đảm bảo tổng điểm như hướng dẫn quy định.

- Tổng điểm toàn bài không làm tròn.

-----------------Hết----------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THANH HÓA

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC 2020 - 2021
Môn: **Toán** – Lớp: **9**
Thời gian làm bài: 150 phút
(Đề thi gồm: 01 trang)

Câu 1. *(4,0 điểm)*

a) Rút gọn biểu thức: $P=\left(1-\dfrac{x-3\sqrt{x}}{x-9}\right):\left(\dfrac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{\sqrt{x}-2}{3+\sqrt{x}}-\dfrac{9-x}{x+\sqrt{x}-6}\right)$, với $x\ge 0, x\ne 4, x\ne 9$

b) Cho a, b, c là các số thực đôi một khác nhau thỏa mãn $a^3+1=3a, b^3+1=3b, c^3+1=3c$.

Tính giá trị của biểu thức $Q=a^2+b^2+c^2$.

Câu 2. *(4,0 điểm)*

a) Giải phương trình: $15\left(x^3+x^2+2x\right)=4\sqrt{5}\left(x^2+2\right)\sqrt{x^4+4}$

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+xy+y^2-4y+1=0 \\ \left(x^2+1\right)(x+y-2)=y \end{cases}$

Câu 3. *(4,0 điểm).*

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn phương trình $2^x x^2=9y^2-12y+19$.

b) Cho x, y là hai số nguyên dương thỏa mãn x^2+y^2+58 chia hết cho xy. Chứng minh rằng $\dfrac{x^2+y^2+58}{xy}$ chia hết cho 12

Câu 4. *(6,0 điểm)*

Cho đường tròn $(I;r)$ có bán kính IE, IF vuông góc với nhau. Kẻ hai tiếp tuyến với đường tròn (I) tại E và F, cắt nhau tại A . Trên tia đối của tia EA lấy điểm B sao cho $EB>r$, qua B kẻ tiếp tuyến thứ hai của đường tròn $(I), D$ là tiếp điểm, BD cắt AF tại C. Gọi K là giao điểm của AI và FD.

a) Chứng minh rằng hai tam giác IAB và FAK đồng dạng.

b) Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với BC, cắt FD tại P . Gọi M là trung điểm AB, M I cắt AC tại Q. Chứng minh rằng tam giác APQ là tam giác cân.

c) Xác định vị trí của điểm B để chu vi tam giác AMQ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó theo r.

Câu 5. *(2,0 điểm)*

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2+y^2+z^2+4xyz=2(xy+yz+zx)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=x(1-y)(1-z)$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THANH HÓA
NĂM HỌC 2020-2021. MÔN: TOÁN 9

Câu 1. *(4,0 điểm)*

a) Rút gọn biểu thức: $P=\left(1-\dfrac{x-3\sqrt{x}}{x-9}\right):\left(\dfrac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{\sqrt{x}-2}{3+\sqrt{x}}-\dfrac{9-x}{x+\sqrt{x}-6}\right)$, với $x\ge 0, x\ne 4, x\ne 9$

b) Cho a, b, c là các số thực đôi một khác nhau thỏa mãn $a^3+1=3a, b^3+1=3b, c^3+1=3c$.

Tính giá trị của biểu thức $Q=a^2+b^2+c^2$.

Lời giải

a) Với $x\ge 0, x\ne 4, x\ne 9$

$$P=\left(1-\frac{x-3\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}\right)\left(\frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}+\frac{\sqrt{x}-2}{3+\sqrt{x}}-\frac{9-x}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)}\right)$$

$$=\left(1-\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}\right):\left(\frac{(3-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})}{(\sqrt{x}-2)(3+\sqrt{x})}+\frac{(\sqrt{x}-2)^2}{(\sqrt{x}-2)(3+\sqrt{x})}-\frac{9-x}{(\sqrt{x}-2)(3+\sqrt{x})}\right)$$

$$=\left(1-\frac{\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}}\right):\left(\frac{9-x}{(\sqrt{x}-2)(3+\sqrt{x})}+\frac{x-4\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}-2)(3+\sqrt{x})}-\frac{9-x}{(\sqrt{x}-2)(3+\sqrt{x})}\right)$$

$$=\left(\frac{3+\sqrt{x}-\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}}\right):\left(\frac{9-x+x-4\sqrt{x}+4-9+x}{(3+\sqrt{x})(\sqrt{x}-2)}\right)=\frac{3}{3+\sqrt{x}}\cdot\frac{(3+\sqrt{x})(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)^2}=\frac{3}{\sqrt{x}-2}$$

Vậy $P=\dfrac{3}{\sqrt{x}-2}\quad(x\ge 0, x\ne 4; x\ne 9)$

b)

Cách 1:

Từ giả thiết: $a^3+1=3a; b^3+1=3b; c^3+1=3c$ ta có:

$$\begin{cases}a^3-b^3=3(a-b)\\ b^3-c^3=3(b-c)\\ c^3-a^3=3(c-a)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+ab+b^2=3\ (1)\\ b^2+bc+c^2=3\ \ (2)\\ c^2+ca+a^2=3\ \ (3)\end{cases}$$ (vì a, b, c đôi một khác nhau)

Lấy (1) trừ (2) vế theo vế suy ra:

$a^2-c^2=b(c-a)\Leftrightarrow a+c=-b\Leftrightarrow a+b+c=0$ (vì a, b, c đôi một khác nhau)

Cộng $(1);(2);(3)$ vé với vế ta được $2a^2+2b^2+2c^2+ab+bc+ca=9$

s

$\Leftrightarrow 3\cdot\left(a^2+b^2+c^2\right)+0=18$

Vậy $Q=6$

Cách 2:

Nhận xét a, b, c là ba nghiệm của phương trình $x^3-3x+1=0$.

Theo định lý Viet, ta có: $\begin{cases} a+b+c=0 \\ ab+bc+ca=-3 \\ abc=1 \end{cases}$

Do đó ta có: $Q=a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=0^2-2\cdot(-3)=6$

Vậy $Q=6$.

Câu 2. (*4,0 điểm*)

a) Giải phương trình: $15\left(x^3+x^2+2x\right)=4\sqrt{5}\left(x^2+2\right)\sqrt{x^4+4}$

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+xy+y^2-4y+1=0 \\ \left(x^2+1\right)(x+y-2)=y \end{cases}$

Lời giải

a) Điều kiện: $x\in\mathbb{R}$ Phương trình tương đương: $15x\left(x^2+x+2\right)=4\sqrt{5}\left(x^2+2\right)\sqrt{x^4+4}$

Vì $x^2+x+2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\geq\frac{7}{4}>0; x^2+2>0; \sqrt{x^4+4>0}$ với mọi $x\in\mathbb{R}$

Suy ra $x>0$ Chia cá hai ve cùa phurong trinh cho x^2 ta được:

$15\left(x+\frac{2}{x}+1\right)=4\sqrt{5}\left(x+\frac{2}{x}\right)\sqrt{\left(x+\frac{2}{x}\right)^2-4}$

Đặt: $t=x+\frac{2}{x}$, vi $x>0$ suy ra: $t\geq 2\sqrt{2}$

Phương trình: $15(t+1)=4\sqrt{5}t\sqrt{t^2-4}$

$4\sqrt{5}t\sqrt{t^2-4}-20t+5t-15=0 <=> 4\sqrt{5}t\left(\sqrt{t^2-4}-\sqrt{5}\right)+5\left(t-3\right)=0$

$\Leftrightarrow \frac{4\sqrt{5}r\left(r^7-9\right)}{\sqrt{1^2-4}+\sqrt{5}}+5(t-3)=0 <=> (t-3)\left[\frac{4\sqrt{5}t(t+3)}{\sqrt{t^2-4}+\sqrt{5}}+5\right]=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t-3=0 \\ \frac{4\sqrt{5}t(t+3)}{\sqrt{t^2-4}+\sqrt{5}}+5=0 \end{array}\right.$

Th1: với $t-3=0 <=> t=3$ (thỏa mãn đk $t\geq 2\sqrt{2}$) Khi đó

$x+\frac{2}{x}=3\Leftrightarrow x^2-3x+2=0\Leftrightarrow(x-1)(x-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=1 \end{array}\right.$ thỏa mãn $x>0$

Th2: $\frac{4\sqrt{5}t(t+3)}{\sqrt{t^2-4}+\sqrt{5}}+5=0$Vi $t\geq 2\sqrt{2}\Rightarrow\frac{4\sqrt{5}r(t+3)}{\sqrt{t^2-4}+\sqrt{5}}>0\Rightarrow VT(1)>5>0.$

Do do pt(1) vô nghiệm.

b) Nhận xét $y=0$ không thỏa mãn. Xét $y\neq 0$, hệ phương trình tương đương:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+1}{y}+(x+y-2)=2 \\ \dfrac{\left(x^2+1\right)}{y}\cdot(x+y-2)=1 \end{cases}$$

Đặt $a=\dfrac{x^2+1}{y}, b=x+y-2$. Hệ cho trở thành: $\begin{cases} a+b=2 \\ ab=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=1$. Do đó:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+1}{y}=1 \\ x+y-2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x^2+1 \\ x^2+x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, y=2 \\ x=-2, y=5 \end{cases}$$

Vậy hệ cho có hai nghiệm $(x;y)=(1;2),(-2;5)$.

Câu 3. (4,0 *điểm*).

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn phương trình $2^x x^2 = 9y^2 - 12y + 19$.

b) Cho x, y là hai số nguyên dương thỏa mãn x^2+y^2+58 chia hết cho xy. Chứng minh rằng $\dfrac{x^2+y^2+58}{xy}$ chia hết cho 12

Lời giải

a) Phương trình tương đương: $2^x x^2 = (3y-2)^2+15$.

Nếu x chia hết cho 3 thì $2^x x^2$ và 15 chia hết cho $3,(3y-2)^2$ chia 3 dư 1 nên phương trình vô nghiệm.Do đó x không chia hết cho 3.

Nếu x lẻ thì $x=2x_1+1$ với $x_1 \in \mathbb{N}^*$. Khi đó $2\cdot 4^{x_1}\cdot\left(2x_1+1\right)^2=(3y-2)^2+15$. Suy ra

$2\cdot 4^x\cdot\left(2x_1+1\right)^2 \equiv 2(\bmod 3)$

mà $(3y-2)^2+15 \equiv 1(\bmod 3)$ nên x phải là số chẵn. Do đó đặt $2^x x^2=a^2$ và $3y-2=b$

Phương trình đã cho trở thành:

Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=(2;1)$.

b) Theo đề bài ta có: $x^2+y^2+58=mxy$ với $m \in \mathbb{N}^*$.

Đặt $k=UCLN(x,y)$ với $k \geq 1, k \in \mathbb{N}$. Khi đó ta có $x=kx_1, y=ky_1$ với $x_1,y_1 \in \mathbb{N}^*$

Thay vào phương trình ta được: $k^2\left(x_1^2+y_1^2\right)+58=mk^2x_1y_1$. Suy ra 58 chia hết

$k^2 \Rightarrow k=1$

Vì $k=1$ nên x, y cùng lẻ hoặc trong hai số $x,\ y$ có một số chẵn, một số lẻ.

Nếu có một số chẵn không mất tính tổng quát giả sử y chẵn thì từ phương trình suy ra x chẵn, vô lí.

Vậy cả x và y cùng lẻ. Suy ra xy lẻ.

Do đó đặt $x=2x_2+1, y=2y_2+1$ với

$x_2,y_2 \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x^2+y^2+58=4\left(x_2^2+y_2^2\right)+4\left(x_2+y_2\right)+60$ chia hết cho 4

Do đó x^2+y^2+58 chia hết cho 4

Một số chính phương chia 3 dư 0 hoặc 1 . Nếu x chia hết cho 3 thì y không chia hết cho 3 do $UCLN(x,y)=1$

Khi đó x^2+y^2+58 chia 3 dư 1 mà xy chia hết cho 3, vô lí. Do đó cả x và y đều không chia hết cho 3 .

Khi đó ta có $x^2+y^2+58 \equiv 1+1+1=3 \equiv 0(\bmod 3)$. Suy ra x^2+y^2+58 chia hết cho 3 .

Vì x^2+y^2+58 chia hết cho 12 mà xy không chia hết cho 12 nên $\dfrac{x^2+y^2+58}{xy}$ chia hết cho 12 .

Câu 4. *(6,0 điểm)*

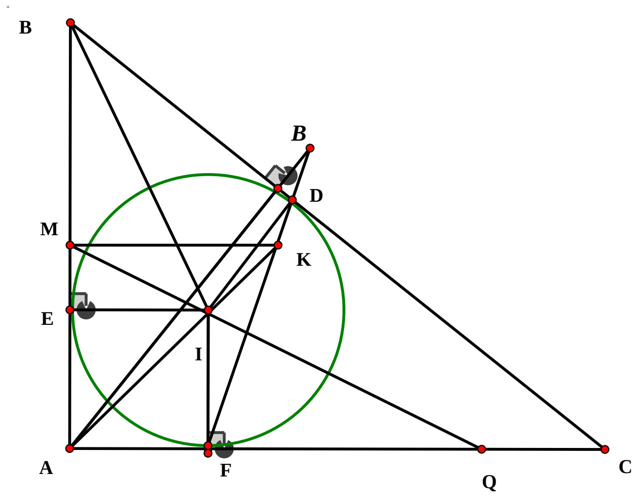
Cho đường tròn $(I;r)$ có bán kính IE, IF vuông góc với nhau. Kè hai tiếp tuyến với đường tròn (I) tại E và F, cắt nhau tại A . Trên tia đối của tia EA lấy điểm B sao cho $EB>r$, qua B kẻ tiếp tuyến thứ hai của đường tròn $(I), D$ là tiếp điểm, BD cắt AF tại C . Gọi K là giao điểm của AI và FD.

a) Chứng minh rằng hai tam giác IAB và FAK đồng dạng.

b) Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với BC, cắt FD tại P . Gọi M là trung điểm AB, M I cắt AC tại Q. Chứng minh rằng tam giác APQ là tam giác cân.

c) Xác định vị trí của điểm B đề chu vi tam giác AMQ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó theo r .

Lời giải



a)Theo tính chất hai tiếp tuyết cắt nhau , ta có $CD=CF \Rightarrow \Delta CDF$ cân tại C

$$\Rightarrow \widehat{CFD}=\frac{180^0-\widehat{C}}{2} => \widehat{AFK}=180^0-\widehat{CFD}=180^0-\frac{180^0-\widehat{C}}{2}=\frac{180^0+\widehat{C}}{2} (1)$$

Tứ giác $AEIF$ có ba góc vuông nên là hình chữ nhật. Hình chữ nhật $AEIF$ có $IE=\text{IF}$ nên là hình vuông. Suy ra $\widehat{IAB}=\widehat{FAK}=45^0$

$$\Rightarrow \widehat{AIB}=180^0-\left(\widehat{IAB}+\widehat{ABI}\right)=180^0-\left(45^0+\frac{\widehat{ABC}}{2}\right)=180^0-\left(45^0+\frac{90^0-\widehat{C}}{2}\right)=\frac{180^0+\widehat{C}}{2}$$

(2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AIB} = \widehat{AFK}$ kết hợp $\widehat{IAB} = \widehat{FAK} => \Delta IAB \sim \Delta FAK$ (g.g)

b) Vì $\Delta IAB \sim \Delta FAK$ nên $\frac{IA}{AB} = \frac{FA}{AK} => \frac{IA}{AB} = \frac{EA}{AK}$ (vì $FA = EA$) đẳng thức này kết hợp với điều kiện $\widehat{IAE}$ chung , suy ra $\Delta ABK \sim \Delta AKI$ (c.g.c)

ΔAEI vuông cân tại E nên ΔAKB vuông cận tại K. Suy ra đưoèng trung tuyến KM cũng là đường cao nên $KM \perp AB$

Ta có

$KM \perp AB, IE \perp AB, AC \perp AB =< KM // IE // AC$

$ID \perp BC, AP \perp BC => ID // AP$

Áp dụng định lí Talet và hệ qur định lí Talet, kết hợp $ID = IE$

HD $\perp$ BC, A $\frac{ID}{AP} = \frac{XI}{KA} = \frac{ME}{MA} = \frac{H}{AQ} \Rightarrow AP = AQ \Rightarrow \Delta APQ$ cân tại A

c)Đặt $ME = x, FQ = y$ voi $x > 0, y > 0$

$$\Delta MEI - \Delta HP(g \cdot g) \Rightarrow \frac{ME}{IF} = \frac{EI}{FQ} \Rightarrow \frac{x}{r} = \frac{r}{y} \Leftrightarrow xy = r^2 \ (1)$$

Chu vi của ΔAMQ là

$$C_{AMP} = (r + x) + (r + y) + \sqrt{(r + x)^2 + (r + y)^2} = 2r + (x + y) + \sqrt{\left(x^2 + y^2\right) + 2r(x + y) + 2r^2}$$

Ap dung bát ding thite cosi cho hai só thue duong x, y ta có:

$$C_{AMQ} = 2r + (x + y) + \sqrt{\left(x^2 + y^2\right) + 2r(x + y) + 2r^2} \geq 2r + 2\sqrt{xy} + \sqrt{2\sqrt{x^2y^2} + 2r \cdot 2\sqrt{xy + 2r^2}} \ (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $C_{AMQ} \geq 2r + 2r + \sqrt{2r^2 + 2r.2r + 2r^2} = 4r + \sqrt{8r^2} = \left(4 + 2\sqrt{2}\right)r$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = r => RB = 3r$

Vậy khi $EB = 3r$ thì chu vi tam giác AMQ nhỏ nhất. Giá trị nhỏ nhất đó bằng $\left(4 + 2\sqrt{2}\right)r$

Câu 5. **(2,0 điểm)**

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 + 4xyz = 2(xy + yz + zx)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = x(1 - y)(1 - z)$

Lời giải

Ta có:

$x^2 + y^2 + z^2 + 4xyz = 2(xy + yz + zx)$

$\Leftrightarrow \left(x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz + 2yz\right) = 4yz - 4xyz$ Suy ra $(y + z - x)^2 \leq (y + z)^2(1 - x)$. Đặt

$\Leftrightarrow (y + z - x)^2 = 4yz(1 - x)$

$a = y + z > 0,$ ta được: $(a - x)^2 \leq a^2(1 - x) \Leftrightarrow a^2x - 2ax + x^2 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq a(2 - a)$

Mặt khác $(1 - y)(1 - z) \leq \frac{(2 - y - z)^2}{4} = \frac{(2 - a)^2}{4}$ nên ta có:

$P \le a(2-a)\cdot\dfrac{(2-a)^2}{4} = \dfrac{a(2-a)^3}{4}$ Áp dụng bất đẳng thức AM - GM, ta được:

$$\frac{1}{3}\cdot 3a(2-a)\cdot(2-a)(2-a) \le \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{3a+2-a+2-a+2-a}{4}\right)^4 = \frac{27}{16}$$

Suy ra $P \le \dfrac{27}{64}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=\dfrac{1}{2}$ hay $x=\dfrac{3}{4}, y=z=\dfrac{1}{4}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\dfrac{27}{64}$ đạt được khi $x=\dfrac{3}{4}, y=z=\dfrac{1}{4}$.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
KHÁNH HÒA

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC 2020 - 2021
Môn: **Toán** – Lớp: **9**
Thời gian làm bài: 150 phút
Ngày: 3/12/2020
(Đề thi gồm: 01 trang)

Câu 1. *(4,0 điểm)*

a) Rút gọn $A=\sqrt{3-2\sqrt{2}}-\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$.

b) Cho các số thực x,y,z thỏa mãn $x+y+z=3$ và $x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx$. Tính giá trị của biểu thức $B=x^{2020}+y^{2020}+z^{2020}+xyz$.

Câu 2. *(4,0 điểm)*

a) Cho đa thức $f(x)=x^2+bx+c$ biết rằng $f(x)$ chia cho $x+4$ dư 3, chia cho $x-1$ dư 8.

Tìm b,c.

b) Giải phương trình: $\dfrac{(x^2-x-3)(x^2-3x-3)+x^2}{x+1}=0$.

Câu 3. *(5,0 điểm)*

a) Chứng minh rằng $a^2+b^2\ge\dfrac{(a+b)^2}{2}\ge 2ab$ với mọi số thực a,b.

b) Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn điều kiện $abc=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{a^2+2b^2+3}+\frac{1}{b^2+2c^2+3}+\frac{1}{c^2+2a^2+3}.$$

Câu 4. *(5,0 điểm)*

Cho hình vuông $ABCD$. Điểm I thay đổi trên đường chéo BD (điểm I khác B và D). Gọi M,N theo thứ tự là chân đường vuông góc kẻ từ I đến AB và AD.

a) Chứng minh rằng $IM+IN$ không đổi.

b) Đường thẳng d đi qua I và vuông góc với MN. Chứng minh đường thẳng d luôn đi qua một điểm cố định.

c) Xác định vị trí điểm I để tam giác CMN có diện tích nhỏ nhất.

Câu 5. *(3,5 điểm)*

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (a,b) sao cho: $\dfrac{a^2b+1}{a+1}$ và $\dfrac{a+1}{b-1}$ là các số nguyên.

b) Trên bản đồ có 2021 đồng xu. Hai bạn An và Bình thực hiện một số trò chơi bằng cách đi lần lượt như sau: mỗi người, đến lượt của mình sẽ lấy đi một số các đồng xu sao cho nó là ước của số các đồng xu hiện có trên bàn. Người lấy đồng xu lượt cuối cùng là thua. Nếu An đi trước, Bình sẽ dùng chiến thuật như thế nào để chiến thắng?

HẾT

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ HSG TOÁN 9KHÁNH HÒA 2020-2021

Câu 1. *(4,0 điểm)*

a) Rút gọn $A=\sqrt{3-2\sqrt{2}}-\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$

b) Cho các số thực x,y,z thỏa mãn $x+y+z=3$ và $x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx$. Tính giá trị của biểu thức $B=x^{2020}+y^{2020}+z^{2020}+xyz$

Lời giải

a) Ta có $A=\sqrt{3-2\sqrt{2}}-\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}=\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}-\sqrt[3]{\left(\sqrt{2}+1\right)^3}=\left|\sqrt{2}-1\right|-\left(\sqrt{2}+1\right)=-2$

b) $x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx \Leftrightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0$

$\Leftrightarrow x=y=z$

Mà $x+y+z=3$ nên $x=y=z=1$ do đó

$B=1^{2020}+1^{2020}+1^{2020}+1=4$

Câu 2. *(4,0 điểm)*

a) Cho đa thức $f(x)=x^2+bx+c$ biết rằng $f(x)$ chia cho $x+4$ dư 3, chia cho $x-1$ dư 8.

Tìm b,c

b) Giải phương trình : $\dfrac{\left(x^2-x-3\right)\left(x^2-3x-3\right)+x^2}{x+1}=0$

Lời giải

a) Số dư của đa thức $f(x)$ cho $(x-a)$ là $f(a)$ ta có

$$\begin{cases} f(-4)=3 \\ f(1)=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-4)^2-4b+c=3 \\ 1^2+b+c=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=4 \\ c=3 \end{cases}$$

Vậy $b=4;c=3$

b) ĐKXĐ: $x\neq -1$

Ta có $\left(x^2-x-3\right)\left(x^2-3x-3\right)+x^2=0$

$\Leftrightarrow x^4-4x^3-2x^2+12x+9=0$

$\Leftrightarrow \left[(x-3)(x+1)\right]^2=0$

$$\left[\begin{array}{l} x=3(TM) \\ x=-1(TM) \end{array}\right.$$

Vậy $x\in\{-1;3\}$

Câu 3. *(5,0 điểm)*

a) Chứng minh rằng $a^2+b^2\geq\dfrac{(a+b)^2}{2}\geq 2ab$ với mọi số thực a,b

b) Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn điều kiện $abc=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{1}{a^2+2b^2+3}+\dfrac{1}{b^2+2c^2+3}+\dfrac{1}{c^2+2a^2+3}$

Lời giải

a) $a^2+b^2\ge\dfrac{(a+b)^2}{2}\ge 2ab$ với mọi số thực a,b

Xét $a^2+b^2\ge\dfrac{(a+b)^2}{2}\Leftrightarrow(a-b)^2\ge 0$ đúng với mọi số thực a,b (1)

$\dfrac{(a+b)^2}{2}\ge 2ab\Leftrightarrow(a-b)^2\ge 0$ đúng với mọi số thực a,b (2)

Từ (1) và (2) ta có $a^2+b^2\ge\dfrac{(a+b)^2}{2}\ge 2ab$

b) Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có $a^2+b^2\ge 2ab$ và $b^2+1\ge 2b.$

Suy ra $a^2+2b^2+\ \ 3\ge 2(ab+b+1)$ và ta có

$$\frac{1}{a^2+2b^2+3}\le\frac{1}{2(ab+b+1)}$$

Tương tự $\dfrac{1}{b^2+2c^2+3}\le\dfrac{1}{2(bc+c+1)}$; $\dfrac{1}{c^2+2a^2+3}\le\dfrac{1}{2(ac+a+1)}$

Đặt vế trái của BĐT cần chứng minh là A, ta có

$$A\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{ab+b+1}+\frac{1}{bc+c+1}+\frac{1}{ac+a+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{ab+b+1}+\frac{ab}{b+1+ab}+\frac{b}{1+ab+b}\right)(\text{ vì } abc=1)=\frac{1}{2}\frac{ab+b+1}{ab+b+1}=\frac{1}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ khi $a=b=c=1$

Câu 4. (5,0 *điểm*)

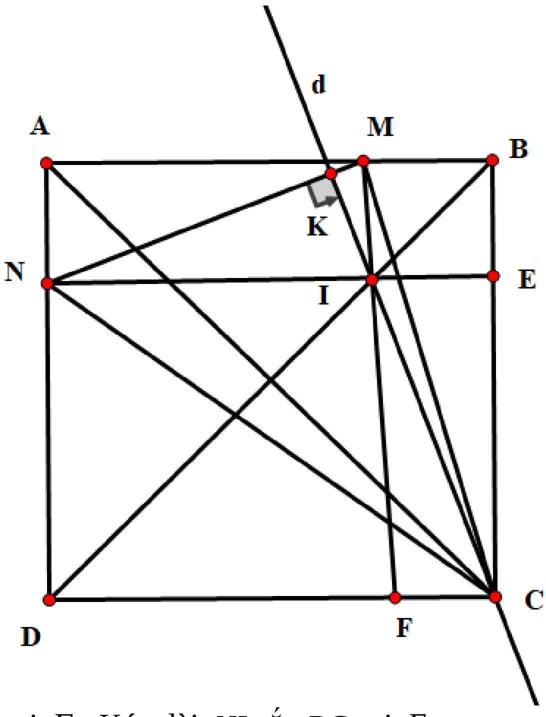
Cho hình vuông $ABCD$. Điểm I thay đổi trên đường chéo BD (điểm I khác B và D). Gọi M,N theo thứ tự là chân đường vuông góc kẻ từ I đến AB và AD.

a) Chứng minh rằng $IM+IN$ không đổi

b) Đường thẳng d đi qua I và vuông góc với MN. Chứng minh đường thẳng d luôn đi qua một điểm cố định.

c) Xác định vị trí điểm I để tam giác CMN có diện tích nhỏ nhất

Lời giải



a) Kéo dài MI cắt DC tại F ; Kéo dài NI cắt BC tại E

Xét tứ giác $MIEB$ có $\widehat{B} = \widehat{M} = \widehat{E} = 90^0$ nên tứ giác $MIEB$ là hình chữ nhật

Mà BI là đường phân giác nên hình chữ nhật $MIEB$ là hình vuông

Tương tự tứ giác $NDFI$ là hình vuông

Ta có $IM + IN = AM + BE$ (do tứ giác $ANIM$ là hình chữ nhật)

$= AM + BM$ (Do $MIEB$ là hình vuông)

$= AB$ (không đổi)

b) Kéo dài CI cắt MN tại K ta có $\Delta NIM = \Delta CEI(c.g.c)$

xét $\widehat{KIN} + \widehat{NIK} = \widehat{ICE} + \widehat{CIE} = 90^0$

Hay $\widehat{IKN} = 90^0$ nên $CI \perp MN$ theo tiên đề ơ clit đường thẳng d và đường thẳng CI trùng nhau nên đường thẳng d đi qua điểm C cố định

c) $S_{CMN} = S_{MCI} + S_{ICN} + S_{MIC} = S_{NID} + S_{ICN} + S_{MIB}$ (Do các tam giác đó cùng cạnh đáy và chiều cao)

$$S_{CMN} = \frac{AB^2}{2} - S_{AMN} = \frac{AB^2}{2} - \frac{AM.AN}{4} = \frac{AB^2}{2} - \frac{(AM + AN)^2 - (AM - AN)^2}{8}$$

$$\geq \frac{AB^2}{2} - \frac{AB^2}{8} = \frac{3AB^2}{8}$$

Giá trị diện tích nhỏ nhất ΔCMN là $\frac{3AB^2}{8}$ khi $AM = AN$ hay điểm I là trung điểm cạnh BD

Câu 5. *(3,5 điểm)*

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (a,b) sao cho: $\dfrac{a^2b+1}{a+1}$ và $\dfrac{a+1}{b-1}$ là các số nguyên.

b) Trên bản đồ có 2021 đồng xu. Hai bạn An và Bình thực hiện một số trò chơi bằng cách đi lần lượt như sau: mỗi người, đến lượt của mình sẽ lấy đi một số các đồng xu sao cho nó là ước của số các đồng xu hiện có trên bàn. Người lấy đồng xu lượt cuối cùng là thua. Nếu An đi trước, Bình sẽ dùng chiến thuật như thế nào để chiến thắng?

Lời giải

a) Từ giả thiết ta có:

$$\left.\begin{matrix} a^2b+1 \vdots a+1 \\ a+1 \vdots b-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a^2b+1 \vdots b-1 \Leftrightarrow a^2(b-1)+a^2+1 \vdots b-1 \Rightarrow a^2+1 \vdots b-1$$

$$\Rightarrow a^2+1-(a+1)(a-1) \vdots b-1 \Leftrightarrow 2 \vdots b-1$$

Vì $b \in \mathbb{N}^* \Rightarrow b-1 \geq 1 \Rightarrow b \in \{2,3\}$

TH1: $b=2 \Rightarrow 2a^2+1 \vdots a+1 \Rightarrow 2(a^2-1)+3 \vdots a+1 \Rightarrow 3 \vdots a+1$ vì $a \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a=2$

TH2: $b=3 \Rightarrow 3a^2+1 \vdots a+1 \Rightarrow 3(a^2-1)+4 \vdots a+1 \Rightarrow 4 \vdots a+1$ vì $a \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a \in \{1;3\}$

Vậy $(a,b) \in \{(1,3);(2,2);(3,3)\}$

b) Ta có nhận xét: Các số lẻ chỉ có các ước lẻ nên với mọi cách trừ đi một ước của số đó luôn được một số chẵn (có thể bằng 0).

Vậy ta có chiến thuật của Bình như sau. Sau lần lấy đi đồng xu đầu tiên của An trên bàn còn lại một số chẵn đồng xu. Vậy Bình cần lấy đi một ước lẻ của số đồng xu ấy để đưa số xu còn lại về lẻ. Khi đó An chỉ có thể để lại số chẵn đồng xu trên bàn. Cứ làm như vậy An phải là người lấy đi các đồng xu cuối cùng (lấy hết số xu khi số đồng xu lớn hơn 1 hoặc lấy đồng xu cuối cùng).

HẾT

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
PHÚ THỌ

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC 2020 - 2021
Môn: **Toán** – Lớp: **9**
Thời gian làm bài: 150 phút
(Đề thi gồm: 01 trang)

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho biểu thức : $P=\dfrac{\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}}}{\sqrt{x-2}-1}$, khẳng định nào dưới đây đúng ?

