TRƯỜNG THPT CHUYÊN
LÊ QUÝ ĐÔN TP ĐÀ NẴNG

KỲ THI HỌC SINH GIỎI CÁC TRƯỜNG THPT CHUYÊN
DUYÊN HẢI VÀ ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ
NĂM HỌC 2022-2023

ĐỀ ĐỀ NGHỊ

ĐỀ MÔN THI: TOÁN LỚP 10
Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Câu 1. (4,0 điểm) Cho tam thức bậc hai $f(x)=ax^2+bx+c,$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$. Biết rằng phương trình $f\left(f\left(f(x)\right)\right)=f(x)$ có tám nghiệm thực phân biệt với tổng bằng S. Chứng minh rằng từ tám nghiệm đó, ta có thể chọn ra bốn nghiệm sao cho tổng của bốn nghiệm này bằng $\frac{S}{2}$.

Câu 2. (4,0 điểm) Cho x, y, z là các số thực không âm và có tổng bằng 1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=x^4y+y^4z+z^4x.$$

Câu 3. (4,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn, với $AB<AC$, nội tiếp đường tròn (O). Hai tiếp tuyến của (O) tại B và C cắt nhau ở D. Ký hiệu Ω là đường tròn có đường kính AD. Gọi E là giao điểm thứ hai của tia AO và Ω. Các tia EB, EC lần lượt cắt Ω tại điểm thứ hai là M, N. Các tia AB, AC lần lượt cắt Ω tại điểm thứ hai là R, S.

a) Chứng minh rằng hai đường thẳng RN và SM cắt nhau tại trung điểm của BC.

b) Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng RS và BC. Chứng minh rằng $\widehat{SIC}=\widehat{SIE}$.

Câu 4. (4,0 điểm) Cho dãy số nguyên (x_n) xác định bởi $x_1=1$, $x_2=4$ và $x_{n+2}=4x_{n+1}-x_n$ với mọi $n\geq 1$.

a) Tìm tất cả các số nguyên dương n để số x_n chia hết cho 3.

b) Tìm tất cả các số nguyên dương n để số x_n chia hết cho 3^{2023}.

Câu 5. (4,0 điểm) Cho 2023 đoạn thẳng có độ dài lần lượt là 1; 2; 3; …; 2023.

a) Bạn Mão muốn chọn 2 trong số 2023 đoạn thẳng này để cùng với đoạn thẳng có độ dài 2024 lập thành một tam giác. Hỏi bạn Mão có bao nhiêu cách chọn?

b) Bạn Mão muốn chọn 3 trong số 2023 đoạn thẳng này để lập thành một tam giác. Hỏi bạn Mão có bao nhiêu cách chọn?

----Hết---

HƯỚNG DẪN ĐÁP ÁN TOÁN LỚP 10

Câu 1. (4,0 điểm) Cho tam thức bậc hai $f(x)=ax^2+bx+c,$ với $a, b, c\in\mathbb{R}$. Biết rằng phương trình $f(f(f(x)))=f(x)$ có tám nghiệm thực phân biệt với tổng bằng S. Chứng minh rằng từ tám nghiệm đó, ta có thể chọn ra bốn nghiệm sao cho tổng của bốn nghiệm này bằng $\frac{S}{2}$.

Nội dung	**Điểm**
Đặt $g(x):=f(f(f(x)))-f(x)$ và $h(x):=f(f(x))-x$. Vì các nghiệm của $h(x)$ cũng là các nghiệm của $g(x)$ nên ta có thể gọi x_1,x_2,x_3,x_4 là các nghiệm thực phân biệt của $h(x)$ và $x_1,x_2,...,x_8$ là các nghiệm thực phân biệt của $g(x)$.	1,0
Vì đa thức $h(x)$ có hệ số cao nhất là a^3 và hệ số của lũy thừa bậc ba là $2a^2b$ nên theo định lý Viet, ta có $x_1+x_2+x_3+x_4=-\frac{2b}{a}$.	1,0
Vì đa thức $g(x)$ có hệ số cao nhất là a^7 và hệ số của lũy thừa bậc bảy là $4a^6b$ nên theo định lý Viet, ta cũng có $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8=-\frac{4b}{a}$ hay $S=-\frac{4b}{a}$. Vậy $x_1+x_2+x_3+x_4=\frac{S}{2}$.	2,0

Câu 2. (4,0 điểm) Cho x, y, z là các số thực không âm và có tổng bằng 1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x^4y+y^4z+z^4x$.