A. $P=1$ khi $2\le x<3$. **B.** $P=1$ khi $x>3$.
C. $P=-1$ khi $x>3$. **D.** $P=1$ khi $x\ne 3$.

Câu 2. Cho x, y là các số thực thoả mãn đẳng thức: $\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=1$. Giá trị của biểu thức $A=x^3+y^3$ bằng:

A. 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 3. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hai đường thẳng $(d): y=\left(m^2-1\right)x+4$ và $(d'): y=3x+m+2$ song song với nhau?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** Vô số.

Câu 4. Trên mặt phẳng toạ độ Oxy cho $M(x;y)$ với x, y thoả mãn hệ phương trình: $\begin{cases} x+y=1+10m \\ x-y=5+11m \end{cases}$

Tìm giá trị của m để điểm $M\in(d): y=x+1$.

A. $m=\dfrac{3}{2}$. **B.** $m=-\dfrac{3}{2}$. **C.** $m=\dfrac{3}{11}$. **D.** $m=-\dfrac{6}{11}$.

Câu 5. Có bao nhiêu giá trị của m để hệ phương trình: $\begin{cases} mx+y=-1 \\ x+y=-m \end{cases}$ có nghiệm duy nhất thoả mãn đẳng thức $x=y(2-y)$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 6. Cho Parabol $(P): y=-\dfrac{1}{4}x^2$ và điểm $I(0;-1)$. Biết đường thẳng (d) qua I với hệ số góc luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B. Độ dài nhỏ nhất của AB là :

A. 4. **B.** $3\sqrt{3}$. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** $3\sqrt{2}$.

Câu 7. Cho phương trình: $\dfrac{x^3+2x+7}{x^3+2x+3}=x^2+2x+1$. Gọi S là tích tất cả các nghiệm của phương trình. Giá trị của S là :

A. -2. **B.** 2. **C.** 1. **D.** -1.

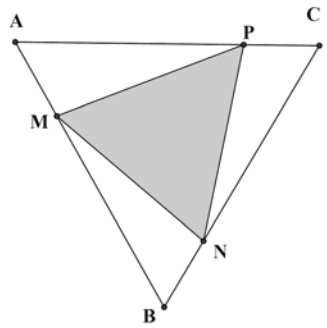
Câu 8. Có bao nhiêu giá trị của tham số a khác 0 để một trong các nghiệm của phương trình $x^2-8x+4a=0$ gấp đôi một trong các nghiệm của phương trình $x^2-x-4a=0$?

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 9. Cho tam giác ABC, trung tuyến AM. Các tia phân giác của các góc $\widehat{AMB}$, $\widehat{AMC}$ cắt các cạnh AB, AC theo thứ tự tại D và E. Biết $BC = 8cm$, $AM = 6cm$. Độ dài đoạn thẳng DE bằng

A. $5cm$. **B.** $4,5cm$. **C.** $5,2cm$. **D.** $4,8cm$.

Câu 10. Cho tam giác ABC đều cạnh $4a$. Gọi M, N, P là các điểm di động trên các cạnh AB, AC, CA sao cho $AM = BN = CP$ (như hình vẽ bên). Giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác MNP là



A. $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **B.** $2a^2\sqrt{3}$.

C. $a^2\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{8}$.

Câu 11. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng $48cm^3$. Gọi E, E' lần lượt là trung điểm của các cạnh CD, $C'D'$. Thể tích của lăng trụ $ABE.A'B'E'$ bằng:

A. $12cm^3$. **B.** $24cm^3$. **C.** $36cm^3$. **D.** $16cm^3$.

Câu 12. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, CD. Giá trị của $\cos\widehat{AMN}$ là:

A. $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

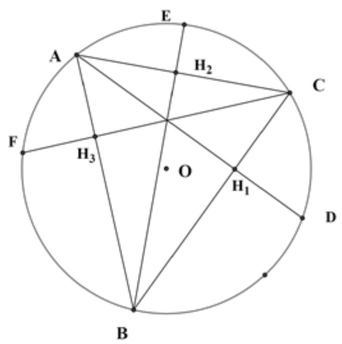
Câu 13. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Gọi I là điểm nằm trong hình vuông sao cho $\widehat{ABI} = \widehat{BAI} = 15°$. Giá trị của $IC + ID$ bằng:

A. $\dfrac{7a}{3}$. **B.** $\dfrac{5a}{3}$. **C.** $\dfrac{5a}{2}$. **D.** $2a$.

Câu 14. Cho tam giác ABC vuông tại A, gọi r, R lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp tam giác ABC. Biết $AB = 3cm$, $AC = 4cm$. Tỉ số $\dfrac{r}{R}$ bằng:

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{2}{5}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{3}{5}$.

Câu 15. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), các đường cao AH_1, BH_2, CH_3 cắt đường tròn (O) theo thứ tự ở D, E, F. Tính $\dfrac{AD}{AH_1} + \dfrac{BE}{BH_2} + \dfrac{CF}{CH_3}$. Ta được kết quả là:



A. $\dfrac{9}{2}$. **B.** 4.

C. $\dfrac{13}{3}$. **D.** $\dfrac{7}{2}$.

Câu 16. Từ danh sách giới thiệu giáo viên tham gia làm đề thi chọn học sinh giỏi lớp 9 môn Toán, trong đó có 6 giáo viên nam và 4 giáo viên nữ, thầy Hồng phụ trách muốn chọn 3 giáo viên tham gia làm đề thi. Có bao nhiêu cách chọn nếu trong 3 giáo viên đó có ít nhất một giáo viên nữ?

A. 100. **B.** 21. **C.** 19. **D.** 52.

II. PHẦN TỰ LUẬN

Câu 1. ***(3,0 điểm).***

a) Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $(x+y-3)^2+(y-2)^2=y-2$

b) Có bao nhiêu số tự nhiên n không vượt quá 2021 sao cho n^2+2021 chia hết cho 30

Câu 2. ***(3,5 điểm).***

a) Giả sử x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm của phương trình: $x^3-4x^2+2x+4=0$. Đặt $S_n=x_1^n+x_2^n+x_3^n$

Chứng minh rằng S_n là số nguyên với mọi n nguyên dương.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{x+2}(x+3)=\sqrt{y}\left[\sqrt{y(x+2)}+1\right]\\ x^2+(y+1)(2x-y+5)=x+16\end{cases}$

Câu 3. ***(4,0 điểm).*** Cho đường tròn (O) và một dây cung BC cố định không là đường kính. Xét điểm A thay đổi trên (O) sao cho A không trùng với B, C. Gọi H là trực tâm tam giác ABC, I là trung điểm BC.

a) Chứng minh rằng $AH=2OI$

b) Gọi D là điểm đối xứng với A qua O, M, N, P lần lượt là hình chiếu vuông góc của D lên BC, BH, CH. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP luôn đi qua một điểm cố định.

c) Tìm vị trí của điểm A để $HA+HB+HC$ lớn nhất.

Câu 4. ***(1,5 điểm).*** Cho a, b, c là ba số nguyên dương thoả mãn $a+b+c=2021$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P(a,b,c)=\frac{a}{b+e}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$$

HẾT

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO PHÚ THỌ
ĐÁP ÁN KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH THCS
NĂM HỌC 2020 – 2021 - MÔN: TOÁN 9
Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

BẢNG ĐÁP ÁN PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4	Câu 5	Câu 6	Câu 7	Câu 8
B	C	A	D	B	A	D	C
Câu 9	Câu 10	Câu 11	Câu 12	Câu 13	Câu 14	Câu 15	Câu 16
D	C	B	A	D	B	B	A

☞ HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT ☜

II. PHẦN TỰ LUẬN

Câu 1. ***(3,0 điểm).***

a) Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $(x+y-3)^2+(y-2)^2=y-2$

b) Có bao nhiêu số tự nhiên n không vượt quá 2021 sao cho n^2+2021 chia hết cho 30

Lời giải

a) Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $(x+y-3)^2+(y-2)^2=y-2$

Phương trình: $(x+y-3)^2+(y-2)^2-(y-2)=0$

$\Leftrightarrow x^2+2(y-3)x+2y^2-11y+15=0$ (*)

Ta có: $\Delta_x=(y-3)^2-2y^2+11y-15=-y^2+5y-6$

Từ yêu cầu bài toán thì phương trình (*) phải có nghiệm x hay $\Delta_x\geq 0$

Vậy $0-y^2+5y-6\geq 0\Leftrightarrow 2\leq y\leq 3$

Mà $y\in Z\Rightarrow y\in\{2;3\}$

Với $y=2\Rightarrow x=1$

Với $y=3\Rightarrow x=0$

Vậy phương trình có nghiệm: $(x,y)\in\{(1;2);(0;3)\}$.

b) Có bao nhiêu số tự nhiên n ***không vượt quá*** 2021 ***sao cho*** n^2+2021 ***chia hết cho*** 30

Ta có: $n^2+2021=n^2-n+(2021+n)$

Chứng minh được n^2-n chia hết cho 6.

Chứng minh được n^2-n chia hết cho 5

Từ đó ta có: n^2-n chia hết cho 30

Do đó $\left(n^2+2021\right)\vdots 30\Leftrightarrow (2021+n):30$

$\Leftrightarrow (2010+11+n)\vdots 30\Leftrightarrow (n+11)\vdots 30$

Do n là số tự nhiên không vượt quá 2021 nên $0\leq n\leq 2021$

$\Rightarrow \begin{cases} n+11 \vdots 30 \\ 11 \le n+11 \le 2032 \end{cases}$

$\Rightarrow n+11 \in \{30; 60; ...; 2010\}$

$\Rightarrow n \in \{19; 49; ....; 1999\}$

Như vậy ta có 67 số tự nhiên n thoả mãn đề bài.

Câu 2. ***(3,5 điểm).***

a) Giả sử x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm của phương trình: $x^3 - 4x^2 + 2x + 4 = 0$. Đặt $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$

Chứng minh rằng S_n, là số nguyên với mọi n nguyên dương.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x+2}(x+3) = \sqrt{y}\left[\sqrt{y(x+2)} + 1\right] \\ x^2 + (y+1)(2x - y + 5) = x + 16 \end{cases}$

Lời giải

a) Giả sử x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm của phương trình: $x^3 - 4x^2 + 2x + 4 = 0$. Đặt $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$. Chứng minh rằng S_n, là số nguyên với mọi n nguyên dương.

Ta có: $x^2 - 4x^2 + 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)\left(x^3 - 2x - 2\right) = 0$

Giải phương trình $x^3 - 4x^3 + 2x + 4 = 0$ ta được ba nghiệm $x_1 = 1 - \sqrt{3}$; $x_2 = 1 + \sqrt{3}$; $x_3 = 2$

$S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n = (1+\sqrt{3})^n + (1-\sqrt{3})^n + 2^n$.

Để chứng minh S_n là số nguyên với mọi n nguyên dương ta đi chứng minh

$T_n = (1+\sqrt{3})^n + (1-\sqrt{3})^n$ là số nguyên với mọi n nguyên dương.

Ta đi chứng minh $T_n \in \mathbb{Z}$, bằng quy nạp.

Ta có: $T_1 = (1+\sqrt{3}) + (1-\sqrt{3}) = 2$; $T_2 = (1+\sqrt{3})^2 + (1-\sqrt{3})^2 = 8$ tức là $T_1, T_2 \in \mathbb{Z}$

Giả sử $T_n \in Z, \forall k \le n+1$. Ta đi chứng minh $T_{n+2} \in Z$, thật vậy:

$T_{n+2} = (1+\sqrt{3})^{n+2} + (1-\sqrt{3})^{n+2}$

$= \left[(1+\sqrt{3})^{n+1} + (1-\sqrt{3})^{n+1}\right]\left[(1+\sqrt{3}) + (1-\sqrt{3})\right] - \left[(1+\sqrt{3})^{n+1}(1-\sqrt{3}) + (1-\sqrt{3})^{n+1}(1+\sqrt{3})\right]$

$= \left[(1+\sqrt{3})^{m+1} + (1-\sqrt{3})^{n+1}\right]\left[(1+\sqrt{3}) + (1-\sqrt{3})\right] - \left[(1+\sqrt{3})^{n} + (1-\sqrt{3})^{n}\right](1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})$

$= 2T_{n+1} + 2T_n$

Vì $T_{\text{n}}, T_{n+1} \in \mathbb{Z}$ nên $T_{n+2} \in \mathbb{Z}$

Theo nguyên lý quy nap $T_n \in \mathbb{Z}$ với mọi n nguyên dương. Vậy S_n là số nguyên với mọi n nguyên dương.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x+2}\left(x+3\right) = \sqrt{y}\left[\sqrt{y\left(x+2\right)} + 1\right] \\ x^2 + \left(y+1\right)\left(2x - y + 5\right) = x + 16 \end{cases}$

Điều kiện: $\begin{cases} y \ge 0 \\ x \ge -2 \end{cases}$

Đặt $\sqrt{x+2}=a$; $\sqrt{y}=b$; $(a,b\ge 0)$

Phương trình thứ nhất trở thành $a\left(a^2+1\right)=b\left(ab+1\right)$

$\Leftrightarrow (a-b)\left(a^2+ab+1\right)=0 \Leftrightarrow a=b$ (vì $a^2+ab+1>0$)

$a=b \Rightarrow \sqrt{x+2}=\sqrt{y} \Leftrightarrow y=x+2$

Thay $y=x+2$ vào phương trình (2) ta được

$$2x^2+5x-7=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-\dfrac{7}{2} \end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện ta được $x=1 \Rightarrow y=3$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(x;y)=(1;3)$.

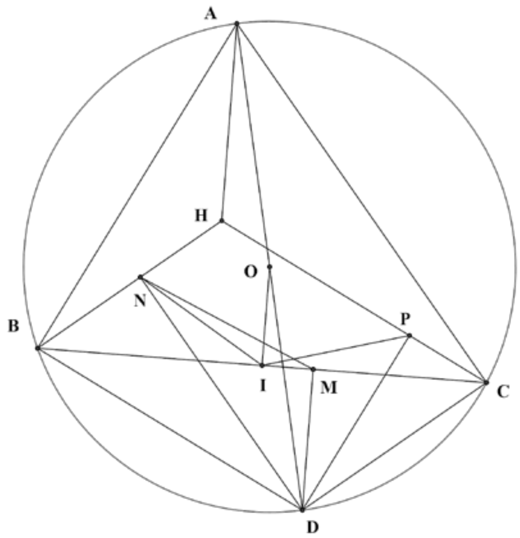
Câu 3. ***(4,0 điểm).*** Cho đường tròn (O) và một dây cung BC cố định không là đường kính. Xét điểm A thay đổi trên (O) sao cho A không trùng với B, C. Gọi H là trực tâm tam giác ABC, I là trung điểm BC.

a) Chứng minh rằng $AH=2OI$

b) Gọi D là điểm đối xứng với A qua O, M, N, P lần lượt là hình chiếu vuông góc của D lên BC, BH, CH. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP luôn đi qua một điểm cố định.

c) Tìm vị trí của điểm A để $HA+HB+HC$ lớn nhất.

Lời giải



a) Chứng minh rằng $AH=2OI$.

Kẻ đường kính AD của đường tròn (O), ta có $\widehat{ACD}=90^\circ$, mà $BH\perp AC$, suy ra $BH\,//\,DC$

Tương tự, $CH\,//\,DB$. Do đó tứ giác $BHCD$ là hình bình hành.

Suy ra BC, HD cắt nhau tại trung điểm mỗi đường, hay I là trung điểm của HD.

Trong tam giác DAH ta có OI là đường trung bình nên $AH=2OI$ (điều phải chứng minh).

b) Gọi D là điểm đối xứng với A qua O; M, N, P lần lượt là hình chiếu vuông góc cùn D lên BC, BH, CH. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP luôn đi qua một điểm cố định.

Tứ giác $HNDP$ nội tiếp đường tròn đường kính HD nên $\widehat{NIP}=2\widehat{NDP}=2\left(180^\circ-\widehat{BHC}\right)$

Tứ giác $BNMD$ nội tiếp đường tròn đường kính BD nên $\widehat{NMD}=180^\circ-\widehat{NBD}=\widehat{BHC}$.

Tứ giác $CPMD$ nội tiếp đường tròn đường kính CD nên $\widehat{PMD}=180^\circ-\widehat{PCD}=\widehat{BHC}$.

Từ đó ta có $\widehat{NMP} = 360° - \widehat{NMD} - \widehat{PMD} = 360° - 2\widehat{BHC}$

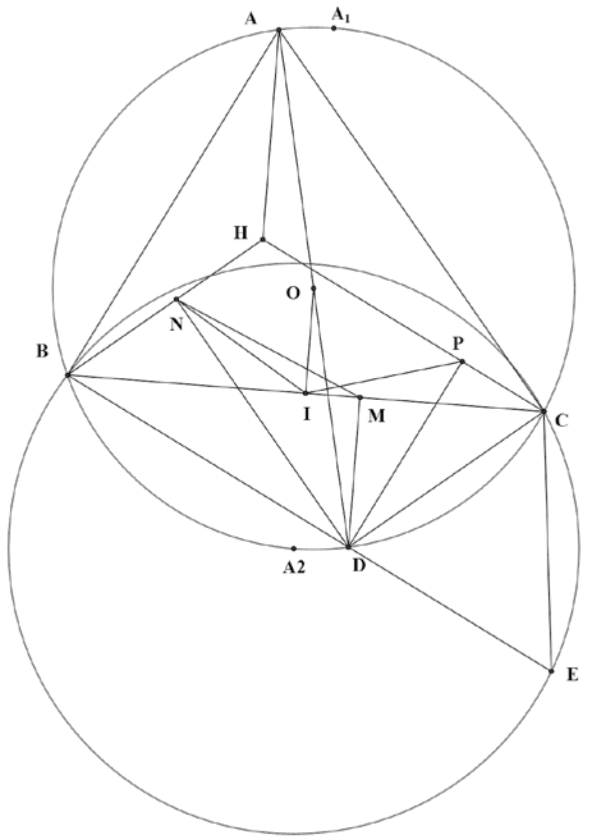
Như vậy $\widehat{NIP} = \widehat{NMP}$, suy ra tứ giác $NIMP$ nội tiếp được một đường tròn hay đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP luôn đi qua một điểm cố định I là trung điểm của BC (điều phải chứng minh).

c) Tìm vị trí điểm A để $HA + HB + HC$ lớn nhất.

Trên tia đối của tia DB lấy điểm E sao cho $DE = DC$

Ta có: $\widehat{BEC} = \frac{1}{2}\left(180° - \widehat{CDE}\right) = \frac{1}{2}\left(180° - \widehat{BAC}\right)$

Trường hợp 1: A thuộc cung lớn BC



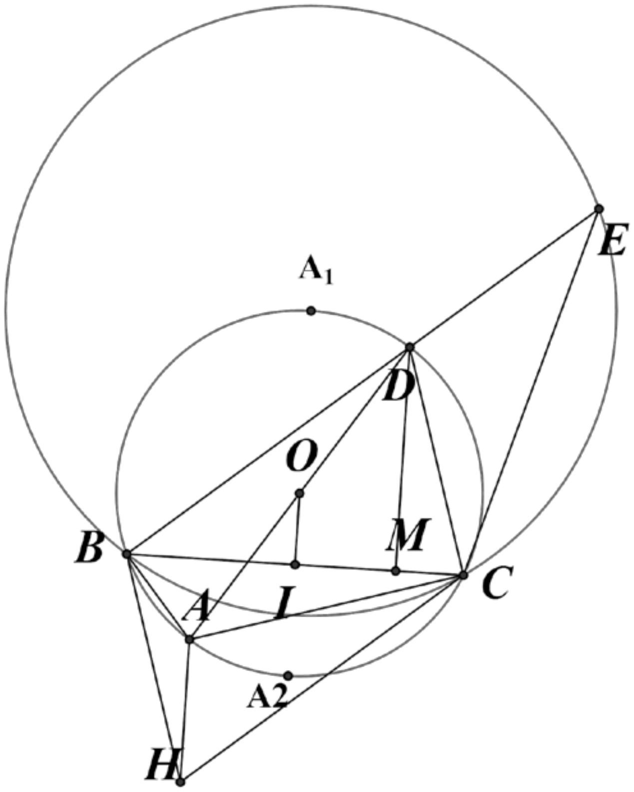
Vì $BEC = \frac{1}{2}\left(180° - \widehat{BAC}\right)$ nên E thuộc cung tròn cố định dựng trên đoạn thẳng BC, nằm khác phía với A đối với đường thẳng BC.

Có $HA = 2OI$ không đổi, nên $HA + HB + HC$ lớn nhất khi và chỉ khi $HB + HC = BD + DC = BD + DE = BE$ lớn nhất BE lớn nhất khi và chỉ khi BE là đường kính của đường tròn chứa cung tròn đó.

Khi đó $DI \perp BC$, tương ứng cũng có $AI \perp BC$ tức là A là điểm chính giữa cung lớn BC. Gọi A_1, A_2 lần lượt là điểm chính giữa cung lớn BC và cung nhỏ BC.

Ta có: $HB + HC = \sqrt{BC^2 + \left(2A_2I\right)^2}$ khi $A \equiv A_1$ là điểm chính giữa cung lớn BC.

Trường hợp 2: A thuộc cung nhỏ BC



Chứng minh tương tự ta có $HA+HB+HC$ lớn nhất khi và chỉ khi điểm A là điểm chính giữa cung nhỏ BC.

Ta có: $HB+HC=\sqrt{BC^2+\left(2A_2I\right)^2}$ khi $A\equiv A_1$ là điểm chính giữa cung lớn BC.

Ta có: $A_2I<A_1I$ nên khi A là điểm chính giữa cung nhỏ BC thì $HA+HB+HC$ lớn nhất.

Câu 4. ***(1,5 điểm).*** Cho a, b, c là ba số nguyên dương thoả mãn $a+b+c=2021$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P(a,b,c)=\frac{a}{b+e}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$$

Lời giải

Ta đi chứng minh với $(a,b,c)=(673,674,674)$, ta được $P(673,674,1347)=\frac{673}{1348}+\frac{1348}{1347}$ là giá trị nhỏ nhất của $P(a,b,c)$.

Vì chỉ có hữu hạn bộ số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1021$ nên tồn tại một bộ (a_0,b_0,c_0) nguyên dương để $P_0=P(a_0,b_0,c_0)$ là giá trị nhỏ nhất của $P(a,b,c)$ không mất tính tổng quát.

Giả sử $a_0\le b_0\le c_0$.

Ta đi chứng minh $c_0\le a_0+1$.

Thật vậy, giả sử $c_0\ge a_0+2$

Xét bộ $a_1=a_0+1$; $b_1=b_0$; $c_1=c_0-1$.

Khi đó ta có:

$$P_1 = P\left(a_1,b_1,c_1\right) = \frac{a_1}{b_1+c_1}+\frac{b_1}{c_1+a_1}+\frac{c_1}{a_1+b_1}$$

Ta có:

$$P_1 - P_0 = \frac{a_0+1}{b_0+c_1-1}+\frac{c_0-1}{a_0+1+b_0}-\frac{a_0}{b_0+c_0}-\frac{c_0}{a_b+b_0}$$

$$=\left(a_0+b_0+c_0\right)\left[\frac{1}{\left(b_0+c_0\right)\left(b_0+c_0-1\right)}-\frac{1}{\left(a_0+b_0\right)\left(a_0+b_0+1\right)}\right]<0$$

Điều này trái với cách trọn bộ $\left(a_0,b_0,c_0\right)$

Như vậy $a_0 \le b_0 \le c_0 \le a_0+1$.

Kết hợp với điều kiện $a_0+b_0+c_0=2021$ ta được $\left(a_0,b_0,c_0\right)=\left(673,674,674\right)$

Từ đó ta có giá trị nhỏ nhất của $P\left(a,b,c\right)$ là $P_0=\frac{673}{1348}+\frac{1348}{1347}$ đạt được khi một trong ba số a, b, c bằng 673, hai số còn lại bằng 674.

HẾT

:

SỞ GD&ĐT QUẢNG BÌNH	KỲ THI CHỌN HSG TỈNH NĂM HỌC 2020-2021
	Khóa ngày 08 tháng 12 năm 2020
ĐỀ CHÍNH THỨC	Môn thi: TOÁN
	LỚP 9 THCS
SỐ BÁO DANH:……………	Thời gian: 150 phút *(không kể thời gian giao đề)*
	Đề gồm có 01 trang và 05 câu

Câu 1 *(2,0 điểm).*

a. Rút gọn biểu thức $A=\left(\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}+3}+\dfrac{11+x}{7-x}\right):\left(\dfrac{3\sqrt{x+2}+1}{x-3\sqrt{x+2}+2}-\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}\right)$

(với $x>-2$ và $x\neq 7$)

b. Giải phương trình $\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}=4.$

Câu 2 *(2,0 điểm).*

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $(d): y=ax+b\ (a\neq 0)$ đi qua điểm $A(1;4)$ và cắt các tia Ox, Oy lần lượt tại B và C (khác O).

a. Viết phương trình đường thẳng (d) sao cho biểu thức $OA+OB+OC$ đạt giá trị nhỏ nhất.

b. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{OB.OC}{BC}$.

Câu 3 *(3,0 điểm).*

Trong mặt phẳng, cho hai điểm B, C cố định với $BC=2a\,(a>0)$ và A thay đổi sao cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi M là trung điểm của BC, đường thẳng đi qua A vuông góc với AM cắt các đường phân giác của các góc $\widehat{AMB}$ và $\widehat{AMC}$ lần lượt tại P và Q. Gọi D là giao điểm của MP với AB và E là giao điểm của MQ với AC.

a. Giả sử $AC=2AB$, tính số đo góc $\widehat{BQC}$.

b. Chứng minh rằng $\dfrac{PD}{QE}=\left(\dfrac{MP}{MQ}\right)^3$.

c. Tính giá trị nhỏ nhất của tổng diện tích hai tam giác ACQ và ABP theo a.

Câu 4 *(1,0 điểm).*

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=2$.

Chứng minh rằng $\dfrac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\dfrac{b+c}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}+\dfrac{c+a}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}\leq 4\left(\dfrac{\left(\sqrt{a}-1\right)^2}{\sqrt{b}}+\dfrac{\left(\sqrt{b}-1\right)^2}{\sqrt{c}}+\dfrac{\left(\sqrt{c}-1\right)^2}{\sqrt{a}}\right).$

Câu 5 *(2,0 điểm).*

a. Số nguyên dương n được gọi là số điều hòa nếu tổng các bình phương của các ước dương của nó (*kể cả* 1 *và* n) bằng $(n+3)^2$. Chứng minh rằng nếu pq *(với* p, q *là các số nguyên tố khác nhau*) là số điều hòa thì $pq+2$ là số chính phương.

b. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, y) thỏa mãn $x^3+y^3=x^2+y^2+42xy$.

-------------HẾT------------

SỞ GD&ĐT QUẢNG BÌNH

<u>HƯỚNG DẪN CHẤM</u>

KỲ THI CHỌN HSG TỈNH NĂM HỌC 2020-2021
Khóa ngày 08 tháng 12 năm 2020
Môn thi: TOÁN
LỚP 9 THCS
Đáp án này gồm có 05 trang

YÊU CẦU CHUNG

** Đáp án chỉ trình bày một lời giải cho mỗi câu. Trong bài làm của học sinh yêu cầu phải lập luận lôgic chặt chẽ, đầy đủ, chi tiết và rõ ràng.*

** Trong mỗi câu, nếu học sinh giải sai ở bước giải trước thì cho điểm 0 đối với những bước giải sau có liên quan. Ở câu 4 nếu học sinh không vẽ hình hoặc vẽ hình sai thì cho điểm 0.*

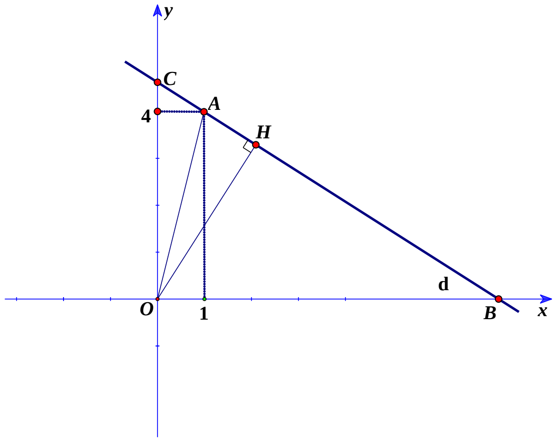
** Điểm thành phần của mỗi câu nói chung phân chia đến 0,25 điểm. Đối với điểm thành phần là 0,5 điểm thì tuỳ tổ giám khảo thống nhất để chiết thành từng 0,25 điểm.*

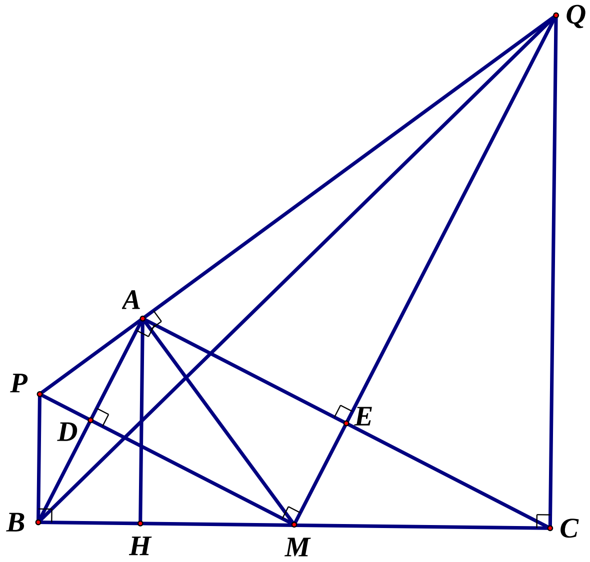
** Học sinh có lời giải khác đáp án (nếu đúng) vẫn cho điểm tối đa tuỳ theo mức điểm của từng câu.*

** Điểm của toàn bài là tổng (không làm tròn số) của điểm tất cả các câu.*

Câu	Nội dung	
1	**c. Rút gọn biểu thức** $A=\left(\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}+3}+\dfrac{11+x}{7-x}\right):\left(\dfrac{3\sqrt{x+2}+1}{x-3\sqrt{x+2}+2}-\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}\right)$ **(với** $x>-2$ **và** $x\neq 7$**)** **d. Giải phương trình** $\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}=4.$	**2,0 điểm**
1a	Đặt $\sqrt{x+2}=t\ (t>0,\ t\neq 3)\Rightarrow x=t^2-2$	**0,25**
	Khi đó $A=\left(\dfrac{t}{t+3}+\dfrac{t^2+9}{9-t^2}\right):\left(\dfrac{3t+1}{t^2-3t}-\dfrac{1}{t}\right)=\left[\dfrac{t(3-t)+t^2+9}{9-t^2}\right]:\left(\dfrac{3t+1-t+3}{t^2-3t}\right)$	**0,25**
	$=\dfrac{3(t+3)}{(3-t)(3+t)}.\dfrac{t(t-3)}{2(t+2)}=\dfrac{-3t}{2(t+2)}$	**0,25**
	Vậy $A=\dfrac{-3\sqrt{x+2}}{2(\sqrt{x+2}+2)}$	**0,25**
1b	Điều kiện: $x\geq 4$ Ta có $\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}=4.$	**0,5**