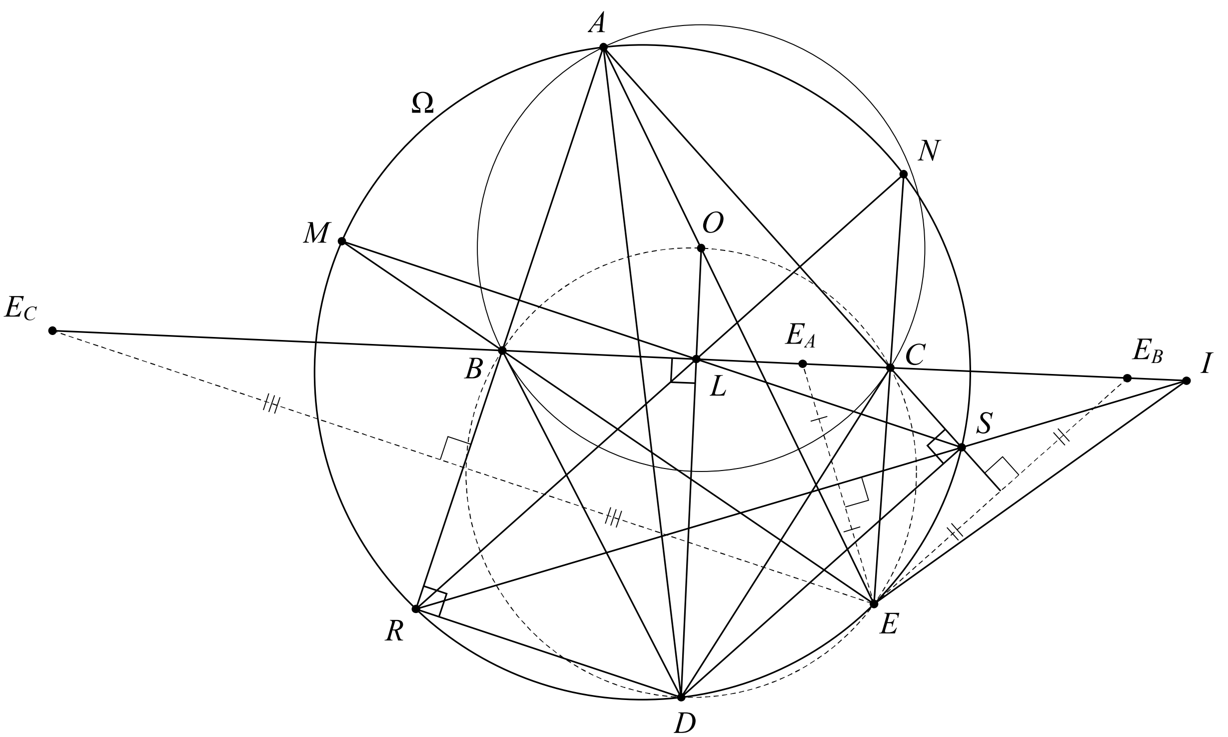
Nội dung	**Điểm**
Giả sử $x=\max\{x;y,z\}$ khi đó $y^4z\le x^3yz, z^4x\le x^3z^2$ nên $P\le x^3(xy+yz+z^2)\le x^3\left(xy+yz+\frac{z^2}{2}+\frac{xz}{2}\right)=x^3(x+z)\left(y+\frac{z}{2}\right).$	1,0
Áp dụng BĐT AM-GM cho năm số không âm, ta có $\frac{x}{4}.\frac{x}{4}.\frac{x}{4}.\frac{x+z}{4}.\left(y+\frac{z}{2}\right)\le\left[\frac{\frac{x}{4}+\frac{x}{4}+\frac{x}{4}+\frac{x+z}{4}+\left(y+\frac{z}{2}\right)}{5}\right]^5.$	1,0