	$\Leftrightarrow \sqrt{x-4+4\sqrt{x-4}+4}+\sqrt{x-4-4\sqrt{x-4}+4}=4$ $\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-4}+2)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-4}-2)^2}=4$ $\Leftrightarrow \left\|\sqrt{x-4}+2\right\|+\left\|\sqrt{x-4}-2\right\|=4$	
	Nhận xét $\left\|\sqrt{x-4}+2\right\|+\left\|\sqrt{x-4}-2\right\| \ge \left\|\sqrt{x-4}+2+2-\sqrt{x-4}\right\|=4$ Đẳng thức xảy ra khi $(\sqrt{x-4}+2)(2-\sqrt{x-4}) \ge 0 \Leftrightarrow 2-\sqrt{x-4} \ge 0$ (Do $\sqrt{x-4}+2>0$) $\Leftrightarrow \sqrt{x-4} \le 2 \Leftrightarrow x \le 8$	**0,25**
	Kết hợp với điều kiện suy ra nghiệm của phương trình là $4 \le x \le 8$	**0,25**
2	**Trong mặt phẳng tọa độ** Oxy, **cho đường thẳng** $(d): y=ax+b$ (a $\ne$ 0) **đi qua điểm** $A(1;\ 4)$ **và cắt các tia** Ox, Oy **lần lượt tại** B **và** C **(khác** O**).** **c. Viết phương trình đường thẳng** (d) **sao cho biểu thức** $OA+OB+OC$ **đạt giá trị nhỏ nhất.** **d. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức** $P=\dfrac{OB.OC}{BC}$.	**2,0 điểm**
2a	Do (d) đi qua điểm A nên $a+b=4 \Rightarrow (d): y=ax+4-a$ Ta có $B\left(\dfrac{a-4}{a};0\right)$, $C(0;4-a)$ theo bài ra thì $\begin{cases}\dfrac{a-4}{a}>0\\ 4-a>0\end{cases} \Rightarrow a<0$	**0,25**
	$OB=\dfrac{a-4}{a}$, $\mathrm{OC}=4-a$ Ta có $OA+OB+OC$ nhỏ nhất khi $OB+OC$ nhỏ nhất (vì OA không đổi)	**0,25**
	$OB+OC=\dfrac{a-4}{a}+4-a=5+\dfrac{-4}{a}+(-a) \ge 5+2\sqrt{\dfrac{-4}{a}.(-a)} \ge 9$ $OA+OB+OC$ nhỏ nhất bằng $9+\sqrt{17}$ khi và chỉ khi $-a=\dfrac{-4}{a} \Leftrightarrow a=-2$ $(do\ \mathrm{a}<0)$	**0,25**
	Vậy phương trình đường thẳng (d) là: $y=-2x+6$.	**0,25**
2b	Theo câu a với $a<0$ đường thẳng (d) cắt tia Ox, Oy lần lượt tại B và C (khác O) và đi qua điểm $\mathrm{A}(1;4) \Rightarrow OA=\sqrt{17}$	**0,25**

		
	Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên đường thẳng (d), ta có $\dfrac{BC^2}{OB^2.OC^2}=\dfrac{1}{OB^2}+\dfrac{1}{OC^2}=\dfrac{1}{OH^2}\geq\dfrac{1}{OA^2}=\dfrac{1}{17}$	**0,25**
	$\Rightarrow P=\dfrac{OB.OC}{BC}\leq\sqrt{17}$	**0,25**
	Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $H\equiv A$, hay $d\perp OA$ Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P là $\sqrt{17}$.	**0,25**
3	**Trong mặt phẳng, cho hai điểm** B, C **cố định với** $BC=2a\,(a>0)$ **và** A **thay đổi sao cho tam giác** ABC **vuông tại** A**. Gọi** M **là trung điểm của** BC**; đường thẳng qua** A **vuông góc** AM **cắt các đường phân giác các góc** $\widehat{AMB}$ **và** $\widehat{AMC}$ **lần lượt tại** P, Q**. Gọi** D **là giao điểm của** MP **với** AB **và** E **là giao điểm của** MQ **với** AC. **a. Giả sử** $AC=2AB$**, tính số đo góc** $\widehat{BQC}$**.** **b. Chứng minh rằng** $\dfrac{PD}{QE}=\left(\dfrac{MP}{MQ}\right)^3$. **c. Tính giá trị nhỏ nhất của tổng diện tích hai tam giác** ACQ **và** ABP **theo** a.	**3,0 điểm**

3a		**0,25**
	Ta có $MA = MC$ và ME là phân giác của góc $\widehat{AMC}$ nên ME là đường trung trực của đoạn AC $\Rightarrow QA = QC$ và $\widehat{QEC} = 90^0$	**0,25**
	vì MQ là đường trung trực của đoạn AC và $AM \perp AQ$ nên $MC \perp QC$	**0,25**
	Xét hai tam giác vuông ABC và ECQ có $\widehat{ACB} = \widehat{EQC}$ (cùng phụ góc $\widehat{QCE}$) và $AB = EC$ (vì $2EC = AC = 2AB$) $\Rightarrow \Delta ABC = \Delta ECQ \Rightarrow CQ = CB$ hay tam giác BCQ vuông cân tại C, do đó $\widehat{BQC} = 45^0$	**0,5**
3b	Ta có MP, MQ là các đường phân giác của các góc $\widehat{AMB}$ và $\widehat{AMC}$ nên $MP \perp MQ$ Tương tự chứng minh câu a ta được $AD \perp MP, AE \perp MQ$	**0,25**
	Áp dụng hệ thức trong tam giác vuông APM với đường cao AD ta có $PD.PM = PA^2$ (1) Áp dụng hệ thức trong tam giác vuông AQM với đường cao AE ta có $QE.QM = QA^2$ (2) Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{PD}{QE} = \dfrac{QM.PA^2}{PM.QA^2}$ (3)	**0,25**
	Áp dụng hệ thức trong tam giác vuông MPQ với đường cao MA Ta có $PA.PQ = PM^2$ (4) và $QA.QP = QM^2$ (5) Từ (4) và (5) suy ra $\dfrac{PA}{QA} = \dfrac{PM^2}{QM^2}$ (6)	**0,25**

	Từ (3) và (6) suy ra $\dfrac{PD}{QE}=\left(\dfrac{MP}{MQ}\right)^3$ $(ĐPCM)$	0,25
3c	Vì MQ là trung trực của đoạn AC và MP là trung trực của đoạn AB suy ra $CQ=QA, BP=AP$ và $BCQP$ là hình thang vuông	0,25
	Do đó $S_{BCQP}=\dfrac{(BP+CQ).BC}{2}=\dfrac{PQ.BC}{2}\ge\dfrac{BC^2}{2}=2a^2$ (*)	0,25
	Kẻ AH vuông góc BC thì $S_{ABC}=\dfrac{AH.BC}{2}\le\dfrac{AM.BC}{2}=a^2$ (**) Từ (*) và (**) suy ra $S_{ABP}+S_{ACQ}=S_{BCQP}-S_{ABC}\ge 2a^2-a^2=a^2$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $H\equiv M$, khi đó khi tam giác ABC vuông cân tại A. Vậy giá trị nhỏ nhất của tổng diện tích hai tam giác ACQ và ABP là a^2.	0,25
4	**Cho** a,b,c **là các số thực dương thỏa mãn** $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=2$. **CMR:** $\dfrac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\dfrac{b+c}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}+\dfrac{c+a}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}\le 4\left(\dfrac{(\sqrt{a}-1)^2}{\sqrt{b}}+\dfrac{(\sqrt{b}-1)^2}{\sqrt{c}}+\dfrac{(\sqrt{c}-1)^2}{\sqrt{a}}\right)$.	**1,0 điểm**
	Ta có $\dfrac{b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\dfrac{c}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}+\dfrac{a}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}=\dfrac{a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\dfrac{b}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}+\dfrac{c}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$ (1) Thật vậy, xét $\dfrac{b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\dfrac{c}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}+\dfrac{a}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}-\dfrac{a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\dfrac{b}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}-\dfrac{c}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$ $=\sqrt{b}-\sqrt{a}+\sqrt{c}-\sqrt{b}+\sqrt{a}-\sqrt{c}=0$	0,25
	Ta chứng minh bất đẳng thức sau : Với x,y là các số thực và a,b là các số dương , ta có $\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{b}\ge\dfrac{(x+y)^2}{a+b}$ (*) Thật vậy $(*)\Leftrightarrow(a+b)(bx^2+ay^2)\ge ab(x+y)^2\Leftrightarrow(ay-bx)^2\ge 0$ (BĐT đúng)	0,25
	Áp dụng BĐT (*), ta có $\dfrac{(\sqrt{a}-1)^2}{\sqrt{b}}+\dfrac{(\sqrt{b}-1)^2}{\sqrt{c}}+\dfrac{(\sqrt{c}-1)^2}{\sqrt{a}}$ $\ge\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b}-2)^2}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}+\dfrac{(\sqrt{b}+\sqrt{c}-2)^2}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}+\dfrac{(\sqrt{c}+\sqrt{a}-2)^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)$. $\Leftrightarrow\dfrac{(\sqrt{a}-1)^2}{\sqrt{b}}+\dfrac{(\sqrt{b}-1)^2}{\sqrt{c}}+\dfrac{(\sqrt{c}-1)^2}{\sqrt{a}}\ge\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{c}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}+\dfrac{a}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}+\dfrac{b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)$ (2)	0,25

	(vì $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=2$)	
	Từ (1) và (2) suy ra $\Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{a}-1\right)^2}{\sqrt{b}}+\frac{\left(\sqrt{b}-1\right)^2}{\sqrt{c}}+\frac{\left(\sqrt{c}-1\right)^2}{\sqrt{a}}\ge \frac{1}{4}\left(\frac{b+c}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}+\frac{c+a}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}+\frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)$ $\Leftrightarrow \frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{b+c}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}+\frac{c+a}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}\le 4\left(\frac{\left(\sqrt{a}-1\right)^2}{\sqrt{b}}+\frac{\left(\sqrt{b}-1\right)^2}{\sqrt{c}}+\frac{\left(\sqrt{c}-1\right)^2}{\sqrt{a}}\right)(ĐPCM)$	0,25
5	**c. Số nguyên dương n được gọi là số điều hòa nếu tổng các bình phương của các ước dương của nó (*kể cả* 1 *và* n) bằng $(n+3)^2$. Chứng minh rằng nếu pq (*với* p, q *là các số nguyên tố khác nhau*) là số điều hòa thì $pq+2$ là số chính phương.** **d. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x,y) thỏa mãn** $x^3+y^3=x^2+y^2+42xy.$	**2,0 điểm**
5a	Ta có pq có các ước dương là $1, p, q$ và pq Vì pq là số điều hòa nên ta có $1+p^2+q^2+(pq)^2=(pq+3)^2$	**0,25**
	$\Leftrightarrow p^2+q^2=6pq+8 \Leftrightarrow (p-q)^2=4(pq+2)$	**0,25**
	Vì 4 là số chính phương nên từ đẳng thức trên suy ra $pq+2$ cũng là số chính phương. (ĐPCM)	**0,25**
5b	Gọi $d=(x,y)$ là ước chung lớn nhất của x và y Suy ra $x=da, y=db$ với $d,a,b\in\mathbb{N}^*,(a,b)=1$ Ta có $x^3+y^3=x^2+y^2+42xy$ $\Leftrightarrow d^3\left(a^3+b^3\right)=d^2\left(a^2+b^2+42ab\right)$ $\Leftrightarrow d(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)=a^2+b^2+42ab$ $\Leftrightarrow (da+db-1)\left(a^2-ab+b^2\right)=43ab$	**0,25**
	Đặt $c=da+db-1,(c\in\mathbb{N})$ Ta viết lại $a^2c-abc+b^2c=43ab$ Từ đó suy ra $b\mid ca^2$ và $a\mid cb^2 \Rightarrow b\mid c$ và $a\mid c$ Do đó $(ab)\mid c \Leftrightarrow c=mab, m\in\mathbb{N}^*$	**0,25**

	$\Rightarrow m\left(a^2-ab+b^2\right)=43\Rightarrow\left(a^2-ab+b^2\right)\mid 43\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a^2-ab+b^2=1\\a^2-ab+b^2=43\end{array}\right.$	
	TH1: $a^2-ab+b^2=1$, khi đó $1-ab=(a-b)^2\geq 0$ Suy ra $a=b=1\Rightarrow d=22$. Do vậy $(x,y)=(22,22)$	**0,25**
	TH2: $a^2-ab+b^2=43$ Do tính đối xứng của x,y, ta giả sử $x\geq y\Rightarrow a\geq b$ Do đó $43=a^2-ab+b^2\geq ab\geq b^2\Rightarrow b\in\{1,2,3,4,5,6\}$.	**0,25**
	Thay $b=1$ thì $a=7$ và $d=1$ suy ra $(x,y)=(1,7),(7,1)$ Thay $b=2,3,4,5$, thì không tồn tại số nguyên dương a thỏa mãn. Thay $b=6$ thì $a=7$ và $d=\dfrac{43}{13}$ (không thỏa mãn) Thử lại, ta có các cặp giá trị cầm tìm là $(x,y)=(22,22),(1,7),(7,1)$.	**0,25**

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
LÀO CAI

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THCS CẤP TỈNH
NĂM HỌC 2020 – 2021
Môn: Toán
Thời gian: 150 phút *(Không kể thời gian giao đề)*
Ngày thi 16/03/2021
(Đề thi gồm 01 trang, 05 câu)

Câu 1 (4,0 điểm).

Cho biểu thức $P=\left(\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}-\frac{2\sqrt{x}}{3x+2\sqrt{x}}-\frac{9x+\sqrt{x}+1}{3x-\sqrt{x}-2}\right):\frac{3\sqrt{x}+1}{7x-7\sqrt{x}},\ \left(x>0,x\neq 1\right)$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm x sao cho P nhận giá trị là một số nguyên.

Câu 2 (6,0 điểm).

a) Cho phương trình $x^2-2(m-1)x+2m-5=0$, (x là ẩn, m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $\left|x_1-x_2\right|=2\sqrt{2}$.

b) Lúc 7 giờ sáng một người đi xe đạp từ địa điểm A đến địa điểm B với khoảng cách là 18 km. Sau khi đi được $\frac{1}{3}$ quãng đường do xe bị hỏng nên người đó phải dừng lại sửa mất 20 phút rồi đi tiếp trên đoạn đường còn lại với vận tốc kém vận tốc lúc đầu là 8 km/h. Khi đến B người đó nghỉ lại 30 phút rồi trở về A với vận tốc bằng một nửa vận tốc đi trên $\frac{1}{3}$ quãng đường AB đầu tiên. Biết người đó trở về A lúc 10 giờ 20 phút sáng cùng ngày. Hỏi xe đạp hỏng lúc mấy giờ?

c) Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(x+1\right)^2+y^2=xy+y+1\\ 2y^3=x+y+1.\end{cases}$

Câu 3 (6,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn có $AB<AC$. Gọi D là trung điểm của BC. Hai đường cao BE và CF cắt nhau tại H. Đường tròn tâm O ngoại tiếp ΔBDF và đường tròn tâm O' ngoại tiếp ΔCDE cắt nhau tại I (I khác D), EF cắt BC tại K. Chứng minh

a) Tứ giác $AEIF$ nội tiếp.

b) Tam giác DCA đồng dạng với tam giác DIC.

c) Ba đường thẳng BE,CF,KI đồng quy.

Câu 4 (2,0 điểm). Cho 3 số thực dương a,b,c thỏa mãn: $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{a^2b^2}{c(a^2+b^2)}+\frac{b^2c^2}{a(b^2+c^2)}+\frac{a^2c^2}{b(a^2+c^2)}$.

Câu 5 (2,0 điểm). Giải phương trình nghiệm nguyên: $y^4+2y^3-y^2-2y-x^2-x=0$.

----------------**HẾT**---------------

Thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay!

Chữ ký của giám thị số 1:…………………..........   Chữ ký của giám thị số 2:…………………........

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
LÀO CAI

ĐỀ CHÍNH THỨC

HƯỚNG DẪN CHẤM
KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THCS CẤP TỈNH
NĂM HỌC 2020 – 2021
Môn Toán
(Đáp án gồm 08 trang, 05 câu)

I. Hướng dẫn chung

1. Nếu thí sinh giải theo cách khác mà đúng thì cho điểm tối đa câu đó.

2. Nếu thí sinh giải theo cách khác nhưng chưa hoàn thiện lời giải thì giám khảo chỉ cho điểm những ý làm được nếu chỉ ra được lời giải hoàn thiện theo hướng làm đó.

3. Bài hình học không vẽ hình hoặc vẽ sai hình (theo từng ý) thì không chấm điểm.

4. Trong một bài toán nếu có nhiều ý mà các ý có liên quan đến nhau, nếu thí sinh không làm được ý trước thì không được sử dụng kết quả của ý đó để làm ý sau.

II. Hướng dẫn chấm chi tiết

Câu 1 (4,0 điểm). Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{2\sqrt{x}}{3x+2\sqrt{x}}-\dfrac{9x+\sqrt{x}+1}{3x-\sqrt{x}-2}\right):\dfrac{3\sqrt{x}+1}{7x-7\sqrt{x}}$, $\left(x>0,x\neq 1\right)$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm x sao cho P nhận giá trị là một số nguyên.

Ý	Nội dung	Điểm
a)	$P=\left(\dfrac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{2}{3\sqrt{x}+2}-\dfrac{9x+\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(3\sqrt{x}+2\right)}\right):\dfrac{3\sqrt{x}+1}{7x-7\sqrt{x}}$	0,5
	$=\dfrac{3\sqrt{x}\left(3\sqrt{x}+2\right)-2\left(\sqrt{x}-1\right)-9x-\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(3\sqrt{x}+2\right)}.\dfrac{7\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}{3\sqrt{x}+1}$	0,5
	$=\dfrac{3\sqrt{x}+1}{3\sqrt{x}+2}.\dfrac{7\sqrt{x}}{3\sqrt{x}+1}$	0,5
	$=\dfrac{7\sqrt{x}}{3\sqrt{x}+2}$	0,5
b)	$\forall x>0,x\neq 1\Rightarrow \sqrt{x}>0\ \Rightarrow P=\dfrac{7\sqrt{x}}{3\sqrt{x}+2}>0$	0,5
	$P=\dfrac{7\sqrt{x}}{3\sqrt{x}+2}=\dfrac{7}{3}-\dfrac{14}{3\left(3\sqrt{x}+2\right)}<\dfrac{7}{3}$ $\Rightarrow 0<P<\dfrac{7}{3},\forall x>0,x\neq 1$	0,5

	P nhận giá trị là một số nguyên $\Rightarrow P \in \{1;2\}$	0,5
	$P = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$ (tmđk) $P = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 4 \Leftrightarrow x = 16$ (tmđk) Vậy $x \in \left\{\frac{1}{4};16\right\}$ thì P nhận giá trị là một số nguyên.	0,5

Câu 2 (6,0 điểm).

a) Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + 2m - 5 = 0,$ (x là ẩn, m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\left|x_1 - x_2\right| = 2\sqrt{2}$.

b) Lúc 7 giờ sáng một người đi xe đạp từ địa điểm A đến địa điểm B với khoảng cách là 18 km. Sau khi đi được $\frac{1}{3}$ quãng đường do xe bị hỏng nên người đó phải dừng lại sửa mất 20 phút rồi đi tiếp trên đoạn đường còn lại với vận tốc kém vận tốc lúc đầu là 8 km/h. Khi đến B người đó nghỉ lại 30 phút rồi trở về A với vận tốc bằng một nửa vận tốc đi trên $\frac{1}{3}$ quãng đường AB đầu tiên. Biết người đó trở về A lúc 10 giờ 20 phút sáng cùng ngày. Hỏi xe đạp hỏng lúc mấy giờ?

c) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x+1)^2 + y^2 = xy + y + 1 \\ 2y^3 = x + y + 1. \end{cases}$

Ý	Nội dung	Điểm
a)	Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + 2m - 5 = 0,$ (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\left|x_1 - x_2\right| = 2\sqrt{2}$.	
	$\Delta' = (m-2)^2 + 2 > 0,\ \forall m$ $\Rightarrow$ Phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2,\ \forall m$.	0,5
	Áp dụng Vi-ét: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1x_2 = 2m - 5 \end{cases}$	0,25
	$\left|x_1 - x_2\right| = 2\sqrt{2}$ $\Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 8$ $\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 8$	0,5
	$\Leftrightarrow m^2 - 4m + 4 = 0$ $\Leftrightarrow m = 2$	0,75
b)	b) Lúc 7 giờ sáng một người đi xe đạp từ địa điểm A đến địa điểm B với khoảng cách là 18 km	

	. Sau khi đi được $\frac{1}{3}$ quãng đường do xe bị hỏng nên người đó phải dừng lại sửa mất 20 phút rồi đi tiếp trên đoạn đường còn lại với vận tốc kém vận tốc lúc đầu là $8\ \text{km/h}$. Khi đến B người đó nghỉ lại 30 phút rồi trở về A với vận tốc bằng một nửa vận tốc đi trên $\frac{1}{3}$ quãng đường AB đầu tiên. Biết người đó trở về A lúc 10 giờ 20 phút sáng cùng ngày. Hỏi xe đạp hỏng lúc mấy giờ?	
	Đổi 20 phút = $\frac{1}{3}(h)$; 30 phút = $\frac{1}{2}(h)$; 10 giờ 20 phút = $10\frac{1}{3}(h)$ Gọi vận tốc xe đạp đi trên $\frac{1}{3}$ quãng đường AB đầu tiên là $x\left(\text{km/h}\right)\left(x>8\right)$ Vận tốc xe đạp đi trên $\frac{2}{3}$ quãng đường còn lại là $x-8\ \left(\text{km/h}\right)$ Vận tốc xe đạp đi từ B về A là $0,5x\ \left(\text{km/h}\right)$.	0,5
	Tổng thời gian xe đi từ A đến B rồi quay về A là: $10\frac{1}{3}-7-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}(h)$ Theo đề bài ta có phương trình $\frac{6}{x}+\frac{12}{x-8}+\frac{18}{0,5x}=\frac{5}{2}$	0,5
	$\Leftrightarrow 5x^2-148x+672=0$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=24\\x=\frac{28}{5}\end{array}\right.$ Kết hợp với điều kiện được: $x=24\ \left(\text{km/h}\right)$	0,5
	Thời gian xe đi $\frac{1}{3}$ quãng đường AB đầu tiên là $\frac{6}{24}=\frac{1}{4}(h)$ Vậy xe đạp hỏng lúc 7 giờ 15 phút.	0,5
c)	c) Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x+1)^2+y^2=xy+y+1\\2y^3=x+y+1.\end{cases}$	
	Hệ phương trình đã cho tương đương: $\begin{cases}(x+1)^2-(x+1)y+y^2=1 & (1)\\(x+1)+y=2y^3 & (2)\end{cases}$ Nhân vế với vế của (1) và (2) được $(x+1)^3+y^3=2y^3$	0,5
	$\Leftrightarrow (x+1)^3=y^3$ $\Leftrightarrow x+1=y$. Thế vào phương trình (1) được	0,5

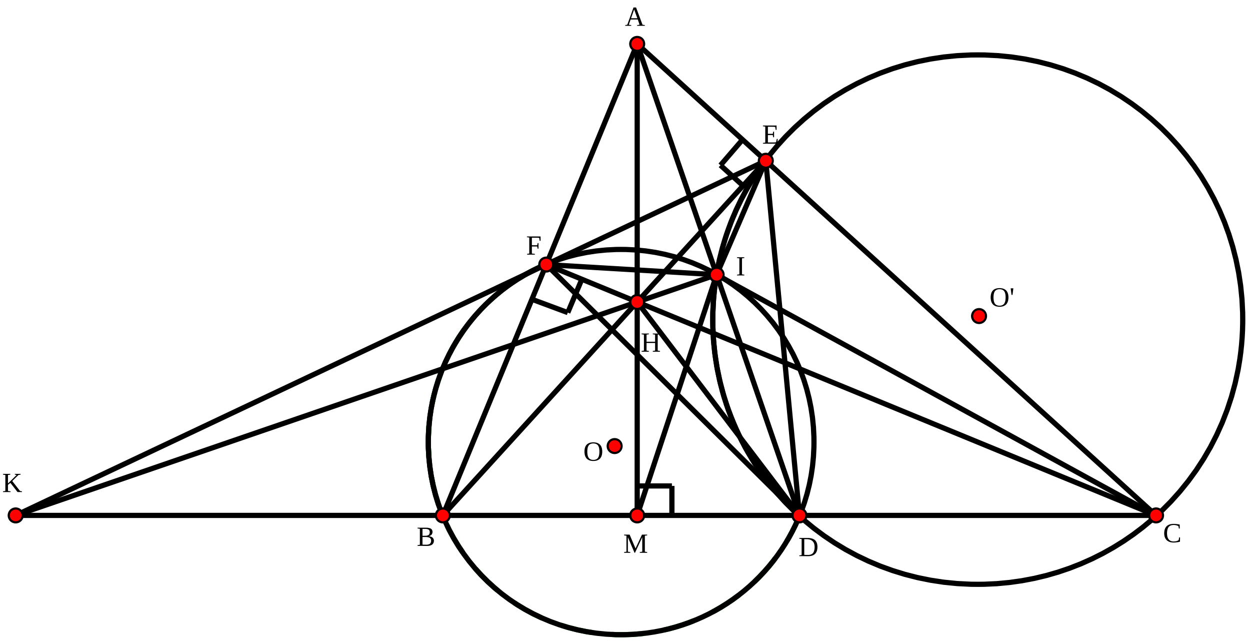
	$y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm 1$	0,5
	Với $y = 1 \Rightarrow x = 0$ Với $y = -1 \Rightarrow x = -2$ Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $\left(x;y\right) \in \left\{\left(0;1\right),\left(-2;-1\right)\right\}$.	0,5

Câu 3 (6,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn có $AB < AC$. Gọi D là trung điểm của BC. Hai đường cao BE và CF cắt nhau tại H. Đường tròn tâm O ngoại tiếp ΔBDF và đường tròn tâm O' ngoại tiếp ΔCDE cắt nhau tại I (I khác D), EF cắt BC tại K. Chứng minh

a) Tứ giác $AEIF$ nội tiếp.

b) Tam giác DCA đồng dạng với tam giác DIC.

c) Ba đường thẳng BE, CF, KI đồng quy.



Ý	Nội dung	Điểm
a)	a) Tứ giác $AEIF$ nội tiếp.	
	$\widehat{IDC} + \widehat{IEC} = 180^0$ (tứ giác $CDIE$ nội tiếp)	0,5
	$\widehat{IDC} + \widehat{IDB} = 180^0$ (hai góc kề bù) $\widehat{IDB} + \widehat{IFB} = 180^0$ (tứ giác $BDIF$ nội tiếp)	0,5
	$\Rightarrow \widehat{IEC} + \widehat{IFB} = 180^0$	0,5
	$\Rightarrow \widehat{AEI} + \widehat{AFI} = 180^0$ $\Rightarrow$ Tứ giác $AEIF$ nội tiếp.	0,5
b)	b) Tam giác DCA đồng dạng với tam giác DIC.	
	Ta có: $\widehat{AIF} = \widehat{AEF}$ (tứ giác $AEIF$ nội tiếp)	0,5

	$\widehat{ABC} = \widehat{AEF}$ (tứ giác $BCEF$ nội tiếp) $\widehat{ABC} + \widehat{FID} = 180^0$ (tứ giác $BDIF$ nội tiếp)	
	$\Rightarrow \widehat{AIF} + \widehat{FID} = 180^0$ $\Rightarrow$ Ba điểm A, I, D thẳng hàng.	0,5
	ΔBEC vuông tại E, D là trung điểm của $BC \Rightarrow DB = DC = DE$. $\Rightarrow \widehat{DEC} = \widehat{DCE}$ (ΔCDE cân tại D).	0,5
	Mà $\widehat{DEC} = \widehat{DIC}$ (tứ giác $CDIE$ nội tiếp) $\Rightarrow \widehat{DCE} = \widehat{DIC}$ ΔDCA và ΔDIC có $\widehat{ADC}$ chung và $\widehat{DCE} = \widehat{DIC}$ $\Rightarrow \Delta DCA \sim \Delta DIC$ $(g.g)$	0,5
c)	c) Ba đường thẳng BE, CF, KI đồng quy.	
	Ta có: $\Delta DCA \sim \Delta DIC \Rightarrow \widehat{DCI} = \widehat{DAC}$ Mặt khác: $\widehat{DAC} = \widehat{IFE}$ (tứ giác $AEIF$ nội tiếp) $\Rightarrow \widehat{DCI} = \widehat{IFE}$ $\Rightarrow$ tứ giác $CIFK$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{KFC} = \widehat{KIC}$	0,5
	$\widehat{KFB} = \widehat{ACD}$ (tứ giác $BCEF$ nội tiếp) $\Rightarrow \widehat{KFB} = \widehat{CID} \left(= \widehat{ACD}\right)$ $\Rightarrow \widehat{KID} = \widehat{BFC} = 90^0$ $\Rightarrow KI \perp AD$ (1)	0,5
	Tứ giác $AEHF$ nội tiếp đường tròn đường kính AH Tứ giác $AEIF$ nội tiếp $\Rightarrow$ I thuộc đường tròn đường kính AH $\Rightarrow$ $HI \perp AD$ (2)	0,5
	Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ ba điểm K, H, I thẳng hàng Vậy ba đường thẳng BE, CF, KI đồng quy tại H.	0,5

Câu 4 (2 điểm). Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa mãn: $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{a^2b^2}{c(a^2+b^2)} + \frac{b^2c^2}{a(b^2+c^2)} + \frac{a^2c^2}{b(a^2+c^2)}$.

Ý	Nội dung	Điểm

	$P=\dfrac{1}{c\left(\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{a^2}\right)}+\dfrac{1}{a\left(\dfrac{1}{c^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)}+\dfrac{1}{b\left(\dfrac{1}{c^2}+\dfrac{1}{a^2}\right)}$ Đặt $x=\dfrac{1}{a};y=\dfrac{1}{b};z=\dfrac{1}{c}$ thì $x,y,z>0$ và $x^2+y^2+z^2=1$.	0,5
	$P=\dfrac{z}{x^2+y^2}+\dfrac{x}{y^2+z^2}+\dfrac{y}{z^2+x^2}=\dfrac{z^2}{z\left(1-z^2\right)}+\dfrac{x^2}{x\left(1-x^2\right)}+\dfrac{y^2}{y\left(1-y^2\right)}$ Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 3 số dương ta có $x^2\left(1-x^2\right)^2=\dfrac{1}{2}.2x^2(1-x^2)(1-x^2)\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2x^2+1-x^2+1-x^2}{3}\right)^3$ $\Leftrightarrow x^2\left(1-x^2\right)^2\le\dfrac{4}{27}$ $\Leftrightarrow x(1-x^2)\le\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ $\Leftrightarrow\dfrac{x^2}{x(1-x^2)}\ge\dfrac{3\sqrt{3}}{2}x^2$ (1)	0,5
	Tương tự: $\dfrac{y^2}{y(1-y^2)}\ge\dfrac{3\sqrt{3}}{2}y^2$ (2); $\dfrac{z^2}{z(1-z^2)}\ge\dfrac{3\sqrt{3}}{2}z^2$ (3) Từ (1); (2); (3) ta có $P\ge\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.	0,5
	Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ hay $a=b=c=\sqrt{3}$. Vậy $MinP=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow a=b=c=\sqrt{3}$	0,5

Câu 5 (2,0 điểm). Giải phương trình nghiệm nguyên: $y^4+2y^3-y^2-2y-x^2-x=0$.

Ý	Nội dung	Điểm
	Ta có: $y^4+2y^3-y^2-2y-x^2-x=0$ $\Leftrightarrow\left(y^2+y-1\right)^2=x^2+x+1$ (*)	0,5
	Nếu $x>0$ thì $x^2<x^2+x+1<\left(x+1\right)^2$ suy ra x^2+x+1 không là số chính phương nên không tồn tại số nguyên x,y thỏa mãn (*). Nếu $x<-1$ thì $\left(x+1\right)^2<x^2+x+1<x^2$ suy ra x^2+x+1 không là số chính phương nên không tồn tại số nguyên x,y thỏa mãn (*).	0,5

	Nếu $x=-1$ hoặc $x=0$ thì từ (*) suy ra $\Leftrightarrow y^2+y-1=\pm 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-2 \\ y=-1 \\ y=0 \\ y=1 \end{array}\right.$	0,5
	Vậy phương trình có nghiệm nguyên $(x;y)\in\{(-1;-2),(-1;-1),(-1;0),(-1;1),(0;-2),(0;-1),(0;0),(0;1)\}$	0,5

--------------Hết------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH QUẢNG NINH

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH THCS NĂM 2021
Môn thi: **TOÁN – Bảng A**

Ngày thi: **20/03/2021**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Thời gian làm bài: **150 phút**, *không kể thời gian giao đề*

(Đề thi này có 01 trang)

Câu 1: *(3,0 điểm).* Cho biểu thức $A=\dfrac{5\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}+\dfrac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{2\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}-2}$ với $x\ge 0$ và $x\ne 1$.

a. Rút gọn biểu thức *A*;

b. Tìm giá trị của *x* để $\dfrac{A}{2}$ nhận giá trị nguyên.

Câu 2: *(5,0 điểm).*

1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ x^2y+xy^2+5x+5y=32 \end{cases}$.

2. Giải phương trình: $x^2-5x-4\sqrt{x+1}+14=0$.

Câu 3: *(3,0 điểm).* Cho các số nguyên dương *x*, *y* thỏa mãn: $x^3-9y^2+9x-6y=1$.

a. Chứng minh $\dfrac{x}{x^2+9}$ là phân số tối giản;

b. Tìm tất cả các cặp số $(x;y)$.

Câu 4: *(7,0 điểm).* Cho nửa đường tròn tâm *O*, đường kính *AB*. Trên nửa mặt phẳng bờ *AB* chứa nửa đường tròn (*O*) vẽ tia tiếp tuyến *Ax* với nửa đường tròn. Trên tia *Ax* lấy điểm *C* bất kì (*C* khác *A*), đường thẳng *BC* cắt nửa đường tròn (*O*) tại điểm *D* (*D* khác *B*). Gọi *H* là hình chiếu của *A* trên *OC*, đường thẳng *DH* cắt *AB* ở *E*.

a. Chứng minh tứ giác *OBDH* nội tiếp;

b. Chứng minh $EA^2=EO.EB$;

c. Tính tỉ số $\dfrac{HE}{HB}$.

Câu 5: *(2,0 điểm).* Cho các số thực dương *x*, *y* thỏa mãn $x+\dfrac{1}{y}\le 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{x^2-2xy+2y^2}{xy+y^2}$.

………………… Hết ………………..

- *Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.*
- *Giám thị không giải thích gì thêm.*

Họ và tên thí sinh: ……………………………………… Số báo danh: ……………….

Chữ kí giám thị 1:………………………….. Chữ kí giám thị 2:………………………………

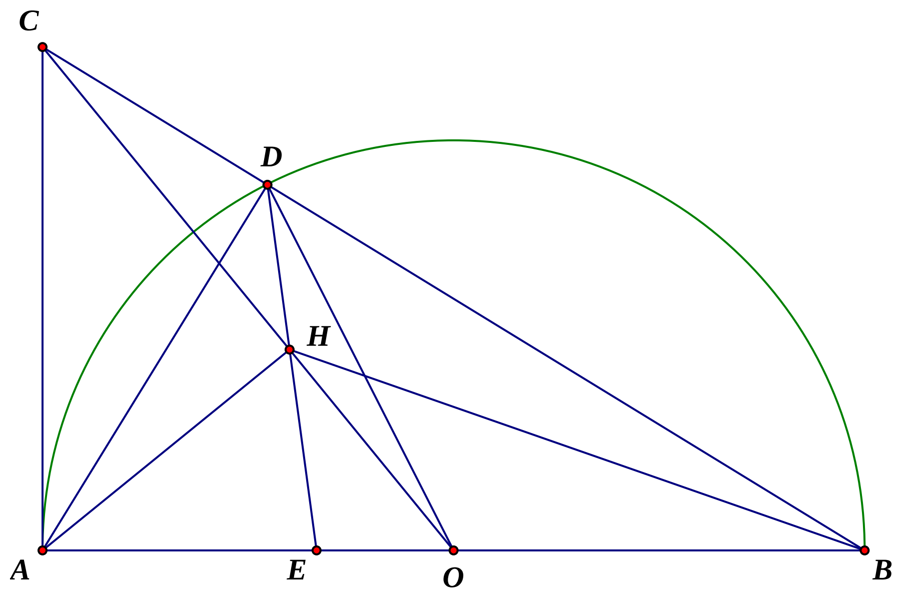
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH QUẢNG NINH

ĐỀ CHÍNH THỨC

HƯỚNG DẪN CHẤM THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH
THCS NĂM HỌC 2021
Môn thi: **TOÁN – Bảng A**
Ngày thi: **20/03/2021**

(Hướng dẫn chấm này có 03 trang)

Câu	**Sơ lược lời giải/ Một số gợi ý**	**Điểm**
1 **3,0 đ**	a. $A=\dfrac{\left(5\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)+\left(2\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)-\left(2\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}$	0,75
	$=\dfrac{7x-5\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}=\dfrac{7\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}$	1,0
	b. $A=7-\dfrac{12}{\sqrt{x}+2}$. Có $\sqrt{x}+2\ge 2\Rightarrow 0<\dfrac{12}{\sqrt{x}+2}\le 6$ vậy $\dfrac{1}{2}\le\dfrac{A}{2}<\dfrac{7}{3}$ mà $\dfrac{A}{2}\in\mathbb{Z}$ $\Rightarrow\dfrac{A}{2}=1$ hoặc 2 hoặc 3	0,5
	*) $\dfrac{A}{2}=1\Leftrightarrow x=\dfrac{4}{25}$ (thỏa mãn) *) $\dfrac{A}{2}=2\Leftrightarrow x=4$ (thỏa mãn) *) $\dfrac{A}{2}=3\Leftrightarrow x=100$ (thỏa mãn) KL:	0,75
2 **5,0 đ**	1. $\begin{cases}x^2+y^2=10\\x^2y+xy^2+5x+5y=32\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+y)^2-2xy=10\\(x+y)(xy+5)=32\end{cases}$	0,75
	$\Leftrightarrow\begin{cases}xy=\dfrac{(x+y)^2-10}{2}\\(x+y)\left[\dfrac{(x+y)^2-10}{2}+5\right]=32\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy=\dfrac{(x+y)^2-10}{2}\\(x+y)^3=64\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=4\\xy=3\end{cases}$.	0,75
	Giải được: $(x,y)=(1;3)$ hoặc $(x;y)=(3;1)$. KL:	1,0
	2. ĐK: $x\ge -1$	0,25
	$x^2-5x-4\sqrt{x+1}+14=0\Leftrightarrow\left(x^2-6x+9\right)+\left(x+1-4\sqrt{x+1}+4\right)=0$ $\Leftrightarrow(x-3)^2+\left(\sqrt{x+1}-2\right)^2=0$	1,75
	Vì $(x-3)^2\ge 0$, dấu đẳng thức khi $x=3$ $\left(\sqrt{x+1}-2\right)^2\ge 0$, dấu đẳng thức khi $x=3$	0,5

	Vậy: $(x-3)^2+\left(\sqrt{x+1}-2\right)^2=0 \Leftrightarrow x=3$ (thỏa mãn đk).	
3 **3,0 đ**	a. $x^3-9y^2+9x-6y=1 \Leftrightarrow x\left(x^2+9\right)=\left(3y+1\right)^2$	0,5
	Giả sử $UCLN\left(x;x^2+9\right)=d \Rightarrow \begin{cases} x \vdots d \\ x^2+9 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 \vdots d \\ x^2+9 \vdots d \end{cases} \Rightarrow 9 \vdots d$ $\Rightarrow d=1$ hoặc 3 hoặc 9	0,5
	$\begin{cases} x \vdots d \\ x^2+9 \vdots d \end{cases} \Rightarrow x\left(x^2+9\right) \vdots d^2$ hay $\left(3y+1\right)^2 \vdots d^2 \Rightarrow \left(3y+1\right) \vdots d$ nhưng $3y+1$ không chia hết cho 3, cho 9 nên $d=1$ $\Rightarrow \dfrac{x}{x^2+9}$ tối giản	0,5
	b. Ta có $x\left(x^2+9\right)=\left(3y+1\right)^2$ là số chính phương, $UCLN\left(x;x^2+9\right)=1 \Rightarrow x^2+9$ là số chính phương.	0,5
	Giả sử $x^2+9=k^2\left(k \in N\right)$ $\Leftrightarrow \left(k-x\right)\left(k+x\right)=9 \Rightarrow$ $k-x$ và $k+x$ là ước của 9	0,5
	Vì $k+x>k-x \Rightarrow \begin{cases} k+x=9 \\ k-x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=5 \\ x=4 \end{cases}$ Với $x=4 \Rightarrow y=3$. KL: $(x;y)=\left(4;3\right)$	0,5
4 **7,0 đ**		
	a. Chỉ ra $\widehat{CHA}=\widehat{CDA}=90^0$ $\Rightarrow$ tứ giác *AHDC* nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HDB}=\widehat{HAC}$	0,75
	Δ *AOC* vuông tại *A*, *AH* $\perp$ *OC* $\Rightarrow \widehat{AOH}=\widehat{HAC}$	0,75
	$\Rightarrow \widehat{HDB}=\widehat{HOA} \Rightarrow$ Tứ giác *BDHO* nội tiếp	0,75
	b. Δ *EHO* và Δ *EBD* có: $\widehat{E}$ chung; $\widehat{EOH}=\widehat{EDB}$ $\Rightarrow \Delta$ *EHO* $\backsim$ Δ *EBD* $\Rightarrow \dfrac{EO}{EH}=\dfrac{ED}{EB} \Rightarrow EO.EB=EH.ED$ (1)	1,0

	Tứ giác AHDC nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ADH}=\widehat{ACH}$ ΔAOC vuông tại A, AH $\perp$ OC $\Rightarrow \widehat{ACH}=\widehat{HAO} \Rightarrow \widehat{EDA}=\widehat{EAH}$	0,75
	Δ EAH và Δ EDA có $\widehat{E}$ chung, $\widehat{EAH}=\widehat{EDA} \Rightarrow \Delta$ EAH $\backsim \Delta$ EDA $\Rightarrow \frac{EH}{EA}=\frac{EA}{ED} \Rightarrow EA^2=EH.ED$ (2)	0,75
	Từ (1) và (2) $\Rightarrow EA^2=EO.EB$	0,25
	c. Tứ giác $OBDH$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{OHB}=\widehat{ODB}$ và $\widehat{DHC}=\widehat{DBO}$ ΔOBD cân tại $O \Rightarrow \widehat{ODB}=\widehat{OBD} \Rightarrow \widehat{OHB}=\widehat{DHC} \Rightarrow \widehat{OHB}=\widehat{OHE}$	0,75
	ΔHEB có HO là phân giác $\Rightarrow \frac{HE}{HB}=\frac{OE}{OB}$	0,25
	Có: $EA^2=EO.EB \Leftrightarrow (R-EO)^2=EO.(EO+R)$ $\Leftrightarrow R^2-2R.EO+EO^2=EO^2+R.EO \Leftrightarrow R^2=3R.EO \Leftrightarrow R=3.EO$ $\Leftrightarrow \frac{OE}{OB}=\frac{1}{3}$. Vậy $\frac{HE}{HB}=\frac{1}{3}$	1,0
5 **2,0 đ**	$1\ge x+\frac{1}{y}\ge 2\sqrt{\frac{x}{y}} \Leftrightarrow \frac{x}{y}\le\frac{1}{4}$	0,25
	$P=\frac{x^2-2xy+2y^2}{xy+y^2}=\frac{\frac{x^2}{y^2}-2\frac{x}{y}+2}{\frac{x}{y}+1}$. Đặt $\frac{x}{y}=t \Rightarrow P=\frac{t^2-2t+2}{t+1}$ với $0<t\le\frac{1}{4}$	0,5
	$P=t-3+\frac{5}{t+1}=(t+1)+\frac{5}{t+1}-4=\frac{16}{5}(t+1)+\frac{5}{t+1}-\frac{11}{5}(t+1)-4$	0,5
	$\frac{16(t+1)}{5}+\frac{5}{t+1}\ge 2\sqrt{\frac{16(t+1)}{5}.\frac{5}{t+1}}=8$, dấu "=" khi $\frac{16}{5}(t+1)=\frac{5}{t+1} \Leftrightarrow t=\frac{1}{4}$	0,5
	$-\frac{11}{5}(t+1)\ge-\frac{11}{4}$, dấu "=" khi $t=\frac{1}{4} \Rightarrow P\ge\frac{5}{4}$, dấu "=" khi $(x;y)=\left(\frac{1}{2};2\right)$ Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{5}{4}$ tại $(x;y)=\left(\frac{1}{2};2\right)$	0,25

<u>Những chú ý khi chấm thi:</u>

1. Hướng dẫn chấm này chỉ trình bày sơ lược một cách giải. Bài làm của học sinh phải chi tiết, lập luận chặt chẽ, tính toán chính xác mới cho điểm tối đa.
2. Các cách giải khác nếu đúng vẫn cho điểm. Tổ chấm trao đổi và thống nhất điểm chi tiết.
3. Có thể chia nhỏ điểm thành phần nhưng không dưới 0,25 điểm và phải thống nhất trong cả tổ chấm. Điểm thống nhất toàn bài là tổng số điểm toàn bài đã chấm, **không làm tròn**.

......................................*Hết*......................................

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH PHÚ YÊN

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH
LỚP 9 THCS, NĂM HỌC 2020 - 2021
Môn thi: TOÁN
Ngày thi: 30/3/2021
Thời gian: 150 phút (*không kể thời gian giao đề*)

Câu 1.(*5,00 điểm*)

a) Chứng minh rằng: $\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}}+\sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}=1$.

b) Biết đa thức $x^4+4x^3+6px^2+4qx+r$ chia hết cho đa thức x^3+3x^2+9x+3. Tính giá trị biểu thức $(p+q)r$.

Câu 2.(*3,50 điểm*) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{2}+\dfrac{5}{2x+y-xy}=5 \\ 2x+y-xy+\dfrac{10}{xy}=4. \end{cases}$$

Câu 3.(*2,50 điểm*) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $2x^2+5y^2=13$.

Câu 4.(*3,00 điểm*) Cho tam giác nhọn *ABC* nội tiếp đường tròn (*O*). Tiếp tuyến tại *B* và *C* cắt nhau ở *D*. Gọi *E*, *F* lần lượt là giao điểm của *DA* với (*O*) và *DA* với *BC*; *H* là giao điểm của *OD* với *BC*.

a) Chứng minh tam giác *OAH* đồng dạng với tam giác *ODA*.

b) Đường thẳng qua *A* song song với *BC* cắt (*O*) tại *K* (khác *A*). Chứng minh rằng *E*, *H*, *K* thẳng hàng.

Câu 5.(*3,00 điểm*) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=x^3+y^3 \text{ với } x\neq 0, y\neq 0, \frac{1}{xy}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{xy}+\frac{1}{y^2}.$$

Câu 6.(*3,00 điểm*) Cho tam giác *ABC* nhọn, có *H* là trực tâm, (*I*) là đường tròn nội tiếp. Gọi *D*, *E*, *F* lần lượt là tiếp điểm của (*I*) với *BC*, *CA*, *AB*. Gọi *K* là hình chiếu vuông góc của *D* trên *EF*.

a) Chứng minh rằng $\widehat{FKB}=\widehat{EKC}$.

b) Gọi *P*, *Q* lần lượt là giao điểm của *HB*, *HC* với *EF*.

Chứng minh đẳng thức: *EK.FP* = *FK .EQ*.

c) Chứng minh rằng *KD* là phân giác của $\widehat{HKI}$.

---------Hết---------

Thí sinh không sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:……………………………………;Số báo danh:……………………......…

Chữ kí giám thị 1:……….………………..;Chữ kí giám thị 2:………..………………………...

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TỈNH PHÚ YÊN ĐỀ CHÍNH THỨC	KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH LỚP 9 THCS, NĂM HỌC 2020 – 2021 Môn thi: TOÁN Ngày thi: 30/3/2021 **Thời gian**: 150 phút (*không kể thời gian giao đề*) -----------

HƯỚNG DẪN CHẤM THI

(*Gồm có 04 trang*)

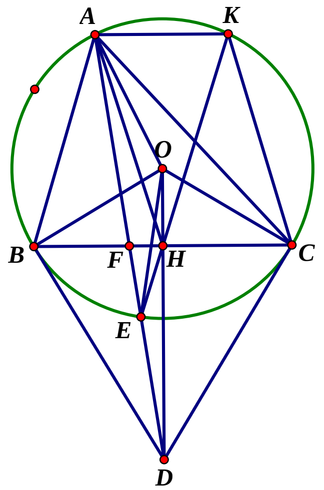
1. Hướng dẫn chung

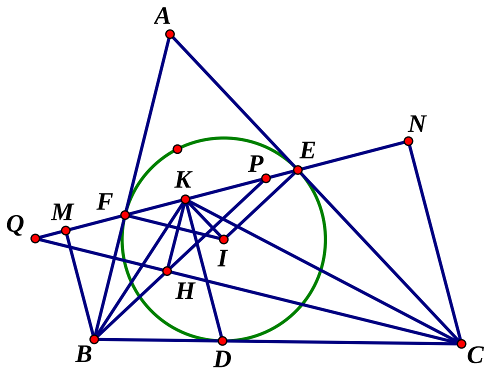
- Nếu thí sinh làm bài không theo cách nêu trong đáp án mà vẫn đúng thì cho đủ điểm từng phần như hướng dẫn quy định.
- Việc chi tiết hóa thang điểm (nếu có) so với thang điểm chấm phải bảo đảm không sai lệch với hướng dẫn chấm và được thống nhất thực hiện trong Hội đồng chấm thi.
- Điểm bài thi không làm tròn số.

2. Đáp án và thang điểm

CÂU	ĐÁP ÁN	ĐIỂM
1		**5,00 đ**
	a) Chứng minh rằng: $A=\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}}+\sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}=1$.	***2,50 đ***
	Ta thấy: $A^3=10-9\left(\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}}+\sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}\right)=10-9A$	1,00 đ
	$\Leftrightarrow (A-1)(A^2+A+10)=0$.	0,50 đ
	Vì $A^2+A+10=\left(A+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{39}{4}>0$ nên suy ra $A-1=0\Leftrightarrow A=1$.	1,00 đ
	b) Biết đa thức $x^4+4x^3+6px^2+4qx+r$ chia hết cho đa thức x^3+3x^2+9x+3. Tính giá trị biểu thức $Q=(p+q)r$.	***2,50 đ***
	Giả sử $x^4+4x^3+6px^2+4qx+r=(x+a)(x^3+3x^2+9x+3)$	0,50 đ
	$=x^4+(a+3)x^3+(3a+9)x^2+(9a+3)x+3a.$	0,50 đ
	Đồng nhất các hệ số cùng bậc hai vế, ta được: $\begin{cases}4=a+3\\6p=3a+9\\4q=9a+3\\r=3a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\p=2\\q=3\\r=3.\end{cases}$	1,00 đ

	Suy ra $(p+q)r=15.$	0,50 đ
2	Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{xy}{2}+\dfrac{5}{2x+y-xy}=5 \\ 2x+y-xy+\dfrac{10}{xy}=4. \end{cases}$	**3,50 đ**
	Điều kiện $xy\neq 0, 2x+y-xy\neq 0$.	0,25 đ
	Đặt $u=xy,\ v=2x+y-xy\,(u,v\neq 0)$, hệ phương trình đã cho trở thành $$\begin{cases} \dfrac{u}{2}+\dfrac{5}{v}=5 \quad (1) \\ v+\dfrac{10}{u}=4\ (2). \end{cases}$$	0,50 đ
	Từ $(2)\Rightarrow v=4-\dfrac{10}{u}$ hay $v=\dfrac{4u-10}{u}$. Thay vào (1) ta được	0,50 đ
	$\dfrac{u}{2}+\dfrac{5u}{4u-10}=5\Rightarrow u^2-10u+25=0\Leftrightarrow (u-5)^2=0\Leftrightarrow u=5\Rightarrow v=2.$	1,00 đ
	Ta được hệ phương trình: $\begin{cases} xy=5 \\ 2x+y-xy=2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} xy=5 \\ 2x+y=7 \end{cases}$	0,50 đ
	$\Leftrightarrow\begin{cases} x(7-2x)=5 \\ y=7-2x \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 2x^2-7x+5=0 \\ y=7-2x \end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=5 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{5}{2} \\ y=2 \end{cases} \end{array}\right.$.	0,50 đ
	Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(1;5),\left(\dfrac{5}{2};2\right)$.	0,25 đ
3	Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $2x^2+5y^2=13$ (*)	**2,50 đ**
	Ta có: (*) $\Leftrightarrow 2(x^2+1)=5(3-y^2)$.	0,50 đ
	Do $(2,5)=1$ nên $(x^2+1)\vdots 5$ và $(3-y^2)\vdots 2$.	0,50 đ
	Đặt $x^2+1=5k, 3-y^2=2l$, ta có: $10k=10l\Rightarrow k=l\,(k,l\in\mathbb{Z})$.	0,50 đ
	Do đó: $\begin{cases} x^2=5k-1\geq 0 \\ y^2=3-2l\geq 0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} k\geq\dfrac{1}{5} \\ l\leq\dfrac{3}{2} \end{cases}\Rightarrow k=l=1.$	0,50 đ
	Vậy $x=\pm 2, y=\pm 1$.	

	Phương trình có các nghiệm nguyên: (-2 ;-1), (-2 ;1), (2 ;-1) và (2 ;1).	0,50 đ
4		**3,00 đ**
	a) Chứng minh $\Delta OAH \backsim \Delta ODA$	***1,00 đ***
	Theo tính chất tiếp tuyến thì $BC \perp OD$. 	0,25 đ
	Áp dụng HTL vào tam giác vuông OCD, với CH là đường cao ta có: $OC^2 = OH.OD \Leftrightarrow OA^2 = OH.OD$ $\Rightarrow \dfrac{OA}{OH} = \dfrac{OD}{OA}$	0,50 đ
	$\Rightarrow \Delta OAH \backsim \Delta ODA$.	0,25 đ
	b) Chứng minh rằng E, H, K thẳng hàng	***2,00 đ***
	Từ câu a) ta có $\Delta OAH \backsim \Delta ODA$ $\Rightarrow \widehat{OHA} = \widehat{OAD} = \widehat{OEA}$ (1) $\Rightarrow$ $OAEH$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{EHD} = \widehat{EAO} = \widehat{OAD}$ (2). Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{EHD} = \widehat{OHA}$ (3).	1,00 đ
	Dễ thấy $\Delta ABH = \Delta KCH$ (c.g.c) $\Rightarrow$ $HA = HK$ hay AKH cân tại H (4). Vì $OH \perp BC$, $AK // BC$ $\Rightarrow OH \perp AK$ (5). Từ (4) và (5) suy ra OH là phân giác $\widehat{AHK}$ hay $\widehat{OHA} = \widehat{OHK}$ (6).	0,50 đ
	Kết hợp (3) và (6) suy ra $\widehat{OHK} = \widehat{EHD}$; Suy ra $\widehat{EHO} + \widehat{OHK} = \widehat{EHO} + \widehat{EHD} = 180^0$, hay 3 điểm E, H, K thẳng hàng.	0,50 đ
5	Tìm GTLN của biểu thức: $P = x^3 + y^3$ với $x \neq 0, y \neq 0, \dfrac{1}{xy}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{xy} + \dfrac{1}{y^2}$.	**3,00 đ**
	Giả thiết: $\dfrac{1}{xy}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{xy} + \dfrac{1}{y^2} \Leftrightarrow x + y = x^2 - xy + y^2$ (do $x \neq 0, y \neq 0$).	0,50 đ
	Do đó: $P = x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) = (x+y)^2$.	0,50 đ
	Để ý rằng $x + y = x^2 - xy + y^2 = (x+y)^2 - 3xy$ và $xy \leq \dfrac{(x+y)^2}{4}$	0,50 đ
	Suy ra $x + y \geq (x+y)^2 - \dfrac{3}{4}(x+y)^2 \Leftrightarrow (x+y)\left[(x+y) - 4\right] \leq 0$	0,50 đ
	Hay $0 \leq x + y \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq (x+y)^2 \leq 16$.	0,50 đ
	Vậy Max P = 16. Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y = 2$.	0,50 đ

6		**3,00 đ**
	a) Chứng minh $\widehat{FKB}=\widehat{EKC}$	***1,00 đ***
	Gọi M, N theo thứ tự là hình chiếu của B, C lên EF. Khi đó: $\widehat{BFM}=\widehat{AFE}=\widehat{AEF}=\widehat{CEN}$ $\Rightarrow \Delta BFM \backsim \Delta CEN$ $\Rightarrow \dfrac{BM}{CN}=\dfrac{BF}{CE}=\dfrac{BD}{CD}$. 	0,50 đ
	Mặt khác, $BM//DK//CN$ nên theo định lí Thales ta có: $\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{MK}{NK}\Rightarrow \dfrac{BM}{CN}=\dfrac{MK}{NK}\Rightarrow \Delta BMK \backsim \Delta CNK$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{FKB}=\widehat{EKC}$.	0,50 đ
	b) Chứng minh đẳng thức: $EK.FP = FK.EQ$.	***1,00 đ***
	Dễ chứng minh được $\widehat{BFP}=\widehat{CEQ}, \widehat{FBP}=\widehat{ECQ}$ (cùng phụ $\widehat{BAC}$). Do đó $\Delta BFP \backsim \Delta CEQ$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{FB}{EC}=\dfrac{FP}{EQ}(1)$.	0,50 đ
	Theo a) $\widehat{FKB}=\widehat{EKC}$. Kết hợp với $\widehat{BFK}=\widehat{CEK} \Rightarrow \Delta BFK \backsim \Delta CEK$ (g.g); suy ra $\dfrac{FB}{EC}=\dfrac{FK}{EK}(2)$.	0,25 đ
	Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{FP}{EQ}=\dfrac{FK}{EK}\Leftrightarrow EK.FP=FK.EQ$ (đpcm).	0,25 đ
	c) Chứng minh KD là phân giác của $\widehat{HKI}$	***1,00 đ***
	Theo b): $\dfrac{FP}{EQ}=\dfrac{FK}{EK}=\dfrac{FP-FK}{EQ-EK}=\dfrac{KP}{KQ}\Rightarrow \dfrac{EK}{QK}=\dfrac{FK}{PK}=\dfrac{EK+FK}{QK+PK}=\dfrac{EF}{QP}(3)$.	0,25 đ
	Hơn nữa, do $IE//HP$, $IF//HQ$, $IE=IF$ nên $\widehat{IEF}=\widehat{HPQ}=\widehat{IFE}=\widehat{HQP}$. Do đó $\Delta IEF \backsim \Delta HQP$ (g.g).	0,25 đ
	Ta có $\Delta IEF \backsim \Delta HQP \Rightarrow \dfrac{IE}{HQ}=\dfrac{EF}{QP}(4)$.	0,25 đ
	Từ (3) và (4) ta có $\dfrac{EK}{QK}=\dfrac{IE}{HQ}\Rightarrow \Delta IKE \backsim \Delta HKQ$ $(c.g.c) \Rightarrow \widehat{IKE}=\widehat{HKQ}$ Suy ra $\widehat{IKD}=90^0-\widehat{IKE}=90^0-\widehat{HKQ}=\widehat{HKD}$, hay KD là phân giác $\widehat{IKH}$.	0,25 đ

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
BÌNH PHƯỚC

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi có 01 trang)

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH
LỚP 9 NĂM HỌC 2020-2021

Môn: **Toán**
Thời gian: 150 phút *(không kể thời gian giao đề)*
Ngày thi: 14/03/2021

Câu 1. (5,0 điểm).

1. Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}}{x+1+\sqrt{x}}+\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}\right):\dfrac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}$

a. Rút gọn *A*. b. Chứng minh $A<\dfrac{2}{3}$.

2. Cho $\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)\left(3y+\sqrt{9y^2+1}\right)=1$. Tính giá trị biểu thức: $8x^3+27y^3+2021$

Câu 2. (5,0 điểm).

1. Giải phương trình: $\sqrt{2x^2+5x+12}+\sqrt{2x^2+3x+2}=x+5$

2. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}3x^2+y^2+4xy=8\\(x+y)\left(x^2+xy+2\right)=8\end{cases}$

3. Cho Parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=mx+1$ (m là tham số thực). Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn $AB=\sqrt{10}$.

Câu 3. (5,0 điểm). Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Gọi C là một điểm nằm trên nửa đường tròn (O) (C khác A, C khác B). Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên AB, D là điểm đối xứng với A qua C, I là trung điểm của CH, J là trung điểm của DH.

a. Chứng minh $\widehat{CIJ}=\widehat{CBH}$
b. Chứng minh ΔCJH đồng dạng với ΔHIB
c. Gọi E là giao điểm của HD và BI. Chứng minh HE.HD = HC^2
d. Xác định vị trí của điểm C trên nửa đường tròn (O) để AH + CH đạt giá trị lớn nhất.

Câu 4. (2,0 điểm). Cho tam giác ABC vuông cân tại A, trung tuyến AD. Điểm M di động trên đoạn AD. Gọi N và P lần lượt là hình chiếu của điểm M trên AB và AC. Vẽ NH $\perp$ PD tại H. Xác định vị trí của điểm M để ΔAHB có diện tích lớn nhất.

Câu 5. (3,0 điểm).

1. Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $xy+yz+zx=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $S=\dfrac{1}{4x^2-yz+2}+\dfrac{1}{4y^2-zx+2}+\dfrac{1}{4z^2-xy+2}$

2. Tìm tất cả các nghiệm nguyên x, y của phương trình: $x^2=y^2\left(x+y^4+2y^2\right)$.

……………HẾT……………

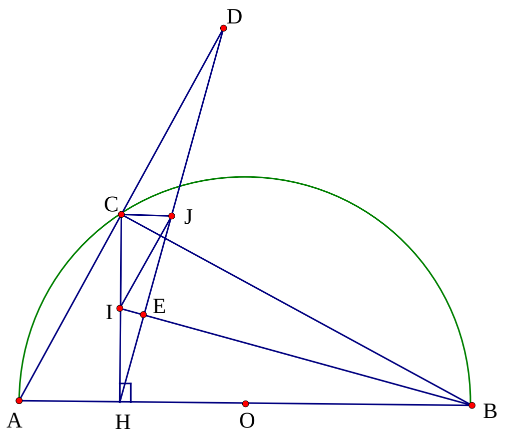
• *Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.*

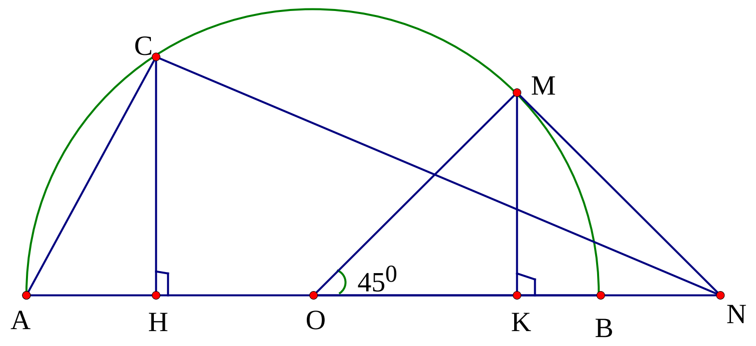
HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ THANG ĐIỂM *(Gồm có 08 trang)*

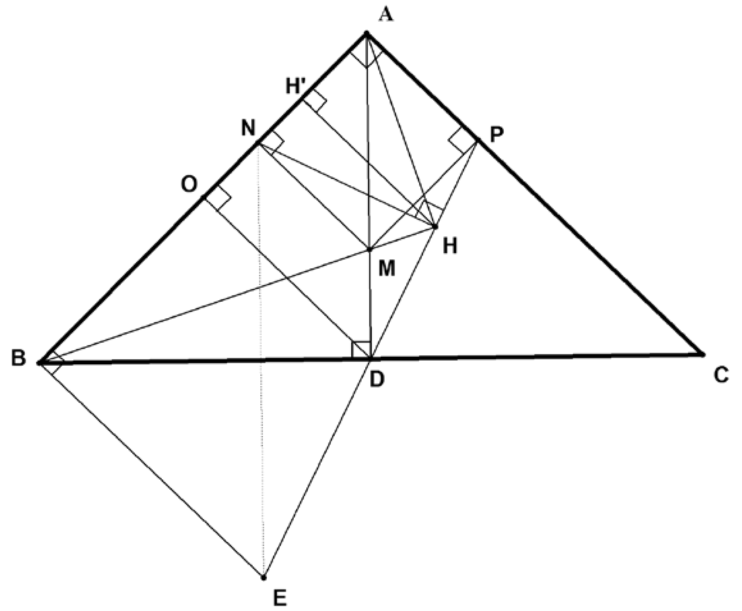
Câu	NỘI DUNG	Điểm
Câu 1 **(5,0 điểm)**	1. Cho biểu thức $A=\left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}}{x+1+\sqrt{x}}+\frac{1}{1-\sqrt{x}}\right):\frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}$ a. Rút gọn *A*. b. Chứng minh $A<\frac{2}{3}$.	**3.0**
	a. Rút gọn A.	1.5
	Điều kiện: với $x>0$; $x\neq 1$ $A=\left[\frac{x+2}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}+\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}-\frac{1}{\sqrt{x}-1}\right]\cdot\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ $A=\frac{x+2+\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)-\left(x+\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}\cdot\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=\frac{x-2\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}\cdot\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ $A=\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}\cdot\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=\frac{2\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$	0.5 0.5 0.5
	b. Chứng minh $A<\frac{2}{3}$.	1.5
	Ta có : $A-\frac{2}{3}=\frac{2\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}-\frac{2}{3}=\frac{6\sqrt{x}-2\left(x+\sqrt{x}+1\right)}{3\left(x+\sqrt{x}+1\right)}=\frac{-2x+4\sqrt{x}-2}{3\left(x+\sqrt{x}+1\right)}=\frac{-2\left(x-2\sqrt{x}+1\right)}{3\left(x+\sqrt{x}+1\right)}$ $A-\frac{2}{3}=\frac{-2\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{3\left(x+\sqrt{x}+1\right)}$ Vì $-2\left(\sqrt{x}-1\right)^2\leq 0$ và $3\left(x+\sqrt{x}+1\right)=3\left[\left(\sqrt{x}+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{4}\right]>0$ với $x>0$; $x\neq 1$ $\Rightarrow A-\frac{2}{3}=\frac{-2\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{3\left(x+\sqrt{x}+1\right)}<0\ \Rightarrow A<\frac{2}{3}$	0.5 0.5 0.5
	2. Cho $\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)\left(3y+\sqrt{9y^2+1}\right)=1.$ Tính giá trị biểu thức: $8x^3+27y^3+2021$	2.0
	Ta có: $\left(4x^2-4x^2-1\right)\left(3y+\sqrt{9y^2+1}\right)=2x-\sqrt{4x^2+1}\Rightarrow -3y-\sqrt{9y^2+1}=2x-\sqrt{4x^2+1}$ $\Leftrightarrow 2x+3y=\sqrt{4x^2+1}-\sqrt{9y^2+1}$ (1) Tương tự ta có:	0.5 0.5

	$\left(9y^2-9y^2-1\right)\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)=3y-\sqrt{9y^2+1} \Leftrightarrow -2x-\sqrt{4x^2+1}=3y-\sqrt{9y^2+1}$ $\Leftrightarrow 2x+3y=\sqrt{9y^2+1}-\sqrt{4x^2+1} \qquad (2)$ Cộng vế với vế của (1) và (2) ta được: $2\left(2x+3y\right)=0 \Leftrightarrow 2x+3y=0$ Mặt khác $8x^3+27y^3+2021=\left(2x+3y\right)\left(4x^2-6xy+9y^2\right)+2021=2021(Vi....2x+3y=0)$	0.5 0.5
Câu 2: **(5,0 điểm)**	1. Giải phương trình: $\sqrt{2x^2+5x+12}+\sqrt{2x^2+3x+2}=x+5$ 2. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}3x^2+y^2+4xy=8\\ \left(x+y\right)\left(x^2+xy+2\right)=8\end{cases}$ 3. Cho Parabol $\left(P\right): y=x^2$ và đường thẳng $\left(d\right): y=mx+1$ (m là tham số thực). Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn $AB=\sqrt{10}$.	**5.0**
	1. Giải phương trình: $\sqrt{2x^2+5x+12}+\sqrt{2x^2+3x+2}=x+5$	1.5
	Đặt $u=\sqrt{2x^2+5x+12}, v=\sqrt{2x^2+3x+2}\ \ (u>0, v>0)$ $\Rightarrow u^2=2x^2+5x+12, v^2=2x^2+3x+2 \Rightarrow u^2-v^2=2x+10=2(x+5)\ \ (1)$ Từ (1) $\Rightarrow 2(u+v)=u^2-v^2 \Leftrightarrow (u+v)(u-v-2)=0\ \ (2)$ Vì $u>0, v>0$, từ (2) suy ra: $u-v-2=0$. Vì vậy $\sqrt{2x^2+5x+12}=\sqrt{2x^2+3x+2}+2\ (3)$ Bình phương 2 vế và thu gọn ta được phương trình: $2\sqrt{2x^2+3x+2}=x+3$ $\Leftrightarrow \begin{cases}x+3\ge 0\\ 2\sqrt{2x^2+3x+2}=x+3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -3\\ 7x^2+6x-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -3\\ (7x^2-7)+(6x+6)=0\end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -3\\ (x+1)(7x-1)=0\end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -3\\ x=-1, x=\dfrac{1}{7}\end{cases} \Leftrightarrow x=-1, x=\dfrac{1}{7}\left(tm\right)$ Vậy phương trình có hai nghiệm x = -1, x= $\dfrac{1}{7}$	0.5 0.5 0.5

	2. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}3x^2+y^2+4xy=8\\(x+y)(x^2+xy+2)=8\end{cases}$	1.5
	$\begin{cases}3x^2+y^2+4xy=8\\(x+y)(x^2+xy+2)=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+y)(3x+y)=8\\(x+y)(x^2+xy+2)=8\end{cases}$ $\Rightarrow x^2+xy+2=3x+y\Leftrightarrow(x-1)(x+y-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2-y\end{array}\right.$ $x=1\Leftrightarrow 3+y^2+4y=8\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=1\\y=-5\end{array}\right.$ $x=2-y\Leftrightarrow(2-y+y)[3(2-y)+y]=8\Leftrightarrow 2(6-2y)=8\Leftrightarrow y=1\Rightarrow x=1$ Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(1;1)$ và $(1;-5)$	0.5 0.5 0.5
	3. Cho Parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=mx+1$ (m là tham số thực). Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn $AB=\sqrt{10}$.	**2.0**
	Hoành độ giao điểm của (P) và (d) là $x^2=mx+1\Leftrightarrow x^2-mx-1=0$ Ta có $\Delta=m^2+4$ (vì $m^2+4>0$) nên đồ thị hàm số (P) và (d) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt. Theo hệ thức Viét ta có $\begin{cases}x_1+x_2=m\\x_1\cdot x_2=-1\end{cases}$ Gọi A (x_1; y_1) và B (x_2; y_2) là giao điểm của (P) và (d) ta có: $AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{10}$ $\Rightarrow(x_1-x_2)^2+(x_1^2-x_2^2)^2=10$ $\Leftrightarrow(x_1+x_2)^2-4x_1x_2+(x_1+x_2)^2\cdot(x_1-x_2)^2=10$ $\Leftrightarrow(x_1+x_2)^2-4x_1x_2+(x_1+x_2)^2\cdot\left[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right]=10$ $\Rightarrow m^2+4+m^2\cdot(m^2+4)=10$ $\Leftrightarrow m^4+5m^2-6=0$ $\Leftrightarrow m^4-m^2+6m^2-6=0$ $\Leftrightarrow(m^2-1)\cdot(m^2+6)=0$ $\Leftrightarrow m^2-1=0$ $\Leftrightarrow m=\pm1$	0.5 0.5 0.5 0.5
Câu 3. (5,0 điểm).	Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Gọi C là một điểm nằm trên nửa đường tròn (O) (C khác A, C khác B). Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên AB, D là điểm đối xứng với A qua C, I là trung điểm của CH, J là trung điểm của DH.	**5.0**

	a. Chứng minh $\widehat{CIJ} = \widehat{CBH}$ b. Chứng minh ΔCJH đồng dạng với ΔHIB c. Gọi E là giao điểm của HD và BI. Chứng minh HE.HD = HC^2 d. Xác định vị trí của điểm C trên nửa đường tròn (O) để AH + CH đạt giá trị lớn nhất.	
	a. Chứng minh $\widehat{CIJ} = \widehat{CBH}$	1.5
		
	+ Vì ΔABC nội tiếp đường tròn đường kính AB nên $AC \perp BC$ Suy ra $BC \perp CD$ (1) + Lập luận để chỉ ra IJ // CD (2) + Từ (1) và (2) suy ra $IJ \perp BC$ + Suy ra $\widehat{CIJ} = \widehat{CBH}$ (cùng phụ với $\widehat{HCB}$) (3)	0.5 0.5 0.5
	b. Chứng minh ΔCJH đồng dạng với ΔHIB	1.5
	+ Trong Δ vuông CBH ta có: $\tan\widehat{CBH} = \frac{CH}{BH}$ (4) + Lập luận chứng minh được CJ // AB + Mà CH $\perp$ AB (gt) + Suy ra CJ $\perp$ CH + Trong tam giác vuông CIJ ta có $\tan\widehat{CIJ} = \frac{CJ}{CI} = \frac{CJ}{HI}(CI = HI)$ (5) + Từ (3), (4), (5) $\Rightarrow \frac{CH}{HB} = \frac{CJ}{HI}$ + Xét ΔCJH và ΔHIB có $\widehat{HCJ} = \widehat{BHI} = 90^0$ và $\frac{CH}{HB} = \frac{CJ}{HI}$ (cmt) + Nên ΔCJH đồng dạng với ΔHIB	0.5 0.5 0.5
	c. Gọi E là giao điểm của HD và BI. Chứng minh HE.HD = HC^2	1.0
	+ Lập luận để chứng minh được $\widehat{HEI} = 90^0$ + Chứng minh được ΔHEI đồng dạng với ΔHCJ + Suy ra $\frac{HE}{HC} = \frac{HI}{HJ}$ + Suy ra HE.HJ = HI.HC	0.5

<table>
<tr><td></td><td>+ Mà $HJ = \frac{1}{2}HD;\ HI = \frac{1}{2}HC$
+ Suy ra HE.HD = HC^2</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td></td><td>d. Xác định vị trí của điểm C trên nửa đường tròn (O) để AH + CH đạt giá trị lớn nhất.</td><td>1.0</td></tr>
<tr><td></td><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>+ Lấy điểm M trên nửa đường tròn (O) sao cho $\widehat{BOM} = 45^0$
+ Tiếp tuyến của nửa đường tròn (O) tại M cắt AB tại N. Ta có M và N cố định.
+ Kẻ MK $\perp$ AB tại K
+ Chứng minh được ΔMON vuông cân tại M và KM = KN
Suy ra $\widehat{ANC} = 45^0$
Xét C $\equiv$ M
Ta có C $\equiv$M nên H $\equiv$ K
Do đó AH + CH = AK + KM = AK + KN = AN (không đổi)
+ Xét C khác M.
Tia NC nằm giữa hai tia NA và NM
Do đó $\widehat{ANC} < \widehat{ANM} = 45^0$
+ ΔHNC có $\widehat{NHC} = 90^0$
nên $\widehat{HNC} + \widehat{HCN} = 90^0$
Mà $\widehat{HNC} < 45^0$ nên $\widehat{HCN} > 45^0$
Suy ra $\widehat{HNC} < \widehat{HCN}$
Suy ra HC < HN
+ Do đó AH + CH < AH + HN = AN
+ Vậy Khi C ở trên nửa đường tròn (O) sao cho $\widehat{BOC} = 45^0$
thì AH + CH đạt giá trị lớn nhất.</td><td>0.25
0.25
0.25
0.25</td></tr>
<tr><td>Câu 4. (2,0 điểm).</td><td>Cho tam giác ABC vuông cân tại A, trung tuyến AD. Điểm M di động trên đoạn AD. Gọi N và P lần lượt là hình chiếu của điểm M trên AB và AC. Vẽ NH $\perp$ PD tại H. Xác định vị trí của điểm M để ΔAHB có diện tích lớn nhất.</td><td>2.0</td></tr>
</table>

		
	ΔABC vuông cân tại A $\Rightarrow$ AD là phân giác góc A và AD $\perp$ BC $\Rightarrow$ D $\in$ (O; AB/2) Ta có ANMP là hình vuông (hình chữ nhật có AM là phân giác) $\Rightarrow$ tứ giác ANMP nội tiếp đường tròn đường kính NP mà $\widehat{NHP} = 90^0 \Rightarrow$ H thuộc đường tròn đường kính NP $\Rightarrow \widehat{AHN} = \widehat{AMN} = 45^0$ (1) Kẻ Bx $\perp$ AB cắt đường thẳng PD tại E $\Rightarrow$ tứ giác BNHE nội tiếp đường tròn đường kính NE Mặt khác ΔBED = ΔCDP (g.c.g) $\Rightarrow$ BE = PC mà PC = BN (AN=AP)$\Rightarrow$ BN = BE $\Rightarrow \Delta$BNE vuông cân tại B $\Rightarrow \widehat{NEB} = 45^0$ mà $\widehat{NHB} = \widehat{NEB}$ (cùng chắn cung BN) $\Rightarrow \widehat{NHB} = 45^0$ (2) Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AHB} = 90^0$ $\Rightarrow$ H $\in$ (O; AB/2) gọi H' là hình chiếu của H trên AB $\Rightarrow S_{AHB} = \dfrac{HH'.AB}{2} \Rightarrow S_{AHB}$ lớn nhất $\Leftrightarrow$ HH' lớn nhất mà HH' $\le$ OD = AB/2 (do H; D cùng thuộc đường tròn đường kính AB và OD $\perp$ AB)	0.5 0.5 0.5

	Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow H \equiv D \Leftrightarrow M \equiv D$	0.5
Câu 5. (3,0 điểm).	1. Cho x, y, z dương và thỏa mãn $xy+yz+zx=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $S=\frac{1}{4x^2-yz+2}+\frac{1}{4y^2-zx+2}+\frac{1}{4z^2-xy+2}$ 2.Tìm tất cả các nghiệm nguyên x,y của phương trình: $x^2=y^2\left(x+y^4+2y^2\right)$.	**3.0**
	1. Cho x, y, z dương và thỏa mãn $xy+yz+zx=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $S=\frac{1}{4x^2-yz+2}+\frac{1}{4y^2-zx+2}+\frac{1}{4z^2-xy+2}$	1.5
	Ta có : $\frac{1}{4x^2-yz+2}=\frac{1}{4x^2-yz+2(xy+yz+zx)}=\frac{1}{4x^2+2xy+yz+2zx}=\frac{1}{(2x+y)(2x+z)}$ Tương tự, ta có : $S=\frac{1}{(2x+y)(2x+z)}+\frac{1}{(2y+z)(2y+x)}+\frac{1}{(2z+x)(2z+y)}$ $\Leftrightarrow S=\frac{yz}{(2xz+yz)(2xy+yz)}+\frac{xz}{(2xy+xz)(2yz+xz)}+\frac{xy}{(2yz+xy)(2xz+xy)}$ Với mọi a,b ta có $(a-b)^2\ge 0\Rightarrow (a+b)^2\ge 4ab\Rightarrow ab\le\frac{(a+b)^2}{4}$. Áp dụng bất đẳng thức trên ta được: $S\ge\frac{yz}{\frac{(2xy+2yz+2zx)^2}{4}}+\frac{xz}{\frac{(2xy+2yz+2zx)^2}{4}}+\frac{xy}{\frac{(2xy+2yz+2zx)^2}{4}}$ $\Rightarrow S\ge\frac{xy+yz+zx}{\frac{(2xy+2yz+2zx)^2}{4}}=\frac{1}{xy+yz+zx}=1$. Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của S bằng 1.	0.5 0.5 0.5
	2. Tìm tất cả các nghiệm nguyên x,y của phương trình: $x^2=y^2\left(x+y^4+2y^2\right)$.	1.5
	Ta có $x^2=y^2\left(x+y^4+2y^2\right)\Leftrightarrow x^2-y^2.x-y^4\left(y^2+2\right)=0$ (1) Coi (1) là PT bậc hai ẩn x, ta có $\Delta=y^4\left(4y^2+9\right)\Rightarrow\sqrt{\Delta}=y^2\sqrt{4y^2+9}$. (1) có nghiệm nguyên nên $4y^2+9$ là số chính phương, đặt $4y^2+9=k^2$ $(k\in\mathbb{N})$. Khi đó $(k-2y)(k+2y)=9$.	0.5 0.5

	Xét các trường hợp và chú ý $k \in \mathbb{N}$ ta được các bộ $(k, y) \in \{(5;2);(5;-2);(3;0)\}$. Với $y = \pm 2$ ta được: $x^2 - 4x - 96 = 0 \Leftrightarrow x = 12; x = -8$. Với $y = 0$ ta được: $x = 0$. Vậy các nghiệm cần tìm là $(x, y) \in \{(0;0);(12;2);(12;-2);(-8;2);(-8;-2)\}$.	0.5

Học sinh làm cách khác đúng cho điểm tối đa

---------- Hết ------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
BÌNH PHƯỚC

ĐỀ DỰ BỊ

(Đề thi có 01 trang)

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH
LỚP 9 NĂM HỌC 2020-2021

Môn: **Toán**
Thời gian: 150 phút *(không kể thời gian giao đề)*
Ngày thi: 14/03/2021

Câu 1. (5.0 điểm).

1. Cho biểu thức: $M=\left(\dfrac{x+2\sqrt{x}+4}{x\sqrt{x}-8}+\dfrac{x+2\sqrt{x}+1}{x-1}\right):\left(\dfrac{3\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{2\sqrt{x}+10}{x+6\sqrt{x}+5}\right)$

a. Rút gọn M

b. Tìm giá trị của x để M >1

2. Cho x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=2.$

Tính giá trị của biểu thức $Q=x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}.$

Câu 2. (5.0 điểm).

1. Giải phương trình: $x^2+2x+7=3\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(x+3\right)}$.

2. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}4x^2+4x-y^2=-1\\4x^2-3xy+y^2=1\end{cases}$

3. Trong cùng một hệ toạ độ, cho đường thẳng (d): y = x – 2 và parabol (P): y = -x^2. Gọi A và B là giao điểm của d và (P).

a. Tính độ dài AB.

b. Tìm m để đường thẳng (d’): y = - x + m cắt (P) tại hai điểm C và D sao cho CD = AB.

Câu 3. (5.0 điểm). Cho đường tròn (O) đường kính AB . Trên cùng mặt phẳng bờ AB vẽ các tiếp tuyến Ax, By của (O). Trên (O) lấy điểm C (CA < CB) và trên đoạn thẳng OA lấy điểm D (D khác O, A). Đường thẳng vuông góc với CD tại C cắt Ax, By lần lượt tại E, F. AC cắt DE tại G, BC cắt DF tại H, OC cắt GH tại I .

a. Chứng minh hai tam giác AGE, FHG đồng dạng và I là trung điểm của GH

b. Gọi J, K lần lượt là trung điểm của DE, DF Chứng minh I, J, K thẳng hàng

c. Gọi M là giao điểm của JO và DK. Chứng minh tam giác JOK vuông và ba đường thẳng DE, IF, KO đồng quy.

Câu 4. (2.0 điểm). Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Các điểm D, E theo thứ tự di chuyển trên AB, AC sao cho BD = AE. Xác định vị trí điểm D, E sao cho tứ giác BDEC có diện tích nhỏ nhất

Câu 5. (3.0 điểm).

1. Các số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x+y+z=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$F=\frac{x^4}{\left(x^2+y^2\right)\left(x+y\right)}+\frac{y^4}{\left(y^2+z^2\right)\left(y+z\right)}+\frac{z^4}{\left(z^2+x^2\right)\left(z+x\right)}.$$

2. Tìm tất cả các nghiệm nguyên x, y của phương trình: $2x^2+y^2+xy=2\left(x+y\right)$

……..………HẾT……………

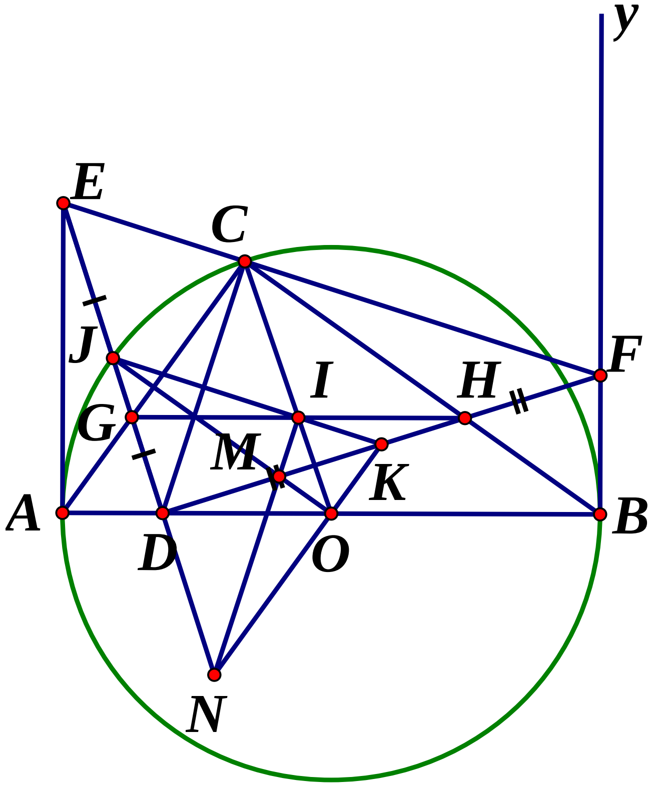
• *Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.*

HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ THANG ĐIỂM *(Gồm có 07 trang)*

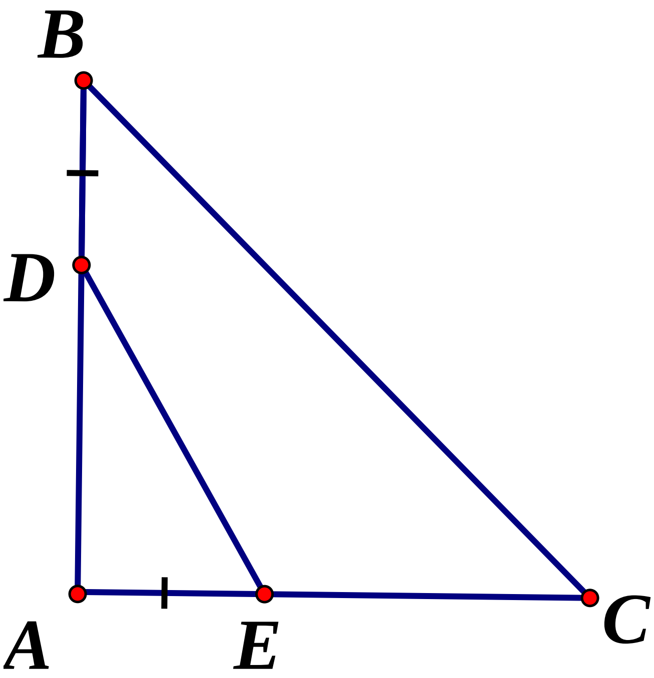
Câu	NỘI DUNG	Điểm
Câu 1. **(5.0 điểm)**	1. Cho biểu thức $M=\left(\dfrac{x+2\sqrt{x}+4}{x\sqrt{x}-8}+\dfrac{x+2\sqrt{x}+1}{x-1}\right):\left(\dfrac{3\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{2\sqrt{x}+10}{x+6\sqrt{x}+5}\right)$ a. Rút gọn M b. Tìm giá trị của x để M >1 2. Cho x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=2.$ Tính giá trị của biểu thức: $Q=x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}.$	**3.0**
	1. a. Rút gọn M. Điều kiện với $x\ge 0; x\ne 1,3,4$	1.5
	$M=\left(\dfrac{x+2\sqrt{x}+4}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(x+2\sqrt{x}+4\right)}+\dfrac{(\sqrt{x}+1)^2}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}\right):\left(\dfrac{3\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{2\left(\sqrt{x}+5\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+5\right)}\right)$ $=\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right):\left(\dfrac{3\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{2}{\sqrt{x}+1}\right)$ $=\dfrac{\sqrt{x}-1+\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}:\dfrac{(3\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+1)+2(\sqrt{x}-2)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$ $=\dfrac{\sqrt{x}-1+x-2\sqrt{x}+\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-11\right)}:\dfrac{3x+3\sqrt{x}-5\sqrt{x}-5+2\sqrt{x}-4}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$ $=\dfrac{x-3}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-11\right)}:\dfrac{3x-9}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\dfrac{x-3}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}\dfrac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{3(x-3)}=\dfrac{\sqrt{x}+1}{3\left(\sqrt{x}-1\right)}$ Vậy M=$\dfrac{\sqrt{x}+1}{3\left(\sqrt{x}-1\right)}$ với $x\ge 0; x\ne 1,3,4$	0.5 0.5 0.5
	b. Tìm giá trị của x để M >1	1.5

	M>1 $\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}+1}{3\left(\sqrt{x}-1\right)}>1 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}+1}{3\left(\sqrt{x}-1\right)}-1>0 \Leftrightarrow \dfrac{4-2\sqrt{x}}{3\left(\sqrt{x}-1\right)}>0 \Leftrightarrow \dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}>0$ Ta có $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2-\sqrt{x}>0\\ \sqrt{x}-1>0\end{cases}\\ \begin{cases}2-\sqrt{x}<0\\ \sqrt{x}-1<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow 1<\sqrt{x}<2 \Leftrightarrow 1<x<4$. Vậy M>1 khi 1<x<4 và $x\neq 3$	0.5 0.5 0.5
	2. Cho x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện: $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=2$. Tính giá trị của biểu thức $Q=x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}$.	2.0
	Ta có: $2=xy+\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}+x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}=xy+\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}+Q$ $\Rightarrow \left(2-Q\right)^2=\left[xy+\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}\right]^2$ $\Rightarrow 4-4Q+Q^2=2x^2y^2+x^2+y^2+1+2xy\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}$. Ta lại có $Q^2=x^2(y^2+1)+y^2(x^2+1)+2xy\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}$ $\Rightarrow Q^2=2x^2y^2+x^2+y^2+2xy\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}$. Do đó $4-4Q=1 \Rightarrow Q=\dfrac{3}{4}$.	
Câu 2. **(5.0 điểm)**	1. Giải phương trình : $x^2+2x+7=3\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(x+3\right)}$. 2. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}4x^2+4x-y^2=-1\\ 4x^2-3xy+y^2=1\end{cases}$ 3. Trong cùng một hệ toạ độ, cho đường thẳng (d): y = x – 2 và parabol (P): y = - x^2. Gọi A và B là giao điểm của d và (P). a. Tính độ dài AB. b. Tìm m để đường thẳng (d’): y = - x +m cắt (P) tại hai điểm C và D sao cho CD = AB.	**5.0**
	1. Giải phương trình : $x^2+2x+7=3\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(x+3\right)}$.	1.5
	$x^2+2x+7=3\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(x+3\right)}$ (ĐK: $x\geq -3$)	0.5

	Ta có: $x^2+2x+7=\left(x^2+1\right)+2\left(x+3\right)$ Đặt $a=\sqrt{x^2+1}\ \left(a>0\right)$; $b=\sqrt{x+3}\ \left(b\geq 0\right)$, ta có phương trình: $a^2+2b^2=3ab\Leftrightarrow(a-b)(a-2b)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b\\a=2b\end{array}\right.$ $a=b\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}=\sqrt{x+3}\Leftrightarrow x^2+1=x+3\Leftrightarrow x^2-x-2=0$ Giải phương trình ta được: $x_1=-1$ (nhận); $x_2=2$ (nhận) $a=2b\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}=2\sqrt{x+3}\Leftrightarrow x^2+1=4(x+3)\Leftrightarrow x^2-4x-11=0$ Giải phương trình ta được: $x_3=2+\sqrt{15}$ (nhận); $x_4=2-\sqrt{15}$ (nhận) Vậy tập nghiệm của phương trình là: $\left\{2;-1;2-\sqrt{15};2+\sqrt{15}\right\}$	0.5 0.5
	2. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}4x^2+4x-y^2=-1\\4x^2-3xy+y^2=1\end{cases}$	1.5
	Giải hệ phương trình: $\begin{cases}4x^2+4x-y^2=-1 & (1)\\4x^2-3xy+y^2=1 & (2)\end{cases}$ Ta có: $(1)\Leftrightarrow\left(2x+1\right)^2-y^2=0\Leftrightarrow\left(2x+1+y\right)\left(2x+1-y\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=-2x-1\\y=2x+1\end{array}\right.$ TH1: $y=-2x-1$ thay vào (2) ta được: $14x^2+7x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\Rightarrow y=-1\\x=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow y=0\end{array}\right.$ TH2: $y=2x+1$ thay vào (2) ta được: $2x^2+x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\Rightarrow y=1\\x=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow y=0\end{array}\right.$ Vậy hệ phương trình có ba nghiệm: $\left(0;1\right);\left(0;1\right);\left(\dfrac{-1}{2};0\right)$	0.5 0.5 0.5
	3. Trong cùng một hệ toạ độ, cho đường thẳng (d): y = x – 2 và parabol (P): $y=-x^2$. Gọi A và B là giao điểm của (d) và (P). a. Tính độ dài AB. b. Tìm m để đường thẳng (d’): y = - x + m cắt (P) tại hai điểm C và D sao cho CD = AB.	**2.0**
	a. Hoành độ giao điểm là nghiệm phương trình $x^2+x-2=0$ => x=1 hoặc x=2 Vậy A(1,-1) và B(-2;-4) hoặc A(-2;-4) và B(1;-1)	0.5