Do đó $\dfrac{P}{4^4} \le \left(\dfrac{x+y+\frac{3}{4}z}{5}\right)^5 \le \left(\dfrac{x+y+z}{5}\right)^5 = \dfrac{1}{5^5}$ hay $P \le \dfrac{4^4}{5^5}$.	
Đẳng thức xảy ra khi $x=\dfrac{4}{5}; y=\dfrac{1}{5}; z=0$. Vậy giá trị lớn nhất của P là $\dfrac{4^4}{5^5}$.	1,0

Câu 3. (4,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn, với $AB < AC$, nội tiếp đường tròn (O). Hai tiếp tuyến của (O) tại B và C cắt nhau ở D. Ký hiệu Ω là đường tròn có đường kính AD. Gọi E là giao điểm thứ hai của tia AO và Ω. Các tia EB, EC lần lượt cắt Ω tại điểm thứ hai là M, N. Các tia AB, AC lần lượt cắt Ω tại điểm thứ hai là R, S.

a) Chứng minh rằng hai đường thẳng RN và SM cắt nhau tại trung điểm của BC.

b) Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng RS và BC. Chứng minh rằng $\widehat{SIC} = \widehat{SIE}$.



Nội dung	Điểm
a) Gọi L là trung điểm BC. Ta có $BLDR$ là tứ giác nội tiếp và năm điểm O, C, E, D, B cùng thuộc một đường tròn.	1,0
Do đó, $\widehat{ARN} = \widehat{AEN} = \widehat{OEC} = \widehat{BDL} = \widehat{ARL}$, suy ra đường thẳng RN đi qua L. Tương tự, đường thẳng MS cũng đi qua L. Vì vậy, hai đường thẳng RN và SM cắt nhau tại trung điểm	1,0

L của BC.	
b) Từ $\widehat{ARL}+\widehat{BAC}=\widehat{BDO}+\widehat{BOD}=90^\circ$, nên $RL\perp AC$. Tương tự $SL\perp AB$, dẫn đến L là trực tâm của tam giác ARS. Do đó, M, N tương ứng là các điểm đối xứng của L qua AB, AC.	1,0
Gọi E_A, E_B, E_C lần lượt là các điểm đối xứng của E qua RS, AC, AB. Khi đó, ba điểm E_A, E_B, E_C thẳng hàng (đường thẳng Steiner của điểm E ứng với tam giác ARS). Theo trên, các điểm E_B, E_C đều thuộc đường thẳng BC nên E_A cũng thuộc BC. Vậy $\widehat{SIC}=\widehat{SIE}$.	1,0

Câu 4. (4,0 điểm) Cho dãy số nguyên (x_n) xác định bởi $x_1=1$, $x_2=4$ và $x_{n+2}=4x_{n+1}-x_n$ với mọi $n\geq 1$.

a) Tìm tất cả các số nguyên dương n để số x_n chia hết cho 3.

b) Tìm tất cả các số nguyên dương n để số x_n chia hết cho 3^{2023}.