	$AB=\sqrt{\left(x_1-x_2\right)^2+\left(y_1-y_2\right)^2}=\sqrt{18}$ b. Để (d’) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt thì phương trình $x^2-x+m=0$ (1) có hai nghiệm phân biệt <=> $\Delta=1-4m>0$ <=> $1-4m>0$ <=> m < $\frac{1}{4}$ Ta có khoảng cách $AB^2=18$. Để CD = AB <=> $(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=18$ <=>$(x_1-x_2)^2=9$ <=> $(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=9$ <=>1-4m-9=0=> m=-2(TM) Vậy C(-1,-3) và D(2;0) hoặc D(-1;-3) hoặc C(2;0)	0.5 0.5 0.5
Câu 3. (5.0 điểm).	Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên cùng mặt phẳng bờ AB, vẽ các tiếp tuyến Ax, By của (O). Trên (O), lấy điểm $C\left(CA<CB\right)$ và trên đoạn thẳng OA lấy điểm D (D khác O, A). Đường thẳng vuông góc với CD tại C cắt Ax, By lần lượt tại E, F. AC cắt DE tại G, BC cắt DF tại H, OC cắt GH tại I. a. Chứng minh hai tam giác AGE, FHC đồng dạng và I là trung điểm của GH b. Gọi J, K lần lượt là trung điểm của DE, DF. Chứng minh I, J, K thẳng hàng c. Gọi M là giao điểm của JO và DK. Chứng minh tam giác JOK vuông và ba đường thẳng DE, IM, KO đồng quy.	**5.0**
	a. Chứng minh hai tam giác AGE, FHC đồng dạng và I là trung điểm của GH	1.5
	 Ta có: $\widehat{CAE}=\widehat{ABC}$ (cùng chắn cung AC) $CDBF$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ABC}=\widehat{CFD}$ (cùng chắn cung CD) $\Rightarrow \widehat{CAE}=\widehat{CFD}$ (1)	

	$ADCE$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AED}=\widehat{ACD}$ (cùng chắn cung AD) $\widehat{ACD}=\widehat{BCF}$ (cùng phụ $\widehat{BCD}$) $\Rightarrow \widehat{AED}=\widehat{BCF}$ (2) Từ (1) và (2) suy ra $\Delta AGE \sim \Delta FHC(g.g)$ Ta có : $\widehat{CGD}=\widehat{AGE}=\widehat{CHF} \Rightarrow CGDH$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CGH}=\widehat{CDH}$ $\widehat{CDH}=\widehat{CBF}$ ($CDBF$ nội tiếp) Suy ra $\widehat{CGH}=\widehat{CBF}$. Mà $\widehat{CBF}=\widehat{CAB} \Rightarrow \widehat{CGH}=\widehat{CAB} \Rightarrow GH//AB$ Suy ra $\frac{GI}{AO}=\frac{IH}{OB}$. Vì $AO=OB$ nên $GI=IH \Rightarrow I$ là trung điểm GH.	
	b. Gọi I và K lần lượt là hai điểm đối xứng với H qua AB và AC. Chứng minh rằng ba điểm I, A, K thẳng hàng.	1.5
	Gọi J,K lần lượt là trung điểm của DE,DF. Chứng minh I,J,K thẳng hàng Vì I,J lần lượt là tâm của đường tròn ngoại tiếp hai tứ giác $CGDH, ADCE$ nên $IJ\perp CD$ Vì J,K lần lượt là tâm của đường tròn ngoại tiếp hai tứ giác $ADCE, BDCF$ nên $JK\perp CD$ Suy ra I,J,K thẳng hàng	0.5 0.5 0.5
	c. Gọi M là giao điểm của JO và DK. Chứng minh tam giác JOK vuông và ba đường thẳng DE, IM, KO đồng quy.	2.0
	Ta có J là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AOCE \Rightarrow OJ\perp AC \Rightarrow OJ//BC\left(BC\perp AC\right)$ Mặt khác $JK//EF$ (tính chất đường trung bình), do đó $\widehat{MJK}=\widehat{BCF}$ Mà $\widehat{BCF}=\widehat{BDF}$ ($BDCF$ nội tiếp) $\Rightarrow \widehat{MJK}=\widehat{BDF}=\widehat{ODK} \Rightarrow JDOK$ nội tiếp Suy ra $\widehat{JOK}=\widehat{JDK}$ Mà $\widehat{JDK}=90^0$ ($CGDH$ nội tiếp và $\widehat{GCH}=90^0$), suy ra $\widehat{JOK}=90^0 \Rightarrow \Delta JOK$ vuông tại O Gọi N là giao điểm của ED và OK Ta có: M là trực tâm tam giác JNK nên $NM\perp JK$ (3) $\widehat{MOI}=\widehat{JOC}=\widehat{OCB}=\widehat{OBC}=\widehat{CFD}$ (vì $OJ//BC$) Mà $\widehat{CFD}=\widehat{IKD}\left(JK//EF\right) \Rightarrow \widehat{MOI}=\widehat{IKM} \Rightarrow IMOK$ nội tiếp Suy ra $IM\perp JK$ (4) Từ (3) và (4) suy ra ba đường thẳng DE, IM, KO đồng quy.	0.5 0.5 0.5 0.5
Câu 4. (2.0 điểm).	Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Các điểm D, E theo thứ tự di chuyển trên AB, AC sao cho BD = AE. Xác định vị trí điểm D, E sao cho tứ giác BDEC có diện tích nhỏ nhất.	**2.0**

		
	Tứ giác BDEC có diện tích nhỏ nhất Ta có: $S_{ADE}=\frac{1}{2}.AD.AE=\frac{1}{2}AD.BD=\frac{1}{2}AD.\left(AB-AD\right)=-\frac{1}{2}\left(AD^2-AB.AD\right)$ $=-\frac{1}{2}\left(AD^2-2.\frac{AB}{2}.AD+\frac{AB^2}{4}\right)+\frac{AB^2}{8}$ $=-\frac{1}{2}\left(AD-\frac{AB}{4}\right)^2+\frac{AB^2}{2}\le\frac{AB^2}{8}$ Vậy $S_{BDEC}=S_{ABC}-S_{ADE}\ge\frac{AB^2}{2}-\frac{AB^2}{8}=\frac{3}{8}AB^2$ không đổi Do đó $\min S_{BDEC}=\frac{3}{8}AB^2$ khi D,E lần lượt là trung điểm AB, AC	0.5 0.5 0.5 0.5
Câu 5. (3.0 điểm).	1. Các số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x+y+z=1$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $F=\frac{x^4}{\left(x^2+y^2\right)\left(x+y\right)}+\frac{y^4}{\left(y^2+z^2\right)\left(y+z\right)}+\frac{z^4}{\left(z^2+x^2\right)\left(z+x\right)}$. 2. Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa phương trình $2x^2+y^2+xy=2\left(x+y\right)$	**3.0**
	1. Các số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x+y+z=1$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $F=\frac{x^4}{\left(x^2+y^2\right)\left(x+y\right)}+\frac{y^4}{\left(y^2+z^2\right)\left(y+z\right)}+\frac{z^4}{\left(z^2+x^2\right)\left(z+x\right)}$.	1.5

	Ta có $\frac{2x^4}{(x^2+y^2)(x+y)} = \frac{x^4+y^4+(x^4-y^4)}{(x^2+y^2)(x+y)} = \frac{x^4+y^4}{(x^2+y^2)(x+y)} + x - y$ $\geq \frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{x+y} + x - y \geq \frac{1}{4}(x+y) + x - y = \frac{5}{4}x - \frac{3}{4}y$. Tương tự $\frac{2y^4}{(y^2+z^2)(y+z)} \geq \frac{5}{4}y - \frac{3}{4}z$, $\frac{2z^4}{(z^2+x^2)(z+x)} \geq \frac{5}{4}z - \frac{3}{4}x$. Vậy 2F $\geq \frac{5}{4}(x+y+z) - \frac{3}{4}(x+y+z) = \frac{x+y+z}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow F \geq \frac{1}{4}$. Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = \frac{1}{3}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của F là $\frac{1}{4}$.	0.5 0.5 0.5
	2. Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa phương trình: $2x^2 + y^2 + xy = 2(x+y)$	1.5
	Phương trình đã cho tương đương với : $2x^2 + (y-2)x + y^2 - 2y = 0$ (1) Xem đây là phương trình bậc hai theo ẩn x $\Delta = (y-2)^2 - 8(y^2 - 2y) = -7y^2 + 12y + 4 = (y-2)(-7y-2)$ Để (1) có nghiệm thì $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-2}{7} \leq y \leq 2$ do $y \in Z \Leftrightarrow y \in \{0,1,2\}$ • Với $y = 0 \Rightarrow 2x^2 = 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$ • Với $y = 1 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{-1}{2} (loai) \\ x = 1 \end{array}\right.$ • Với $y = 2 \Leftrightarrow 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ Vậy tập nghiệm của phương trình là $(0;2);(1;1);(1;0);(0;0)$	0.5 0.5 0.5

Học sinh làm cách khác đúng cho điểm tối đa

---------- Hết ----------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH LẠNG SƠN

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH
LỚP 9 NĂM HỌC 2020 – 2021
Môn thi: Toán lớp 9 THCS
Thời gian: 150 phút (*không kể thời gian giao đề*)
Ngày thi: 18/3/2021

Bài 1: (4 điểm)

Cho biểu thức:

$$P=\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{1+\sqrt{xy}}-\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{1-\sqrt{xy}}\right):\left(1+\frac{x+y+2xy}{1-xy}\right) \text{ với } x\geq 0; y\geq 0; xy\neq 1.$$

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tính giá trị của P với $y=9+4\sqrt{5}$.

Bài 2: (4 điểm)

Cho phương trình $mx^2+2(m-2)x+m-3=0$ (m là tham số).

a) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm trái dấu.

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=2$.

Bài 3: (4 điểm)

(a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy+x+y=x^2-2y^2 \\ x\sqrt{2y}-y\sqrt{x-1}=2x-2y \end{cases}$

b) Tìm tất cả các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn phương trình

$$x^6+y^6+15y^4+z^3+75y^2=3x^2y^2z+15x^2z-125$$

Bài 4: (**6 điểm**)

Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Gọi H là một điểm di động trên đoạn thẳng OA (H khác O và $HA>HO$). Đường thẳng đi qua H và vuông góc với OA cắt cung nhỏ AB tại M. Gọi K là hình chiếu vuông góc của M trên OB.

a) Chứng minh $\widehat{BMK}=\widehat{MAB}$.

b) Các tiếp tuyến của $(O;R)$ tại A và B cắt tiếp tuyến tại M của $(O;R)$ lần lượt tại D và E. OD, OE cắt AB lần lượt tại F và G. Chứng minh rằng $OE.OG=OF.OD$

c) Tìm vị trí điểm H để chu vi tam giác MAB đạt giá trị lớn nhất.

Bài 5: (2 điểm)

a) Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=6$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=\frac{b^2c^2}{a(b^2+c^2)}+\frac{c^2a^2}{b(c^2+a^2)}+\frac{a^2b^2}{c(a^2+b^2)}$.

b) Cho mỗi điểm trên mặt phẳng được tô bởi một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác mà ba đỉnh và trọng tâm cùng màu.

- - - - - - - - - - - - -HẾT - - - - - - - - - - - - -

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
QUẢNG NGÃI

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH LỚP 9
NĂM HỌC 2020 - 2021

Ngày thi: 11/3/2021

Môn: Toán

Thời gian làm bài: 150 phút

Bài 1: (4,0 điểm)

a) *(1,5 điểm)* Tìm số nguyên dương n lớn nhất để $A = 4^{27} + 4^{2021} + 4^{n}$ là số chính phương.

b) *(1,5 điểm)* Tìm các số nguyên *x*, *y* thỏa mãn đẳng thức: $xy^3 + y^2 + 4xy = 6$.

c) *(1,0 điểm)* Số nhà bạn An là số có hai chữ số $\overline{ab}$ biết $\overline{ab} = (a-1)^2 + (b-1)^2$.

Tìm số nhà bạn An.

Bài 2: (4,0 điểm)

a) *(2,0 điểm)* Giải phương trình: $\sqrt{5-4x} + \sqrt[3]{x+7} = 3$.

b) *(2,0 điểm)* Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy + 1 = 2x \\ x(x+y)^2 + x - 2 = 2y^2 \end{cases}$.

Bài 3: (4,0 điểm)

a) *(2,0 điểm)* Cho các số dương a, b thỏa mãn: $a + b = \sqrt{2021 - a^2} + \sqrt{2021 - b^2}$. Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 = 2021$.

b) *(2,0 điểm)* Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = 1 - xy$; trong đó x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện: $x^{2021} + y^{2021} = 2x^{1010}y^{1010}$.

Bài 4: (7,0 điểm)

a) *(1,5 điểm)* Cho tam giác ABC và điểm M nằm trong tam giác. Từ M kẻ tia MD song song với AB (với D thuộc BC), tia ME song song với BC (với E thuộc AC) và tia MF song song với AC (với F thuộc AB). Chứng minh rằng: $3S_{DEF} \le S_{ABC}$. (S_{ABC}: diện tích tam giác ABC, S_{DEF}: diện tích tam giác DEF).

b) *(5,5 điểm)* Từ điểm P kẻ hai tiếp tuyến PA, PB với đường tròn (O;R); A, B là tiếp điểm. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ A đến đường kính BC của đường tròn.

i) Chứng minh rằng PC cắt AH tại trung điểm của AH.

ii) Cho OP = a. Tính độ dài AH theo R và a.

iii) Đường thẳng d đi qua P sao cho khoảng cách từ O đến đường thẳng d bằng $R\sqrt{2}$, đường thẳng vuông góc với PO tại O cắt tia PB tại M. Xác định vị trí của điểm P trên đường thẳng d để diện tích tam giác POM nhỏ nhất.

Bài 5: (1,0 điểm) Trên công trường có những thanh sắt dài 7,4 m. Người ta muốn cắt các thanh sắt đó thành các đoạn dài 0,7 m và 0,5 m để sử dụng.

a)(0,5 điểm) Em hãy nêu phương án cắt mà không phải hàn nối các đoạn sắt cần dùng.

b)(0,5 điểm) Muốn có 1000 đoạn sắt 0,7 m và 2000 đoạn sắt 0,5 m. Ta phải dùng ít nhất bao nhiêu thanh sắt 7,4 m nêu trên?

——— HẾT ———

Ghi chú: *Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
QUẢNG NGÃI

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH LỚP 9
NĂM HỌC 2020 - 2021

Ngày thi: 11/3/2021
Môn: Toán
Thời gian làm bài: 150 phút

HƯỚNG DẪN CHẤM

Bài 1: (4,0 điểm)

a) *(1,5 điểm)* Tìm số nguyên dương n lớn nhất để $A=4^{27}+4^{2021}+4^{n}$ là số chính phương.

b) *(1,5 điểm)* Tìm các số nguyên *x*, *y* thỏa mãn đẳng thức: $xy^3+y^2+4xy=6$.

c) *(1,0 điểm)* Số nhà bạn An là số có hai chữ số $\overline{ab}$ biết $\overline{ab}=(a-1)^2+(b-1)^2$.

Tìm số nhà bạn An.

Tóm tắt cách giải	Điểm
1a) *(1,5 điểm)*	
A= $4^{27}+4^{2021}+4^{n}=(2^{27})^2(1+4^{1994}+4^{n-27})$	0,25 điểm
Vì A và $(2^{27})^2$ là số chính phương nên $1+4^{1994}+4^{n-27}$ là số chính phương	0,25 điểm
Ta có $1+4^{1994}+4^{n-27}>4^{n-27}=(2^{n-27})^2$	
Mà $1+4^{1994}+4^{n-27}$ là số chính phương nên ta có:	0,25 điểm
$1+4^{1994}+4^{n-27}\geq(2^{n-27}+1)^2\Leftrightarrow 2^{n-27}\leq 2^{3987}\Leftrightarrow n\leq 4014$	
Với n= 4014 ta có A= $4^{27}+4^{2021}+4^{4014}=(2^{27}+2^{4014})^2$ là số chính phương	0,5 điểm
Vậy với n=4014 là số nguyên dương lớn nhất để $A=4^{27}+4^{2021}+4^{n}$ là số chính phương	0,25 điểm
1b) *(1,5 điểm)*	
Ta có $xy^3+y^2+4xy=6\Leftrightarrow xy^3+y^2+4xy+4=10$	0,25 điểm
$\Leftrightarrow y^2(xy+1)+4(xy+1)=10\Leftrightarrow(xy+1)(y^2+4)=10$	
Ta thấy $y^2+4\geq 4$ và y^2+4 là ước của 10.	0,25 điểm
Nên $y^2+4=5$ hoặc $y^2+4=10$.	0,25 điểm
Với $y^2+4=5$. Ta được $\begin{cases}y^2+4=5\\xy+1=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2=1\\xy=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\pm1\\xy=1\end{cases}$	0,25 điểm
Ta được hai cặp giá trị thỏa mãn là $(x=1;\ y=1)$; $(x=-1;\ y=-1)$.	

Với $y^2+4=10$. Ta được $\begin{cases} y^2+4=10 \\ xy+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=6 \\ xy=0 \end{cases}$ (loại vì $y \notin \mathbb{Z}$) Kết luận: Các số nguyên x, y thỏa mãn đẳng thức $xy^3+y^2+4xy=6$ là $(x=1;\ y=1)$; $(x=-1;\ y=-1)$.	0,25 điểm 0,25 điểm
1c) *(1,0 điểm)* Ta có $\overline{ab}=(a-1)^2+(b-1)^2$ $\Leftrightarrow 10a+b=a^2+b^2-2a-2b+2$ $\Leftrightarrow a^2+b^2-12a-3b+2=0$ $\Leftrightarrow 4.(a^2+b^2-12a-3b+2)=0$ $\Leftrightarrow (2a-12)^2+(2b-3)^2=145=(\pm 8)^2+(\pm 9)^2$ $\Rightarrow \overline{ab}=26$ Kết luận: Số nhà bạn An là 26.	0,25 điểm 0,25 điểm 0,25 điểm 0,25 điểm

Bài 2: (4,0 điểm)

a) *(2,0 điểm)* Giải phương trình: $\sqrt{5-4x}+\sqrt[3]{x+7}=3$.

b) *(2,0 điểm)* Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2+xy+1=2x \\ x(x+y)^2+x-2=2y^2 \end{cases}$.

Tóm tắt cách giải	Điểm
2a) *(2,0 điểm)* Điều kiện: $5-4x \ge 0 \Leftrightarrow x \le \frac{5}{4}$ Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{5-4x} \\ b=\sqrt[3]{x+7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2=5-4x \\ b^3=x+7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=5-4x \\ 4b^3=4x+28 \end{cases} \Rightarrow a^2+4b^3=33$ Vậy ta được: $\begin{cases} a^2+4b^3=33 \\ a+b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3-b \\ 4b^3+b^2-6b-24=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow x=1$ *<u>Chú ý</u>*: Có thể biến đổi $(\sqrt{5-4x}-1)+(\sqrt[3]{x+7}-2)=0$ và nhân chia cho đại lượng liên hợp, sau đó đưa về phương trình tích để tìm nghiệm $x=1$. Đối chiếu với điều kiện ta được tập nghiệm là $S=\{1\}$.	0,5 điểm 0,5 điểm 0,5 điểm 0,5 điểm
2b) *(2,0 điểm)*	

$\begin{cases} x^2+y^2+xy+1=2x & (1) \\ x(x+y)^2+x-2=2y^2 & (2) \end{cases}$ $(1) \Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2xy+2=4x$ Kết hợp với $(2) \Rightarrow 2x^2+x(x+y)^2+x-2+2xy+2=4x$ $\Leftrightarrow x\left[(x+y)^2+2(x+y)-3\right]=0$ $\Leftrightarrow x(x+y-1)(x+y+3)=0$. $\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x+y-1=0$ hoặc $x+y+3=0$. + Xét $x=0$, thế vào $x^2+y^2+xy+1=2x$ ta được $y^2+1=0$ (vô nghiệm) + Xét $x+y-1=0 \Rightarrow y=1-x$ thế vào phương trình $x^2+y^2+xy+1=2x$ ta được: $x^2-3x+2=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow y=0 \\ x=2 \Rightarrow y=-1 \end{array}\right.$ + Xét $x+y+3=0 \Leftrightarrow y=-x-3$ thế vào phương trình $x^2+y^2+xy+1=2x$ ta được: $x^2+x+10=0$ (vô nghiệm) Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm (1;0) và (2;-1).	0,5 điểm 0,5 điểm 0,25 điểm 0,25 điểm 0,25 điểm 0,25 điểm

Bài 3: (4,0 điểm)

a) *(2,0 điểm)* Cho các số dương a, b thỏa mãn: $a+b=\sqrt{2021-a^2}+\sqrt{2021-b^2}$.
Chứng minh rằng: $a^2+b^2=2021$.

b) *(2,0 điểm)* Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = 1- xy$; trong đó x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện: $x^{2021}+y^{2021}=2x^{1010}y^{1010}$.

Tóm tắt cách giải	Điểm
3a) *(2,0 điểm)* Từ $a+b=\sqrt{2021-a^2}+\sqrt{2021-b^2} \Rightarrow a-\sqrt{2021-b^2}=\sqrt{2021-a^2}-b$ Nhân, chia cả tử và mẫu cho biểu thức liên hợp, ta được: $\Rightarrow \frac{a^2-(2021-b^2)}{a+\sqrt{2021-b^2}}=\frac{(2021-a^2)-b^2}{\sqrt{2021-a^2}+b} \Rightarrow \frac{a^2+b^2-2021}{a+\sqrt{2021-b^2}}=\frac{2021-a^2-b^2}{\sqrt{2021-a^2}+b}$	0,5 điểm

$\Rightarrow \dfrac{a^2+b^2-2021}{a+\sqrt{2021-b^2}}=-\dfrac{a^2+b^2-2021}{\sqrt{2021-a^2}+b}$ $\Rightarrow \left(a^2+b^2-2021\right)\left(\dfrac{1}{a+\sqrt{2021-b^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2021-a^2}+b}\right)=0$ $\Rightarrow a^2+b^2-2021=0 \Rightarrow a^2+b^2=2021.$	0,5 điểm 0,5 điểm 0,5 điểm
3b) *(2,0 điểm)* Từ $x^{2021}+y^{2021}=2x^{1010}y^{1010}$ * Nếu x = 0 $\Rightarrow y=0$; Nếu y = 0 $\Rightarrow x=0$ * Nếu $x\neq 0;\ y\neq 0$ Thì $x^{2021}+y^{2021}=2x^{1010}y^{1010} \Leftrightarrow \dfrac{x^{2021}+y^{2021}}{x^{1010}y^{1010}}=x(\dfrac{x}{y})^{1010}+y(\dfrac{y}{x})^{1010}=2\ (*)$ Đặt $t=(\dfrac{x}{y})^{1010}\neq 0$ thì $(*)\Leftrightarrow xt+y\cdot\dfrac{1}{t}=2 \Rightarrow xt^2-2t+y=0$ $\Leftrightarrow (t-\dfrac{1}{x})^2=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{1-xy}{x^2}$ Để phương trình có nghiệm thì $\dfrac{1-xy}{x^2}\geq 0 \Leftrightarrow 1-xy\geq 0 \Rightarrow xy\leq 1$ Nên giá trị nhỏ nhất của P = 1 – xy = 0 khi xy = 1	0,5 điểm 0,5 điểm 0,5 điểm 0,5 điểm

Bài 4: (7,0 điểm)

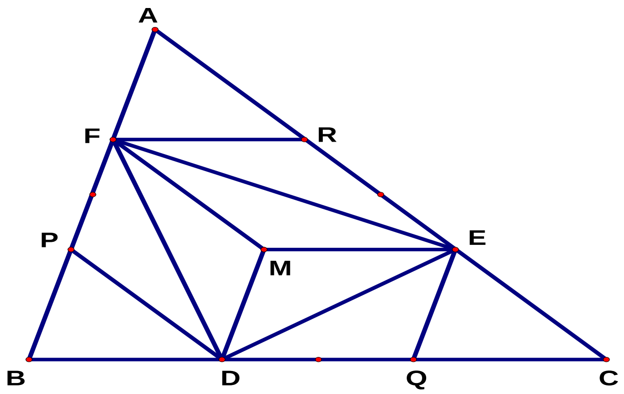
a) *(1,5 điểm)* Cho tam giác ABC và điểm M nằm trong tam giác. Từ M kẻ tia MD song song với AB (với D thuộc BC), tia ME song song với BC (với E thuộc AC) và tia MF song song với AC (với F thuộc AB). Chứng minh rằng: $3S_{DEF}\leq S_{ABC}$. (S_{ABC} : diện tích tam giác ABC, S_{DEF} : diện tích tam giác DEF).

b) *(5,5 điểm)* Từ điểm P kẻ hai tiếp tuyến PA, PB với đường tròn (O;R); A, B là tiếp điểm. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ A đến đường kính BC của đường tròn.

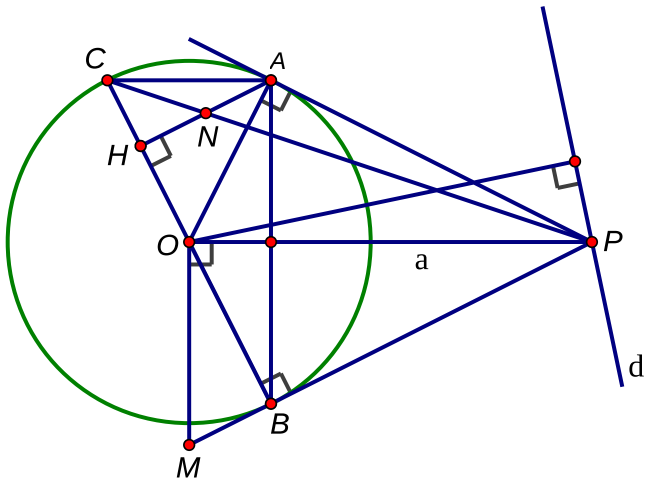
i) Chứng minh rằng PC cắt AH tại trung điểm của AH.

ii) Cho OP = a. Tính độ dài AH theo R và a.

iii) Đường thẳng d đi qua P sao cho khoảng cách từ O đến đường thẳng d bằng $R\sqrt{2}$, đường thẳng vuông góc với PO tại O cắt tia PB tại M. Xác định vị trí của điểm P trên đường thẳng d để diện tích tam giác POM nhỏ nhất.

Tóm tắt cách giải	**Điểm**
 	0,5 điểm
a) *(1,5 điểm)* Từ D, E và F lần lượt vẽ các đường thẳng song song với MF, MD và ME cắt AB, BC và AC lần lượt tại P, Q và R. Ta có: FR // BC nên $\Delta AFR \backsim \Delta ABC$ $\Rightarrow \frac{S_{AFR}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AF}{AB}\right)^2 = \frac{AF^2}{AB^2}$ Tương tự: $\frac{S_{PBD}}{S_{ABC}} = \left(\frac{PB}{AB}\right)^2 = \frac{PB^2}{AB^2}$ $\frac{S_{EQC}}{S_{ABC}} = \left(\frac{EQ}{AB}\right)^2 = \frac{FP^2}{AB^2}$	0,25 điểm
Suy ra: $\frac{S_{AFR}}{S_{ABC}} + \frac{S_{PBD}}{S_{ABC}} + \frac{S_{EQC}}{S_{ABC}} = \frac{AF^2}{AB^2} + \frac{PB^2}{AB^2} + \frac{FP^2}{AB^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{AF^2}{AB^2}.\frac{PB^2}{AB^2}.\frac{FP^2}{AB^2}}$ Dấu “ = ” xảy ra khi AF = PB = FP = $\frac{1}{3}AB$ khi đó M là trọng tâm của ΔABC. Nên ta có: $\frac{S_{AFR} + S_{PBD} + S_{EQC}}{S_{ABC}} \geq \frac{1}{3} \Rightarrow S_{AFR} + S_{PBD} + S_{EQC} \geq \frac{1}{3} S_{ABC}$ Suy ra: $S_{DQERFP} \leq \frac{2}{3}.S_{ABC}$	0,25 điểm

Mặt khác: MERF; MDQE; MDPF là các hình bình hành Nên $S_{MEF}=S_{REF};S_{MDE}=S_{QDE};S_{MDF}=S_{PDF}$ $S_{DEF}=S_{MEF}+S_{MDE}+S_{MDF}=\frac{1}{2}S_{DQERFP}\le\frac{1}{2}\bullet\frac{2}{3}S_{ABC}$ nên $3S_{DEF}\le S_{ABC}$	0,25 điểm 0,25 điểm

Tóm tắt cách giải	Điểm
	0,5 điểm
i) Gọi N là giao điểm của CP và AH; Ta có OA = OB = R; PA = PB (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) Suy ra OP là đường trung trực của AB hay OP $\perp$ AB. Xét ΔACH và ΔPOB có: $\widehat{AHC}=\widehat{PBO}=90^0$ $\widehat{ACH}=\widehat{POB}$ (cùng phụ với $\widehat{ABC}$) Do đó $\Delta ACH \backsim \Delta POB$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AH}{PB}=\frac{CH}{OB}$ (1) Xét Δ CPB có NH // BP (gt) nên $\frac{NH}{PB}=\frac{CH}{CB}\Rightarrow\frac{2NH}{PB}=\frac{CH}{OB}$ (2) Từ (1) và (2) suy ra: AH = 2NH hay AN = NH.	0,5 điểm 0,5 điểm 0,5 điểm
ii) Xét Δ ABC vuông ở A với đường cao AH có:	

$AH^2 = BH.CH = (2R - CH).CH$ (3). Từ (2) ta có $CH = \dfrac{2NH.OB}{PB}$ thay vào (3), kết hợp với $AH = 2NH$ Ta được: $AH^2 = \left(2R - \dfrac{AH.CB}{2PB}\right).\left(\dfrac{AH.CB}{2.PB}\right)$ $\Leftrightarrow 4PB^2.AH^2 = (4R.PB - AH.CB).AH.2R = 8R^2.PB.AH - 4R^2.AH^2$ $\Leftrightarrow PB^2.AH = 2R^2.PB - R^2.AH$ $\Leftrightarrow AH(PB^2 + R^2) = 2R^2.PB$ Thay $PB^2 = a^2 - R^2$ vào hằng đẳng thức trên ta được: $AH = \dfrac{2R^2}{a^2}\sqrt{a^2 - R^2}$	0,5 điểm 0,5 điểm 0,5 điểm 0,5 điểm
iii) Ta có: $S_{MOP} = \dfrac{1}{2}MP.OB = \dfrac{1}{2}(PB + BM).OB = \dfrac{1}{2}(PB + MB).R$ (4) Ta có: $\dfrac{1}{2}(PB + MB) \geq \sqrt{PB.BM}$ (5) Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi PB = BM Δ MOP vuông tại O, vì $OB \perp PB$, nên: $PB.MB = OB^2 = R^2$ (6) Từ (4), (5), (6) suy ra $S_{MOP} \geq R^2$ Do đó $\min S_{MOP} = R^2 \Leftrightarrow PB = BM = R$. $\Leftrightarrow \Delta$ PBO vuông cân tại B $\Leftrightarrow OP = R\sqrt{2}$. Vậy Δ MOP có diện tích nhỏ nhất khi $OP = R\sqrt{2}$. Khi đó P là chân đường vuông góc hạ từ O đến đường.	0,5 điểm 0,5 điểm 0,5 điểm

Bài 5: (1,0 điểm)

Trên công trường có những thanh sắt dài 7,4 m. Người ta muốn cắt các thanh sắt đó thành các đoạn dài 0,7 m và 0,5 m để sử dụng.

a)(0,5 điểm) Em hãy nêu phương án cắt mà không phải hàn nối các đoạn sắt cần dùng.

b)(0,5 điểm) Muốn có 1000 đoạn sắt 0,7 m và 2000 đoạn sắt 0,5 m. Ta phải dùng ít nhất bao nhiêu thanh sắt 7,4 m nêu trên?

Tóm tắt cách giải	Điểm
5.a) *(0,5 điểm)* Gọi x, y lần lượt là các đoạn sắt 0,7 m và 0,5 m cắt ra từ một thanh sắt 7,4 m. Điều kiện $x,y \in \mathbb{N}^*$, x < 10. Ta có $0,7x+0,5y=7,4 \Leftrightarrow 7x+5y=74$ $\Leftrightarrow 5y=74-7x \Leftrightarrow y=\frac{74-7x}{5}=15-x-\frac{1+2x}{5}$ nên $1+2x \vdots 5$ và x < 10 Vậy $1+2x\in\{5;15\} \Rightarrow x\in\{2;7\}$ Với $x=2 \Rightarrow y=12$ (nhận). Với $x=7 \Rightarrow y=5$ (nhận). Cách 1: cắt thanh sắt 7,4 m làm 2 đoạn 0,7 m và 12 đoạn 0,5 m. Cách 2: cắt thanh sắt 7,4 m làm 7 đoạn 0,7 m và 5 đoạn 0,5 m.	0,25 điểm 0,25 điểm
5.b) *(0,5 điểm)* Gọi a,b lần lượt là số thanh sắt 7,4m được cắt theo cách1; cách2 như câu a. Ta có số đoạn sắt 0,7m là 2a + 7b. Số đoạn sắt 0,5m là 12a + 5b. Vậy: $\begin{cases}2a+7b=1000\\12a+5b=2000\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}12a+42b=6000\\12a+5b=2000\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\frac{4500}{37}\\b=\frac{4000}{37}\end{cases}$ Do a,b $\in \mathbb{N}^*$ Vậy a = 122, b =108. Nghĩa là dùng 122 thanh sắt 7,4m cắt theo cách 1 và 108 thanh sắt 7,4m cắt theo cách 2. Nên dùng ít nhất là 230 thanh sắt 7,4m. Thật vậy : Chiều dài các đoạn sắt đã cắt là $1000\times 0,7+2000\times 0,5=1700\,(m)$ Chiều dài các thanh sắt đã dùng là $230\times 7,4=1702(m)$. Nên đây là cách cắt dùng số thanh sắt 7,4m là ít nhất để đạt yêu cầu.	0,25 điểm 0,25 điểm

<u>Ghi chú</u> : + Mỗi bài toán có thể có nhiều cách giải, học sinh giải cách khác mà đúng thì vẫn cho điểm tối đa. Tổ chấm thảo luận thống nhất biểu điểm chi tiết cho các tình huống làm bài của học sinh.

+ Điểm từng câu và toàn bài không làm tròn số.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH BÌNH DƯƠNG
ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THCS CẤP TỈNH
Năm học: 2020 – 2021
Môn thi: TOÁN
Thời gian làm bài: ***150 phút***
(không tính thời gian phát đề)

Câu 1. ***(4,0 điểm)***

a) Tính giá trị của biểu thức:

$$M=(x^9+x-x^{2020})^{2021}\ với\ x=\frac{(27+9\sqrt{10})\sqrt[3]{37\sqrt{10}-117}}{\sqrt{10}+\sqrt{91-18\sqrt{10}}}$$

b) Rút gọn biểu thức:

$$N=\frac{1}{1+\sqrt{11}}+\frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{21}}+\frac{1}{\sqrt{21}+\sqrt{31}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2011}+\sqrt{2021}}$$

Câu 2. ***(6,0 điểm)***

a) Giải phương trình: $\sqrt{6x^2-7x-20}+3\sqrt{2x-5}-2\sqrt{3x+4}-6=0$

b) Cho 3 số dương x, y, z thỏa x + y + x = 2.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\frac{2}{x}+\frac{8}{9y}+\frac{18}{25z}$.

c) Cho phương trình: $x^3+(2m-5)x^2+(m^2-m+7)x-m^2-m-3=0$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình đã cho có 3 nghiệm dương phân biệt.

Câu 3. ***(5,0 điểm)***

a) Cho 40 số nguyên tố dương thay đổi sao cho có tổng bằng 58. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của tổng các bình phương của chúng.

b) Giả sử ba số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện a > 0, bc = $3a^2$, a + b + c = abc. Chứng minh rằng:

$$a\ge\sqrt{\frac{1+2\sqrt{3}}{3}}.$$

Câu 4. ***(5,0 điểm)*** Cho tam giác ABC cân tại A, có đường tròn nội tiếp *(I)*. Các điểm E, F theo thứ tự thuộc các cạnh CA, AB (E khác C và A; F khác B và A) sao cho EF tiếp xúc với đường tròn *(I)* tại điểm J. Gọi H là hình chiếu của J trên BC.

a) Chứng minh rằng HJ là phân giác của $\widehat{EHF}$.

b) Ký hiệu S_1, S_2 lần lượt là diện tích của tứ giác BFJL và CEJK. Chứng minh rằng:

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{BF^2}{CF^2}.$$

c) Gọi D là trung điểm cạnh BC. Chứng minh rằng ba điểm P, J, D thẳng hàng.

……………HẾT……………

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

a) Ta có:

$$x=\frac{\left(27+9\sqrt{10}\right)\sqrt[3]{37\sqrt{10}-117}}{\sqrt{10}+\sqrt{91-18\sqrt{10}}}=\frac{9\left(3+\sqrt{10}\right)\sqrt[3]{37\sqrt{10}-117}}{\sqrt{10}+\sqrt{\left(9-\sqrt{10}\right)^2}}$$

$$=\frac{9\left(3+\sqrt{10}\right)\sqrt[3]{37\sqrt{10}-117}}{9}=\left(3+\sqrt{10}\right)\sqrt[3]{37\sqrt{10}-117}$$

$\Rightarrow x^3=\left(37\sqrt{10}+117\right)\left(37\sqrt{10}-117\right)=1$

$\Rightarrow x=1$

$M=\left(x^9+x-x^{2020}\right)^{2021}=\left(1^9+1-1^{2020}\right)^{2021}=1$

Vậy giá trị của biểu thức M bằng 1.

b) Ta có:

$$N=\frac{1}{1+\sqrt{11}}+\frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{21}}+\frac{1}{\sqrt{21}+\sqrt{31}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2011}+\sqrt{2021}}$$

$$=\frac{-1+\sqrt{11}}{10}+\frac{-\sqrt{11}+\sqrt{21}}{10}+\frac{-\sqrt{21}+\sqrt{31}}{10}+\cdots+\frac{-\sqrt{2011}+\sqrt{2021}}{10}$$

$$=\frac{\sqrt{2021}-1}{10}$$

$$Vậy\ N=\frac{\sqrt{2021}-1}{10}$$

Câu 2.

a)

$\sqrt{6x^2-7x-20}+3\sqrt{2x-5}-2\sqrt{3x+4}-6=0,\qquad \text{ĐKXĐ}: x\ge\frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{6x^2-7x-20}-6=2\sqrt{3x+4}-3\sqrt{2x-5}$

$\Leftrightarrow \sqrt{(3x+4)(2x-5)}-6=2\sqrt{3x+4}-3\sqrt{2x-5}$

$\Rightarrow (3x+4)(2x-5)+36-12\sqrt{(3x+4)(2x-5)}$

$=4(3x+4)+9(2x-5)-12\sqrt{(3x+4)(2x-5)}$

$\Leftrightarrow 6x^2-7x-20+36=12x+16+18x-45$

$\Leftrightarrow 6x^2-37x+45=0$

$\Rightarrow x_1=\frac{9}{2}(\text{nhận});\ x_2=\frac{5}{3}\ (\text{loại})$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \frac{9}{2}$

b)

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski cho hai dãy các số dương x, y, z và $\frac{2}{x}, \frac{8}{9y}, \frac{18}{25z}$ ta có:

$$(x+y+z)\left(\frac{2}{x}+\frac{8}{9y}+\frac{18}{25z}\right) \geq \left(\sqrt{x}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}+\sqrt{y}.\frac{\sqrt{8}}{3\sqrt{y}}+\sqrt{z}.\frac{\sqrt{18}}{5\sqrt{z}}\right)^2$$

$$= \left(\sqrt{2}+\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{3\sqrt{2}}{5}\right)^2 = \left(\frac{34\sqrt{2}}{15}\right)^2$$

Mà $x+y+z=2$

$$\Rightarrow 2.\left(\frac{2}{x}+\frac{8}{9y}+\frac{18}{25z}\right) \geq \left(\frac{34\sqrt{2}}{15}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{2}{x}+\frac{8}{9y}+\frac{18}{25z} \geq \left(\frac{34}{15}\right)^2$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{2}{x}+\frac{8}{9y}+\frac{18}{25z} \geq \left(\frac{34}{15}\right)^2$

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{x^2}{2} = \frac{9y^2}{8} = \frac{25z^2}{18}$

$Ta\ có: x+y+z=2$

$$\Rightarrow x+\frac{2x}{3}+\frac{3x}{5}=2$$

$$\Rightarrow x=\frac{15}{17}, y=\frac{10}{17}, z=\frac{9}{17}$$

c) Ta có:

$x^3 + (2m-5)x^2 + (m^2-m+7)x - m^2 - m - 3 = 0$ (*)

$\Leftrightarrow (x-1)[x^2 + (2m-4)x + m^3 + m + 3] = 0$

$\Rightarrow x = 1$ hoặc $x^2 + (2m-4)x + m^2 + m + 3 = 0$

Vì $x = 1 > 0$ nên để phương trình (*) có 3 nghiệm dương phân biệt thì phương trình $x^2 + (2m-4)x + m^2 + m + 3 = 0$ phải có 2 nghiệm dương phân biệt khác 1.

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ 4-2m>0 \\ m^2+m+3>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3m+1>0 \\ 4-2m>0 \\ \left(m+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}>0 \text{ (luôn đúng)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m<\frac{1}{3} \\ m<2 \end{cases} \Rightarrow m<\frac{1}{3}$$

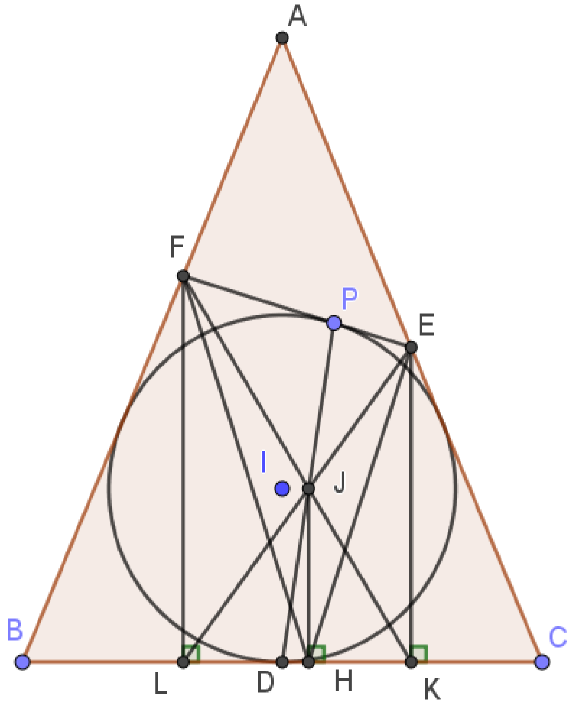
$$x_{1,2} = 2-m \pm \sqrt{1-3m} \neq 1$$

$$2-m+\sqrt{1-3m} \neq 1 \Rightarrow \sqrt{1-3m} \neq m-1 \left(\text{luôn đúng do } m<\frac{1}{3}\right)$$

$2-m-\sqrt{1-3m}\neq 1 \Rightarrow \sqrt{1-3m}\neq 1-m \Rightarrow m\neq 0$ và $m\neq -1$

Do $\mathrm{m}<\dfrac{1}{3}$ để phương trình ban đầu có 3 nghiệm dương phân biệt thì $\mathrm{m}<\dfrac{1}{3}$ và $\mathrm{m}\neq 0$.

Câu 4.



a) Ta có: HJ // LF

$\Rightarrow \dfrac{\mathrm{JH}}{\mathrm{FL}}=\dfrac{\mathrm{KH}}{\mathrm{KL}}$ (Hệ quả định lí Thales) $\Rightarrow \mathrm{JH.KL}=\mathrm{KH.FL}\quad (1)$

HJ // KE

$\Rightarrow \dfrac{\mathrm{JH}}{\mathrm{EK}}=\dfrac{\mathrm{LH}}{\mathrm{KL}}$ (Hệ quả định lí Thales) $\Rightarrow \mathrm{JH.KL}=\mathrm{LH.EK}\quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\mathrm{KH.FL}=\mathrm{LH.EK}$

$\Rightarrow \dfrac{\mathrm{KH}}{\mathrm{LH}}=\dfrac{\mathrm{EK}}{\mathrm{FL}}$

Mà $\widehat{\mathrm{FLH}}=\widehat{\mathrm{EKH}}=90^0$

$\Rightarrow \Delta\mathrm{FLH}\backsim\Delta\mathrm{EKH}$

$\Rightarrow \widehat{\mathrm{FHL}}=\widehat{\mathrm{EHK}}$

$\Rightarrow \widehat{\mathrm{FHJ}}=\widehat{\mathrm{EHJ}}$ (Do $\widehat{\mathrm{FHL}}$ phụ với $\widehat{\mathrm{FHJ}}$, $\widehat{\mathrm{EHK}}$ phụ với $\widehat{\mathrm{EHJ}}$)

Vậy HJ là phân giác của $\widehat{EHF}$.

b) Ta có:

$\Delta\mathrm{BFL}\backsim\Delta\mathrm{CEK}$ (g – g) $\Rightarrow \dfrac{S_{BFL}}{S_{CEK}}=\dfrac{BF^2}{CE^2}\Rightarrow S_{BFL}=S_{CEK}.\dfrac{BF^2}{CE^2}$

$$\Delta \text{JFL} \backsim \Delta \text{JEK (g} - \text{g)} \Rightarrow \frac{S_{JFL}}{S_{JKE}} = \frac{FL^2}{KE^2} = \frac{BF^2}{CE^2} \Rightarrow S_{JFL} = S_{JEK}.\frac{BF^2}{CE^2}$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{S_{BFJL}}{S_{CEJK}} = \frac{S_{BFL} + S_{JFL}}{S_{CEK} + S_{JKE}} = \frac{S_{CEK}.\frac{BF^2}{CE^2} + S_{JEK}.\frac{BF^2}{CE^2}}{S_{CEK} + S_{JKE}} = \frac{(S_{CEK} + S_{JEK}).\frac{BF^2}{CE^2}}{S_{CEK} + S_{JEK}} =.\frac{BF^2}{CE^2}$$

UBND TỈNH HẢI DƯƠNG

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH LỚP 9

NĂM HỌC 2020 – 2021

MÔN THI: TOÁN

Ngày thi: 27/01/2021

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề

(Đề thi gồm 05 câu, 01 trang)

Câu 1. (2,0 điểm)

1. Rút gọn biểu thức $A=\left(\dfrac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}+\dfrac{x-y}{\sqrt{x^2-y^2}-x+y}\right).\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2-y^2}}$ với x > y > 0.

2. Cho a, b, c là các số thực khác 0 thỏa mãn:

$|a+b+c-2020|+\sqrt{2020(ab+bc+ca)-abc}=0$. Tính $P=\dfrac{1}{a^{2021}}+\dfrac{1}{b^{2021}}+\dfrac{1}{c^{2021}}$.

Câu 2. (2,0 điểm)

1. Giải phương trình : $\dfrac{3x^2-17x+27}{4x-9}=\dfrac{1}{2\sqrt{x-2}-1}$

2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 1+\dfrac{y}{x}+\dfrac{1}{xy}=\dfrac{9}{x^2} \\ x^2+xy-4=\dfrac{4y}{x} \end{cases}$

Câu 3. (2,0 điểm)

1. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn đẳng thức: $2x^2 + y^2 + 3xy + 3x + 2y + 3 = 0$.

2. Cho a, b, c là các số nguyên thỏa mãn : (a - b)(b - c)(c - a) = a + b + c.
Chứng minh a + b + c chia hết cho 27.

Câu 4. (3,0 điểm)

1. Cho đường tròn (O; R) và một điểm A nằm ngoài đường tròn (O; R). Qua A lần lượt kẻ các tiếp tuyến AB, AC đến với đường tròn (O; R) (B, C là các tiếp điểm). Lấy điểm D thuộc đường tròn (O; R) sao cho BD song song với AO, đường thẳng AD cắt đường tròn (O; R) tại điểm thứ hai là E. Gọi M là trung điểm của AC.

a) Chứng minh ME là tiếp tuyến của đường tròn (O; R).

b) Từ D kẻ tiếp tuyến với đường tròn (O; R), tiếp tuyến này cắt ME tại T. Gọi r_1, r_2, r_3 lần lượt là bán kính các đường tròn nội tiếp của ΔOME, ΔOTE, ΔOMT. Chứng minh khi A thay đổi thì $r_1 + r_2 + r_3$ luôn không đổi.

2. Cho tam giác ABC có ba góc nhon. Chứng minh $\sin^2A + \sin^2B + \sin^2C > 2$.

Câu 5. (1,0 điểm) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn: 2xy + 5yz + 6zx = 18xyz. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\dfrac{16xy}{y+2x}+\dfrac{25yz}{4z+y}+\dfrac{81zx}{x+4z}$.

…………………….. HẾT …………………………

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ĐĂK LĂK

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TỈNH
NĂM HỌC: 2020 – 2021
MÔN TOÁN 9
Thời gian làm bài: 150 phút

Bài 1: (4,0 điểm)

1) Cho biểu thức: $A=\frac{9}{x-\sqrt{x}-2}+\frac{2\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}$ với $x\ge 0$ và $x\ne 4$.

Tìm tất cả các giá trị nguyên của x sao cho biểu thức A nhận giá trị nguyên.

2) Cho phương trình $x^2-(2m+3)x+m=0$ với m là tham số. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 sao cho $x_1^2+x_2^2=9$.

Bài 2: (4,0 điểm)

1) Cho parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=x+b$. Tìm b để đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A,\ B$ sao cho $OI=\sqrt{\frac{13}{2}}$ (với I là trung điểm của AB).

2) Giải phương trình: $(x^2+1)(x-1)(x-3)=15(2x-1)^2$

Bài 3: (3,0 điểm)

1) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x,\ y)$ thỏa mãn: $x^2-3xy+2y^2+6=0$

2) Cho $x,\ y,\ z$ là các đôi một khác nhau. Chứng minh rằng: $(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5$ chia hết cho $5(x-y)(y-z)(z-x)$.

Bài 4: (4,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF của ΔABC cắt nhau tại H.

1) Chứng minh: $FA.AB=AE.AC$.

2) Chứng minh: DH là tia phân giác của $\widehat{EDF}$.

3) Giả sử $\widehat{ACB}=60^\circ$. Chứng minh: $2EF+BF=\sqrt{3}.CF$

Bài 5: (3,0 điểm)

Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{BAD}=60^\circ$, $\widehat{BCD}=120^\circ$, tia phân giác của $\widehat{DAB}$ cắt BD tại E, tia phân giác của $\widehat{BCD}$ cắt BD tại F.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{AB}+\frac{1}{BC}+\frac{1}{CD}+\frac{1}{DA}=\frac{\sqrt{3}}{AE}+\frac{1}{CF}$

Bài 6: (2,0 điểm)

Cho x,y là các số thực dương thỏa mãn $x+2y\le 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P=\frac{1}{x^2+4y^2}+\frac{1+3x^2y^2}{xy}$.

= = = = = = = = = = **HẾT** = = = = = = = = = =

ĐÁP ÁN ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI ĐẮK LẮK

NĂM HỌC: 2020 – 2021

MÔN TOÁN 9

Bài 1: (4,0 điểm)

1) Cho biểu thức: $A=\dfrac{9}{x-\sqrt{x}-2}+\dfrac{2\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}$ với $x\ge 0$ và $x\ne 4$.

Tìm tất cả các giá trị nguyên của x sao cho biểu thức A nhận giá trị nguyên.

2) Cho phương trình $x^2-(2m+3)x+m=0$ với m là tham số. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 sao cho $x_1^2+x_2^2=9$.

Lời giải

1) Với $x\ge 0$ và $x\ne 4$

Ta có: $A=\dfrac{9}{x-\sqrt{x}-2}+\dfrac{2\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}=\dfrac{9+\left(2\sqrt{x}+5\right)\left(\sqrt{x}-2\right)-\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}$

$$=\frac{9+2x+\sqrt{x}-10-x+1}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}=\frac{x+\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}=\frac{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}=\frac{\sqrt{x}-2+2}{\sqrt{x}-2}=1+\frac{2}{\sqrt{x}-2}$$

Để biểu thức A nhận giá trị nguyên thì $\dfrac{2}{\sqrt{x}-2}$ có giá trị nguyên

$\Leftrightarrow \sqrt{x}-2\in U(2)=\{\pm 1;\pm 2\}\Rightarrow \sqrt{x}\in\{1;3;0;4\}\Rightarrow x\in\{1;9;0;16\}$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy số nguyên $x\in\{16;1;0;9\}$ thì A là một số nguyên.

2) Phương trình $x^2-(2m+3)x+m=0$ có hai nghiệm phân biệt khi

$\Leftrightarrow \Delta>0\Leftrightarrow (2m+3)^2-4m>0\Leftrightarrow 4m^2+12m+9-4m>0\Leftrightarrow (2m+1)^2+8>0$ (đúng với mọi m)

Theo Vi-ét ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=2m+3\\ x_1x_2=m\end{cases}$

Khi đó

$x_1^2+x_2^2=9\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2=9\Leftrightarrow (2m+3)^2-2m=9\Leftrightarrow 4m^2+10m=0\Leftrightarrow 2m(2m+5)=0$

$\Leftrightarrow m=0$ hoặc $m=\dfrac{-5}{2}$.

Vậy với $m=0$ hoặc $m=\dfrac{-5}{2}$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 sao cho $x_1^2+x_2^2=9$.

Bài 2: (4,0 điểm)

1) Cho parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=x+b$. Tìm b để đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $OI=\sqrt{\frac{13}{2}}$ (với I là trung điểm của AB).

2) Giải phương trình: $(x^2+1)(x-1)(x-3)=15(2x-1)^2$

Lời giải

1) Ta có phương trình hoành độ của (d) và (P) là: $x^2=x+b \Leftrightarrow x^2-x-b=0\,(*)$

Đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A, B \Leftrightarrow$ phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta>0 \Leftrightarrow 1-4b>0 \Leftrightarrow b>\frac{-1}{4}$.

Theo Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_A+x_B=1 \\ x_A.x_B=-b \end{cases}$

Vì I là trung điểm của AB nên $\begin{cases} x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2} \\ y_I=\dfrac{y_A+y_B}{2}=\dfrac{x_A^2+x_B^2}{2}=\dfrac{(x_A+x_B)^2-2x_Ax_B}{2}=\dfrac{1+2b}{2} \end{cases}$

Ta có $OI=\sqrt{\frac{13}{2}} \Leftrightarrow \sqrt{x_I^2+y_I^2}=\sqrt{\frac{13}{2}} \Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1+2b}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{13}{2}}$

$\frac{2b^2+2b+1}{2}=\frac{13}{2} \Leftrightarrow b^2+b-6=0 \Leftrightarrow (b+3)(b-2)=0 \Leftrightarrow b=-3$ (loại) hoặc $b=2$ (nhận)

Vậy $b=2$ thì đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $OI=\sqrt{\frac{13}{2}}$.

2) Ta có $(x^2+1)(x-1)(x-3)=15(2x-1)^2 \Leftrightarrow x^4-4x^3-56x^2+56x-12=0$

$\Leftrightarrow (x^4-10x^3+6x^2)+(6x^3-60x^3+36x)-(2x^2-20x+12)=0$

$\Leftrightarrow x^2(x^2-10x+6)+6x(x^2-10x+6)-2(x^2-10x+6)=0$

$\Leftrightarrow (x^2-10x+6)(x^2+6x-2)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-10x+6=0\ \ (1) \\ x^2+6x-2=0\ \ (2) \end{array}\right.$

Giải (1) ta được: $x_1=5-\sqrt{19};\ x_2=5+\sqrt{19}$

Giải (2) ta được: $x_1=-3-\sqrt{11};\ x_2=-3+\sqrt{11}$

Bài 3: (3,0 điểm)

1) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, y) thỏa mãn: $x^2-3xy+2y^2+6=0$

2) Cho x, y, z là các đôi một khác nhau. Chứng minh rằng: $(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5$ chia hết cho $5(x-y)(y-z)(z-x)$.

Lời giải

Ta có: $x^2-3xy+2y^2+6=0 \Leftrightarrow x^2-(3y)x+2y^2+6=0(1)$

Xét $\Delta_x=(-3y)^2-4(2y^2+6)=y^2-24$

Phương trình (1) có nghiệm nguyên dương khi y^2-24 là số chính phương.

Đặt $y^2-24=k^2\,(k\in\mathbb{N})$

$\Leftrightarrow y^2-k^2=24 \Leftrightarrow (y-k)(y+k)=24$

Vì $y\in\mathbb{Z}^*, k\in\mathbb{N} \Rightarrow 0<y-k<y+k$

Mặt khác $\begin{cases}(y-k)(y+k)=24\\ y-k+y+k=2y\end{cases}$

Nên $y-k,\ y+k$ có cùng tính chẵn

Xét $\begin{cases}y-k=2\\ y+k=12\end{cases} \Rightarrow y=7$

$\Rightarrow x^2-21x+104=0 \Leftrightarrow (x-8)(x-13)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=8\\ x=13\end{array}\right.$.

Xét $\begin{cases}y-k=4\\ y+k=6\end{cases} \Rightarrow y=5$

$\Rightarrow x^2-15x+56=0 \Leftrightarrow (x-8)(x-7)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=8\\ x=7\end{array}\right.$.

Vậy các cặp số nguyên dương $(x,\ y)$ thỏa mãn $x^2-3xy+2y^2+6=0$ là: $(8;7),(13;7),\ (7;5),\ (8;5)$

2) Đặt $x-y=a, y-z=b \Rightarrow z-x=-a-b=-(a+b)$

Ta có:

$$(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5=a^5+b^5-(a+b)^5=a^5+b^5-\left(a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5\right)$$

$$=-5ab\left(a^3+2a^2b+2ab^2+b^3\right)=-5ab(a+b)\left(a^2+ab+b^2\right)=5(x-y)(y-z)(z-x)\left(a^2+ab+b^2\right)$$

Vì $x,\ y,\ z$ là các đôi một khác nhau nên $(x-y)(y-z)(z-x)\neq 0$

Vậy $(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5$ chia hết cho

$$5(x-y)(y-z)(z-x)$$

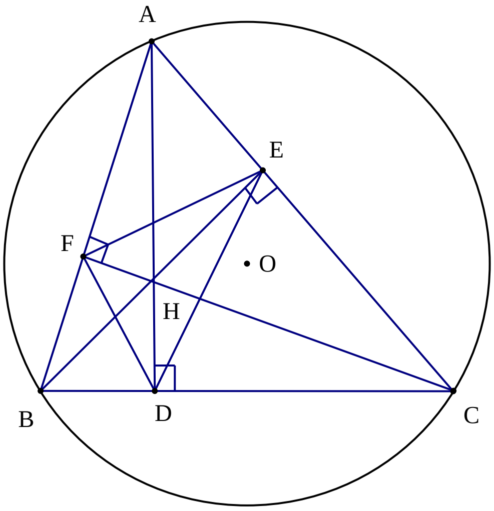
Bài 4: (4,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF của ΔABC cắt nhau tại H.

1) Chứng minh: $FA.AB=AE.AC$.

2) Chứng minh: DH là tia phân giác của $\widehat{EDF}$.

3) Giả sử $\widehat{ACB}=60^\circ$. Chứng minh: $2EF+BF=\sqrt{3}.CF$



Lời giải

1) Chứng minh: $FA.AB=AE.AC$.

Xét ΔABE và ΔACF, ta có: $\widehat{BAC}$ CHUNG, $\widehat{AEB}=\widehat{AFC}\,(=90^\circ)$

$\Rightarrow \Delta ABE \backsim \Delta ACF$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{\text{AF}}{AC} \Rightarrow FA.AB = AE.AC$.

2) Chứng minh: DH là tia phân giác của $\widehat{EDF}$.

Ta có AD, BE, CF là các đường cao của ΔABC

Nên $\widehat{BFH} = \widehat{BDH} = \widehat{HEC} = 90^\circ$

Tứ giác $BFHD$ có $\widehat{BFH} + \widehat{BDH} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

nên nó nội tiếp được đường tròn $\Rightarrow \widehat{HDF} = \widehat{HFB}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{FH}$)(1)

Tứ giác $CEHD$ có $\widehat{CEH} + \widehat{CDH} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

nên nó nội tiếp được đường tròn $\Rightarrow \widehat{HDE} = \widehat{HCE}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{EH}$)(2)

Mà $\widehat{FBH} = \widehat{HCE}$ (vì $\Delta ABE \backsim \Delta ACF$) (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow \widehat{FDH} = \widehat{HDE}$ hay DH là tia phân giác của $\widehat{EDF}$.

3) Giả sử $\widehat{ACB} = 60^\circ$. Chứng minh: $2EF + BF = \sqrt{3}.CF$

Tứ giác $AEHF$ có $\widehat{AFH} + \widehat{AEH} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

nên nó nội tiếp được đường tròn $\Rightarrow \widehat{CFE} = \widehat{EAD}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{HE}$)

xét ΔFCE và ΔADE có: $\widehat{CFE} = \widehat{DAE}$ (cmt) VÀ $\widehat{ECF} = \widehat{EDA}$ ($CEHD$ nội tiếp)

$$\Rightarrow \Delta FCE \backsim \Delta ADE \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{FE}{FC} = \frac{AE}{AD} (4)$$

xét ΔAEH và ΔADC có: $\widehat{AEH} = \widehat{ADC} = 90^\circ$; $\widehat{EAH}$ chung

$\Rightarrow \Delta EAH \backsim \Delta ADC$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AE}{AD} = \dfrac{HE}{CD}$ (5)

mặt khác ΔAEH có $\widehat{AEH} = 90°$ (GT), $\widehat{AHE} = \widehat{ACB} = 60^\circ$ ($CEHD$ nội tiếp)

$\Rightarrow \widehat{HAE} = 30^0 \Rightarrow EH = \dfrac{1}{2}AH$ (6)

Từ (4), (5), (6) suy ra $\dfrac{FE}{FC} = \dfrac{HE}{CD} \Leftrightarrow \dfrac{FE}{FC} = \dfrac{HA}{2CD} \Leftrightarrow \dfrac{2FE}{FC} = \dfrac{HA}{CD}$ (7)

Xét ΔBFC và ΔHDC có: $\widehat{BFC} = \widehat{HDC} = 90^\circ$ (gt); $\widehat{BCF}$ chung.

$\Rightarrow \Delta BFC \backsim \Delta HDC$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{BF}{CF} = \dfrac{HD}{CD}$ (8)

cộng vế theo vế của (7), (8) ta được : $\dfrac{2EF}{FC} + \dfrac{BF}{CF} = \dfrac{AH}{CD} + \dfrac{DH}{CD}$ hay $\dfrac{2EF + BF}{CF} = \dfrac{AD}{CD}$

lại xét ΔACD có $\widehat{ADC} = 90^\circ$ (gt)(7) $\Rightarrow \tan \widehat{ACD} = \dfrac{AD}{CD} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$

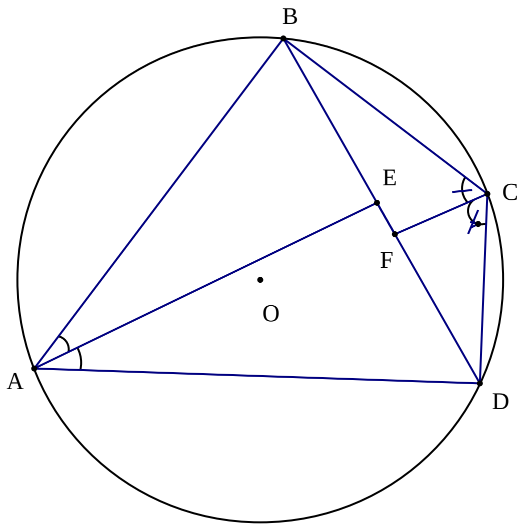
$\Rightarrow \dfrac{2EF + BF}{CF} = \dfrac{AD}{CD} = \sqrt{3} \Leftrightarrow 2EF + BF = \sqrt{3}CF$

Bài 5: (2,0 điểm)

Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $\widehat{BCD} = 120^\circ$, tia phân giác của $\widehat{DAB}$ cắt BD tại E, tia phân giác của $\widehat{BCD}$ cắt BD tại F .

Chứng minh rằng: $\frac{1}{AB}+\frac{1}{BC}+\frac{1}{CD}+\frac{1}{DA}=\frac{\sqrt{3}}{AE}+\frac{1}{CF}$

Lời giải



Ta có $S_{ABD}=S_{ABE}+S_{ADE}\Leftrightarrow 2S_{ABD}=2S_{ABE}+2S_{ADE}$

$\Leftrightarrow AB.AD.\sin\widehat{BAD}=AB.AE.\sin\widehat{BAE}+AD.AE.\sin\widehat{DAE}$

$\Leftrightarrow AB.AD.\sin 60^\circ=AB.AE.\sin 30^\circ+AD.AE.\sin 30^\circ$

$\Leftrightarrow AB.AD.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}.AE\left(AB+AD\right)$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{AE}=\frac{AB+AD}{AB.AD}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AD}(1)$

CM tương tự:

Ta có $S_{CBD}=S_{BCF}+S_{CDF}\Leftrightarrow 2S_{BCD}=2S_{BCF}+2S_{CDF}$

$\Leftrightarrow CB.CD.\sin\widehat{BCD}=CB.CF.\sin\widehat{BCF}+CD.CF.\sin\widehat{DCF}$

$\Leftrightarrow CB.CD.\sin 120^\circ=CB.CE.\sin 60^\circ+CD.CF.\sin 60^\circ$

$\Leftrightarrow CB.CD.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}.CF\left(CB+CD\right)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{CF}=\frac{CB+CD}{CB.CD}=\frac{1}{CB}+\frac{1}{CD}\ (2)$

Cộng vế theo vế của (1), (2) ta có: $\frac{1}{AB}+\frac{1}{BC}+\frac{1}{CD}+\frac{1}{DA}=\frac{\sqrt{3}}{AE}+\frac{1}{CF}$

Bài 6: (2,0 điểm)

Cho x,y là các số thực dương thỏa mãn $x+2y\le 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P=\frac{1}{x^2+4y^2}+\frac{1+3x^2y^2}{xy}$.

Lời giải

Ta có: $P=\frac{1}{x^2+4y^2}+\frac{1+3x^2y^2}{xy}=\frac{1}{x^2+4y^2}+\frac{1}{xy}+3xy=\left(\frac{1}{x^2+4y^2}+\frac{1}{xy}\right)+3\left(\frac{1}{4xy}+16xy\right)-45xy$

Lại có $\frac{1}{x^2+4y^2}+\frac{1}{4xy}\ge\frac{4}{x^2+4y^2+4xy}=\frac{4}{(x+2y)^2}\ge 4\ \left(0<x+2y\le 1\right)$

$$3\left(\frac{1}{4xy}+6xy\right)\ge 3.2\sqrt{\frac{1}{4xy}.16xy}=3.2.2=12$$

$$1\ge x+2y\ge 2\sqrt{2xy}>0\Leftrightarrow xy\le\frac{1}{8}\Leftrightarrow -45xy\ge\frac{-45}{8}$$

Do đó $P \ge 4+12-\frac{45}{8}=\frac{83}{8}$. Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} x>0, y>0 \\ x+2y=1 \\ x^2+4y^2=4xy \\ \frac{1}{4xy}=16xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{4} \end{cases}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $\frac{83}{8} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{4} \end{cases}$.

= = = = = = = = = = **HẾT** = = = = = = = = = =

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ TĨNH

ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề thi có 01 trang gồm 13 câu)

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH LỚP 9
NĂM HỌC: 2020 – 2021
PHẦN THI CÁ NHÂN
Môn: TOÁN
Thời gian làm bài: 120 phút

I. PHẦN GHI KẾT QUẢ: ***(10 điểm, thí sinh chỉ cần ghi kết quả vào giấy thi)***

Câu 1: Rút gọn biểu thức A = $\sqrt{3+\sqrt{5+2\sqrt{3}}}+\sqrt{3-\sqrt{5+2\sqrt{3}}}$

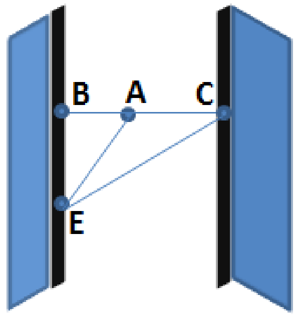
Câu 2: Tính giá trị biểu thức $M=\frac{\sqrt{x^2-6x+16}}{x^3-5x^2+x-1}$ khi x = 3 + $\sqrt{2}$.

Câu 3: Cho 5 chữ cái C, O, V, I, D để biểu thị 5 chữ số khác nhau và khác 0. Tổng của 5 số COVID, DCOVI, IDCOV, VIDCO, OVIDC là 277775. Tính C + O + V + I + D.

Câu 4: Để tổ chức kỳ thi HSG lớp 9 Hội đồng thi X dự định sắp xếp mỗi phòng thi 15 thí sinh thì thấy thừa ra hai em. Nếu bớt đi một phòng thi thì tất cả thí sinh dự thi vừa đủ chia đều cho các phòng còn lại. Hỏi hội đồng thi X có tất cả bao nhiêu thí sinh dự thi. Biết rằng các thí sinh dự thi các môn khác nhau có thể ngồi cùng một phòng và mỗi phòng thi không được xếp quá 22 thí sinh.

Câu 5: Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức P = $2a^2 + b^2 - 2ab - 8a + 2b + 12$

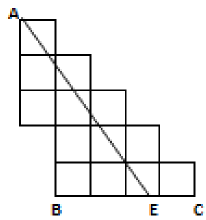
Câu 6: Để đo khoảng cách từ chiếc thuyền đang đậu ở vị trí A đến bờ sông bên kia. Nam xác định các điểm B, C ở hai bờ sông so cho A, B, C thẳng hàng và BC vuông góc với hai bờ sông (giả thuyết hai bờ sông song song với nhau), rồi chọn một điểm E ở bờ sông bên này (cùng bờ với Nam) (Hình bên). Tiến hành đo đạc được BE = 90m và các góc $\widehat{BEA}=30^0, \widehat{BEC}=60^0$. Hỏi Nam tính được khoảng cách từ chiếc thuyền đến bờ sông bên kia bằng bao nhiêu?



Câu 7: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x(x+1)-y(y+1)=0 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$

Câu 8: Cho đường thẳng d: y=(2m-3)x – 1. Tìm tất cả các giá trị m để đường thẳng d cắt trục Ox, Oy tại hai điểm A và B sao cho diện tích tam giác AOB bằng 4.

Câu 9: Hình bên gồm 13 hình vuông đều có diện tích bằng 1cm^2 . Các điểm A, B, C là các đỉnh của các hình vuông (như hình vẽ). Điểm E nằm trên cạnh BC sao cho AE chia hình gồm 13 hình vuông bên thành hai phần có diện tích bằng nhau. Tính độ dài đoạn BE.



Câu 10: Cho tam giác ABC có góc $\widehat{BAC}=90^0, \widehat{ABC}=20^0$. Các điểm P và Q lần lượt nằm trên các cạnh AC, AB sao cho $\widehat{ABP}=10^0$ và $\widehat{ACQ}=30^0$. Tính $\widehat{PQA}$.

II. PHẦN TỰ LUẬN: ***(Thí sinh trình bày lời giải vào tờ giấy thi)***

Câu 11. ***(3 điểm)*** Giải phương trình $(x^2 - 1)(x+3)(x+5) = 9$.

Câu 12. ***(5 điểm)*** Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O. Gọi M là trung điểm AB. Lấy hai điểm D, E lần lượt nằm trên cạnh AB, AC sao cho BD<DA, AE<EC và OD = OE.

a) Chứng minh $OA^2 - OD^2$ = DA.DB.
b) Gọi G, H, K lần lượt là trung điểm của đoạn BE, CD và ED. Chứng minh rằng $\widehat{KGH}=\widehat{EKH}$.

Câu 13. ***(2 điểm)*** Cho các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức P = xy + yz + zx – xyz.

----------- HẾT -------------

Lưu ý: - Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay;
- Giám thị không giải thích gì thêm.

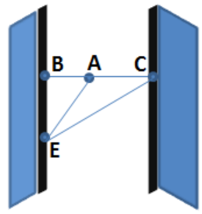
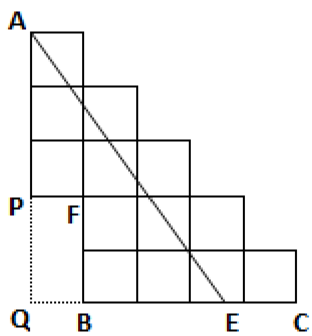
Họ và tên thí sinh: …………………………………………… Số báo danh: ………………………………..

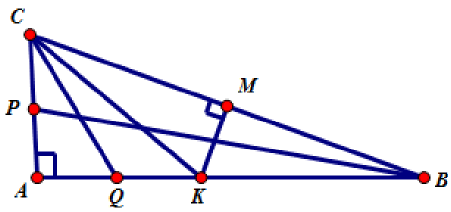
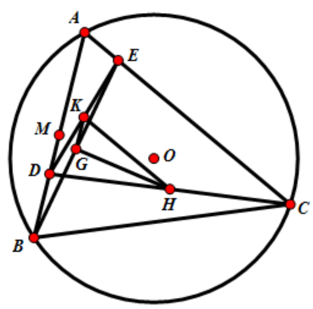
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ TĨNH

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH LỚP 9
NĂM HỌC: 2020 – 2021
PHẦN THI CÁ NHÂN - Môn: TOÁN
HƯỚNG DẪN CHẤM

Lưu ý: - Từ câu 1 đến câu 10 thí sinh chỉ cần ghi kết quả, không trình bày lời giải.
- Mọi cách giải các đáp án đúng và ngắn gọn đều cho điểm tương ứng.

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1	Đáp số: A = $1+\sqrt{3}$ $A^2 = \left(3+\sqrt{5+2\sqrt{3}}\right)+\left(3-\sqrt{5+2\sqrt{3}}\right)+2\sqrt{3+\sqrt{5+2\sqrt{3}}}.\sqrt{3-\sqrt{5+2\sqrt{3}}}$ = $6+2\sqrt{9-(5+2\sqrt{3})}$ = $6+2\sqrt{4-2\sqrt{3}}$ = $2+2(\sqrt{3}-1)$ = $4+2\sqrt{3}$ = $(1+\sqrt{3})^2$ => A = $1+\sqrt{3}$	1,0đ
Câu 2	Đáp số: M = $\frac{-3}{8}$ Ta có: $(x-3)^2 = 2 \Leftrightarrow x^2-6x+7=0$ $\sqrt{x^2-6x+16} = \sqrt{x^2-6x+7+9} = 3$ $x^3-5x^2+x-1 = (x^3-6x^2+7x)+x^2-6x+7-8 = -8$ => M = $\frac{-3}{8}$	1,0đ
Câu 3	Đáp số: C + O + V + I + D = 25. Ta có: COVID + DCOVI + IDCOV + VIDCO + OVIDC = 277775 ⇨ (11111)(C + O + V + I + D) = 277775 ⇔ C + O + V + I + D = 25	1,0đ
Câu 4	Đáp án: Hội đồng thi X có tất cả 72 thí sinh dự thi. Gọi số phòng dự thi ban dầu là x, $x \in N$, $x \geq 2$ Vậy số thí sinh dự thi tai hội đồng X là: 15x + 2 Sau khi bớt một phòng thì thì mỗi phòng thi đều có y thí sinh, $y \in N$, $0<y\leq 22$ Ta có: (x-1)y = 15x + 2 ⇔ y = $\frac{15x+2}{x-1} = 15+\frac{17}{x-1}$ Vì x, y $\in N$ => $x \in \{1;17\}$ TH1: x – 1= 1 ⇔ x = 2 => y = 32 (loại) TH2: x – 1 = 17 ⇔ x = 18 => y =16 (tm) Vậy số thí sinh dự thi là 15.18 + 2 = 272	1,0đ
Câu 5	Đáp số: Giá trị lớn nhất của P là 2 $P=(b-a+1)^2+(a-3)^2+2\geq 2$ Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases}$	1,0đ

Câu 6	Đáp số: $AC = 60\sqrt{3}m$ AC = BC – BA = BE.tan60^0 – BE.tan30^0 = $60\sqrt{3}$m  	1,0đ
Câu 7	Đáp số: Nghiệm của hệ là (1; -2); (-2;1), $\left(\frac{\sqrt{10}}{2};\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{10}}{2};-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$ $\begin{cases} x(x+1)-y(y+1)=0 \ (1) \\ x^2+y^2=5 \qquad (2) \end{cases}$ (1) ⇔ $x(x+1)-y(y+1)=0$ ⇔ (x – y)(x + y +1) = 0 ⇔ $\left[\begin{array}{l} y=x \\ y=-x-1 \end{array}\right.$ * Với y = x, thay vào (2) ta được $2x^2 = 5$ ⇔ $x=\pm\frac{\sqrt{10}}{2} \Rightarrow y=\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$ * Với y = -x – 1, thay vào (2) ta được $x^2 + (x+1)^2 = 5$ ⇔ $2x^2 + 2x - 4 = 0$ ⇔ 2(x-1)(x+2) = 0 ⇔ $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$. x = 1 => y = -2 . x = -2 => y = 1	1,0đ
Câu 8	Đáp số: $m \in \left\{\frac{23}{16};\frac{25}{16}\right\}$ HD: Đường thẳng d cắt $A\left(\frac{1}{2m-3};0\right)$; $B(0;-1)$ Do tam giác OAB vuông tại O nên ta có $S_{OAB} = \frac{1}{2}OA.OB = \frac{1}{2}.1.\left\lvert\frac{1}{2m-3}\right\rvert = 4$ ⇔ $\left\lvert\frac{1}{2m-3}\right\rvert = 8$ ⇔ $\lvert 2m-3\rvert = \frac{1}{8} \Leftrightarrow 2m-3=\pm\frac{1}{8} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\frac{25}{16} \\ m=\frac{23}{16} \end{array}\right.$	1,0đ
Câu 9	Đáp số: BE = $\frac{12}{5}cm$ Mỗi hình vuông có diện tích bằng 1cm^2 nên mỗi hình vuông đó có cạnh bằng 1cm. Gọi các điểm P, Q, F như hình vẽ. Dễ thấy để AE chia hình gồm 13 hình vuông bên thành hai phần bằng nhau thì AE không PF. Ta có: $S_{AQC} = S_{QBPF} + \frac{1}{2}S_{13\ hình\ vuông} = 2 + \frac{13}{2} = \frac{17}{2}$ => $\frac{1}{2}AQ.QE = \frac{17}{2} \Leftrightarrow AE = \frac{17}{AQ} = \frac{17}{5} \Rightarrow BE = QE - 1 = \frac{17}{5} - 1 = \frac{12}{5}(cm)$  	1,0đ
Câu 10	Đáp số: $\widehat{PQA} = 40^0$. Ta có: $\widehat{ACB} = 180^0 - \widehat{ABC} = 70^0$ $\widehat{ACQ} = 30^0 \Rightarrow AQ = \frac{1}{2}CQ(1)$ Gọi M là trung điểm CB và K là điểm trên AB sao cho KM ⊥ BC Khi đó ta có $\triangle ABC \backsim \triangle MBK \Rightarrow \frac{MB}{BK} = \frac{AB}{BC}$ (2) Và $\widehat{KCB} = \widehat{KBC} = 20^0 \Rightarrow \widehat{QCK} = \widehat{BCQ} - 20^0 = 20^0$ Do đó: CK, BP lần lượt là phân giác của góc $\widehat{QCB}$ và $\widehat{ABC}$, suy ra $\frac{QC}{QK} = \frac{CB}{BK}; \frac{AB}{AP} = \frac{CB}{CP} \Leftrightarrow \frac{AB}{CB} = \frac{AP}{CP}(3)$	1,0đ

	Từ (1), (2) và (3) ta có: $\frac{QC}{QK} = \frac{\frac{1}{2}CQ}{QK} = \frac{\frac{1}{2}CB}{BK} = \frac{BM}{BK} = \frac{BA}{BC} = \frac{AP}{PC} \Rightarrow \frac{AQ}{QK} = \frac{AP}{PC}$ Suy ra PQ// CK (định lý đảo talet) $\Rightarrow \widehat{CQP} = \widehat{QCK} = 20^0$ $\Rightarrow \widehat{PQA} = \widehat{AQC} - \widehat{CQP} = 60^0 - 20^0 = 40^0$. 	
Câu 11 (3đ)	$(x^2 - 1)(x + 3)(x+5) = 9 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x+3)(x+5)=9$ $\Leftrightarrow (x^2 + 4x - 5)(x^2 + 4x + 3) = 9$	1,0đ
	Đặt $t = x^2 + 4x + 3$ ta được $t(t-8) = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 9 \end{array}\right.$	1,0đ
	Với $t = -1 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = -1 \Leftrightarrow (x + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$	0,5đ
	Với $t = 9 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 10 \Leftrightarrow x = -2 \pm \sqrt{10}$ Vậy nghiệm của phương trình là: -2; $-2 - \sqrt{10}$; $-2 + \sqrt{10}$	0,5đ
Câu 12 (5đ)		
	a) Do M à trung điểm của AB nên OM ⊥ AB, suy ra ta có $OA^2 - OD^2 = (OM^2 + MA^2) - (OM^2 + MD^2)$	1,5đ
	$=MA^2 - MD^2 = (MA - MD)(MA + MD) = DB.DA$ (đpcm)	1,5đ
	b) Do G, H, K lần lượt là trung điểm của đoạn BE, CD, ED nên KG//AB và KH//AC suy ra $\widehat{GKH} = \widehat{BAC}$ (1) và $\frac{KG}{DB} = \frac{KH}{EC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{KG}{KH} = \frac{DB}{EC}$ (2)	0,5đ
	Mặt khác chứng minh tương tự câu a ta có: $OA^2 - OE^2 = EC.EA$	0,5đ
	Do OD = OE và kết quả cuả câu a ta có $\Rightarrow OA^2 - OE^2 = OA^2 - OD^2 \Leftrightarrow DB.DA = EC.EA \Leftrightarrow \frac{DB}{EC} = \frac{EA}{DA}$ (3)	0,5đ
	Từ (2) và (3) suy ra $\frac{KG}{KH} = \frac{EA}{DA}$ (4) Từ (1) và (4) suy ra hai tam giác EAD và GHK đồng dạng nên góc $\widehat{DEA} = \widehat{KGH}$. Mà KH//AC nên $\widehat{DEA} = \widehat{HKE}$ suy ra $\widehat{KGH} = \widehat{EKH}$. (ĐPCM)	0,5đ
Câu 13 (2đ)	$2P = 2(xy + yz + zx) - 2xyz = 2(xy + yz + zx) + x^2 + y^2 + z^2 - 1 = (x + y + z)^2 - 1$	0,5đ
	Mặt khác $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1 \Leftrightarrow x^2y^2 + 2xyz + z^2 = 1 - x^2 - y^2 + x^2y^2$ $\Leftrightarrow (xy + z)^2 = (1 - x^2)(1- y^2)$	0,5đ
	Từ $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1 \Rightarrow x^2 < 1$; $y^2 < 1 \Rightarrow 1 - x^2 > 0$; $1 - y^2 > 0$ Áp dụng cô-si, ta có $(1-x^2)(1- y^2) \le \left(\frac{2-x^2-y^2}{2}\right)^2 \Leftrightarrow xy + z \le \frac{2-x^2-y^2}{2}$ $\Leftrightarrow z \le \frac{2-x^2-y^2-2xy}{2} = \frac{2-(x+y)^2}{2}$	0,5đ
	Mặt khác $(x + y)^2 + 1 \ge 2(x+y) \Rightarrow x + y \le \frac{(x+y)^2+1}{2}$ Do đó: $2P = (x + y + z)^2 - 1 \le \left(\frac{(x+y)^2+1}{2} + \frac{2-(x+y)^2}{2}\right)^2 - 1 = \frac{5}{4} \Rightarrow P \le \frac{5}{8}$ Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} 1 - x^2 = 1 - y^2 \\ (x + y)^2 = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{2}$	0,5đ

------------ HẾT --------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH TUYÊN QUANG

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH THCS NĂM 2021
Môn thi: **TOÁN**

Thời gian làm bài: **150 phút**, *không kể thời gian giao đề*

(Đề thi này có 01 trang)

Câu 1(5.0 điểm)

a)Rút gọn biểu thức : $S=\dfrac{1}{1^2+2.1}+\dfrac{1}{3^2+2.3}+\dfrac{1}{5^2+2.5}+......+\dfrac{1}{2021^2+2.2021}$

b)Cho $a;b>0$ thỏa mãn : $\sqrt{a+1}+\sqrt{2b}=6$.Chứng minh : $a+b\ge 11$

Câu 2: (5.0 điểm)Giải các phương trình và hệ phương trình sau :

a) $x^4-5x^2+6=0$

b) $\begin{cases} x^2+xy-2x-y+1=0 \\ \sqrt{2x+y-1}-x+2=0 \end{cases}$

Câu 3: (5 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC $(AB<AC)$ nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I) .Gọi D là tiếp điểm của BC với đường tròn (I); AI cắt lại đường tròn (O) tại điểm $M\ne A$; MD cắt lại đường tròn (O) tại $Q\ne M$; AP là đường kính của đường tròn (O).Chứng minh rằng

a) ΔMBQ đồng dạng với tam giác MDB

b) $MI^2=MQ.MD$

c)Ba điểm $P;I;Q$ thẳng hàng

Câu 4: (3,0 điểm)

a)Tìm tất cả các số nguyên x thỏa $A=\dfrac{2x+1}{3x+1}\in Z$

b)Chứng minh rằng : $2^{\frac{2^{p-1}-1}{3}}-1$ chia hết cho 2^p-1 với mọi số nguyên tố $p>3$

Câu 5: *(2,0 điểm)*

Có hai chiếc máy in thẻ đặc biệt A và B có thể in ra những tấm thẻ có chứa các bộ số có dạng $(a;b)$ trong đó a là mã số của thẻ; b là mã số của người dùng thẻ đó (trên mỗi thẻ có đúng 1 bộ số .Khi đưa thẻ có chứa bộ số $(a;b)$ vào máy in A máy sẽ in ra thẻ có bộ số $(6a;b+5)$ và trả lại thẻ có bộ số (a,b) ban đầu ; khi đưa hai thẻ có bộ số $(a;b)$ và (b,c) vào máy in B máy sẽ in ra thẻ có bộ số $(6a;c)$ và trả lại 2 thẻ có bộ số $(a;b)$ và (b,c) ban đầu .Hỏi từ thẻ có bộ số $(22,12)$ ban đầu ; hai máy in $A;B$ có thể in ra thẻ có bộ số $(1975;304)$ hay không ?Vì sao .

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1:

a) Ta có công thức tổng quát : $(2n+1)^2 + 2.(2n+1) = (2n+1)(2n+3)$

Và nhận thấy $(2n+3)-(2n+1) = 2$

$$\Rightarrow \frac{1}{(2n+1)^2+2(2n+1)} = \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2}.\frac{2}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)$$

Áp dụng ta có :$1^2+2.1 = 1.3$; $3^2+2.3 = 3.5$; $5^2+2.5 = 5.7$,…….; $2021^2+2.2021 = 2021.2023$

Vậy $S = \frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+.......+\frac{1}{2019.2021}+\frac{1}{2021.2023}$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+.......+\frac{1}{2019}-\frac{1}{2021}+\frac{1}{2021}-\frac{1}{2023}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2023}\right) = \frac{1011}{2023}$$

b)Bất đẳng thức cần chứng minh $\Leftrightarrow a+1+b \geq 12$

Theo bđt Cô Si ta được : $(a+1)+4 \geq 4\sqrt{a+1}$

Và $b+8 \geq 2\sqrt{8b} = 4\sqrt{2b}$

Cộng lại ta có : $(a+1)+b+12 \geq 4\left(\sqrt{a+1}+\sqrt{2b}\right) = 4.6 = 24 \Rightarrow a+b \geq 11$

<u>Câu 2</u>:

a)Giải phương trình : $x^4-5x^2+6=0$

Đặt $t = x^2\ (t \geq 0) \Rightarrow t^2-5t+6=0 \Leftrightarrow (t-2)(t-3)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}; \pm\sqrt{3}$$

Kết luận : $x = \pm\sqrt{2}; \pm\sqrt{3}$ là các nghiệm của phương trình

b)Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2+xy-2x-y+1=0 (1) \\ \sqrt{2x+y-1}-x+2=0 (2) \end{cases}$$

Xét phương trình $(1) \Leftrightarrow (x-1)^2+y(x-1)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+y-1)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=1-y \end{array}\right.$$

Xét $x=1\Rightarrow\sqrt{y+1}+1=0$ (thay vào (2)) (vô nghiệm)

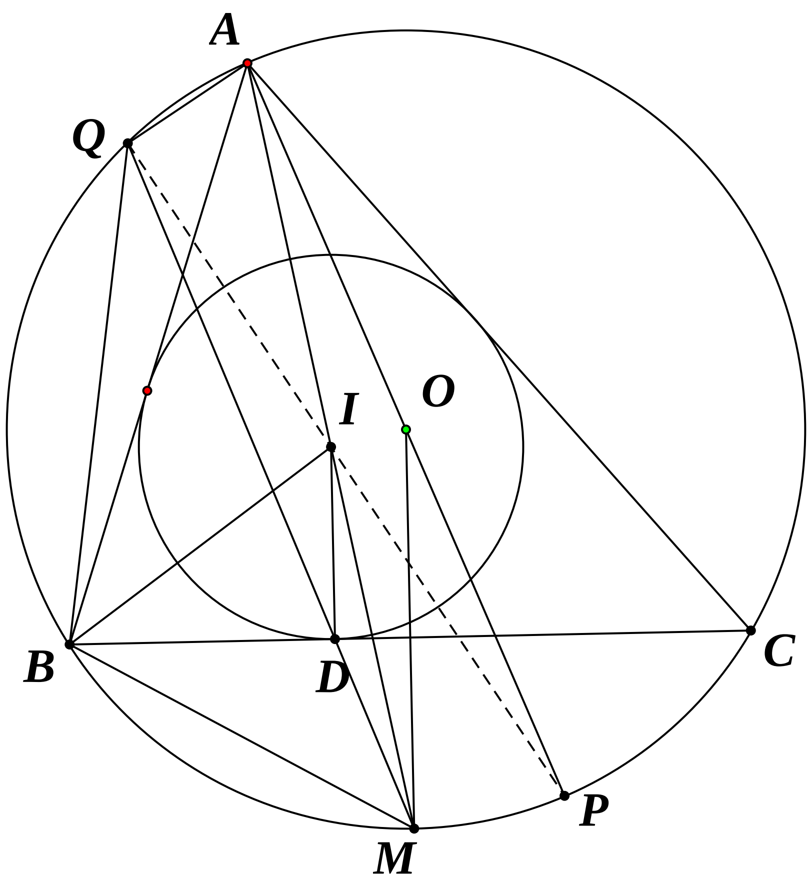
Xét $x=1-y$ thay vào (2) ta được : $\sqrt{1-y}+y+1=0$

$$\Leftrightarrow\sqrt{1-y}=-y-1\Leftrightarrow\begin{cases}-y-1\geq 0\\1-y=y^2+2y+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y\leq -1\\y^2+3y=0\end{cases}\Leftrightarrow y=-3$$

Khi $y=-3\Rightarrow x=4$

Kết luận : $(x;y)=(4;-3)$ là nghiệm của hệ phương trình

Câu 3:



a)Ta có AI là phân giác góc $\widehat{BAC}\Rightarrow MB=MC$ (M là điểm chính giữa cung nhỏ BC)

Do đó $\widehat{DBM}=\widehat{BQM}$ (2 góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

Vậy ΔBMD đồng dạng $\Delta QMB\Rightarrow\dfrac{MB}{MQ}=\dfrac{MD}{MB}\Rightarrow MB^2=MD.MQ$

b)Ta chứng minh : $\widehat{MBI}=\widehat{MIB}$

Ta có : $\widehat{MIB}=\widehat{IBA}+\widehat{IAB}$ và $\widehat{IBA}=\widehat{CBI}$ (BI là phân giác $\widehat{ABC}$)

Và $\widehat{IAB}=\widehat{CAM}=\widehat{MBC}\Rightarrow\widehat{MIB}=\widehat{CBI}+\widehat{MBC}=\widehat{MBI}$ vậy nên tam giác MIB cân ở M

Vậy nên $MI^2 = MD.MQ$

c)Ta có : $\widehat{AQI} = \widehat{AQM} - \widehat{IQM} = 180^\circ - \widehat{ACM} - \widehat{IQM}$

Lại có $ID//OM \Rightarrow \widehat{DIM} = \widehat{AMO}$ (so le trong)

Và $MI^2 = MD.MQ \Rightarrow \dfrac{MI}{MD} = \dfrac{MQ}{MI} \Rightarrow \Delta MIQ$ đồng dạng $\Delta MDI\,(c.g.c)) \Rightarrow \widehat{IQM} = \widehat{DIM}$

Và cũng có : $\widehat{ACM} = \dfrac{1}{2}\widehat{AOM} = \dfrac{1}{2}\left(180^\circ - 2\widehat{AMO}\right) = 90^\circ - \widehat{AMO}$

Thay vào ta có $\widehat{AQI} = 180^\circ - 90^\circ + \widehat{AMO} - \widehat{AMO} = 90^\circ$ (1)

Mặt khác AP là đường kính của đường tròn $(O) \Rightarrow \widehat{AQP} = 90^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) ta được ba điểm $P; I; Q$ thẳng hàng (đpcm)

<u>Câu 4</u>:

a)Tìm tất cả các số nguyên x thỏa $A = \dfrac{2x+1}{3x+1} \in Z$

Ta có : $A = \dfrac{2x+1}{3x+1} \in Z \Rightarrow (2x+1) \vdots (3x+1)$ (vì tử và mẫu đều là số nguyên)

$\Rightarrow 3(2x+1) \vdots (3x+1) \Rightarrow 2(3x+1)+1 \vdots (3x+1) \Rightarrow 1 \vdots (3x+1)$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3x+1=1 \\ 3x+1=-1 \end{array}\right. \Rightarrow x = 0$ (thử lại thấy thỏa mãn)

b)Ta chứng minh : $2^{p-1} - 1 \vdots (3p)$

Ta có $(2; p) = 1$ (vì p nguyên tố $p > 3$) nên $2^{p-1} \equiv 1$ (mod p) (đlý Ferrmat nhỏ)

Vậy $2^{p-1} - 1 \vdots p$

Và p lẻ nên $p = 2m+1$ (vì p nguyên tố $p > 3$)

Nên $2^{p-1} - 1 = 2^{2m} - 1 = 4^m - 1 \vdots (4-1) \Rightarrow 2^{p-1} - 1 \vdots 3$

Mặt khác $(3; p) = 1$ nên $2^{p-1} - 1 \vdots (3p) \Rightarrow \dfrac{2^{p-1}-1}{3} \vdots p$

Vậy $\dfrac{2^{p-1}-1}{3} \vdots p \Rightarrow \dfrac{2^{p-1}-1}{3} = p.b$ ($b \in Z^+$)

Do đó $2^{\frac{2^{p-1}-1}{3}} - 1 = 2^{pb} - 1 = \left(2^p\right)^b - 1^b \vdots \left(2^p - 1\right)$ (đpcm)