Nội dung	Điểm
a) Với mọi $n\geq 1$, ta có $$x_{n+2}=4x_{n+1}-x_n \Rightarrow x_{n+3}=15x_{n+1}-4x_n \Rightarrow x_{n+3}\equiv -x_n \pmod 3.$$ Đặc biệt, $x_1=1$, $x_2=4$ và $x_3=15$. Vì vậy, với $n\geq 1$, số x_n chia hết cho 3 khi và chỉ khi n là bội nguyên dương của 3.	1,0
b) Trước tiên, ta cần chứng minh bổ đề sau. **Bổ đề.** Với mọi số nguyên dương n, số $4n^2+1$ không chia hết cho 3. *Chứng minh*. Với số nguyên dương n bất kì, ta có ba trường hợp xảy ra như sau: Nếu $n=3l$ $(l\in\mathbb{N})$ thì $4n^2+1=3(12l^2)+1$ không chia hết cho 3. Nếu $n=3l+1$ $(l\in\mathbb{N})$ thì $4n^2+1=3(12l^2+8l+1)+2$ không chia hết cho 3. Nếu $n=3l+2$ $(l\in\mathbb{N})$ thì $4n^2+1=3(12l^2+16l+5)+2$ không chia hết cho 3. Bổ đề hoàn toàn được chứng minh. □	1,0
Trở lại bài toán. Phương trình đặc trưng $\lambda^2-4\lambda+1=0$ có hai nghiệm $\lambda_1=2-\sqrt{3}$, $\lambda_2=2+\sqrt{3}$. Kết hợp với $x_1=1$, $x_2=4$, ta tìm được số hạng tổng quát của dãy (x_n) là $$x_n=\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^n-\left(2-\sqrt{3}\right)^n}{2\sqrt{3}}\quad \forall n\geq 1.$$	1,0

Với mọi $n \geq 1$, chú ý rằng $\lambda_1\lambda_2 = 1$, ta có $$x_{3n} = \frac{\lambda_2^{3n} - \lambda_1^{3n}}{2\sqrt{3}} = \frac{\left(\lambda_2^n - \lambda_1^n\right)^3 + 3\lambda_1^n\lambda_2^n\left(\lambda_2^n - \lambda_1^n\right)}{2\sqrt{3}} = \frac{\left(\lambda_2^n - \lambda_1^n\right)^3}{2\sqrt{3}} + \frac{3\left(\lambda_2^n - \lambda_1^n\right)}{2\sqrt{3}} = 3x_n\left(4x_n^2 + 1\right).$$	
Giả sử tồn tại số nguyên dương n thỏa mãn x_n chia hết cho 3^{2023}, suy ra n chia hết cho 3. Đặt $n := 3^k m$, trong đó $k,\, m \in \mathbb{N}^*$ và $(m,3) = 1$. Khi đó, ta lại có $$x_n = x_{3^k m} = 3x_{3^{k-1}m}\left(4x_{3^{k-1}m}^2 + 1\right) = \cdots = 3^k x_m \prod_{i=0}^{k-1}\left(4x_{3^i m}^2 + 1\right).$$ Áp dụng bổ đề trên và $(m,3) = 1$, ta được $x_m \prod_{i=0}^{k-1}\left(4x_{3^i m}^2 + 1\right)$ không chia hết cho 3. Điều này kéo theo $k \geq 2023$, suy ra n là bội nguyên dương của 3^{2023}. Thử lại, với n là bội nguyên dương bất kì của 3^{2023}, bằng cách thực hiện tương tự trên, ta thu được x_n chia hết cho 3^{2023}. Vậy , n là bội nguyên dương của 3^{2023} thỏa mãn yêu cầu bài toán.	1,0

Câu 5. (4,0 điểm) Cho 2023 đoạn thẳng có độ dài lần lượt là 1; 2; 3; …; 2023.

a) Bạn Mão muốn chọn 2 trong số 2023 đoạn thẳng này để cùng với đoạn thẳng có độ dài 2024 lập thành một tam giác. Hỏi bạn Dần có bao nhiêu cách chọn?
b) Bạn Mão muốn chọn 3 trong số 2023 đoạn thẳng này để lập thành một tam giác. Hỏi bạn Mão có bao nhiêu cách chọn?

Nội dung	**Điểm**
a) Ta để ý rằng việc chọn 2 trong số 2023 đoạn thẳng đã cho của bạn Mão tương ứng với việc chọn cặp số nguyên (a,b) thỏa mãn $1 \leq a < b \leq 2023$ và $a + b > 2024$.	1,0
Ta có <table><tr><td>a</td><td>1</td><td>2</td><td>…</td><td>1011</td><td>1012</td><td>1013</td><td>…</td><td>2022</td><td>2023</td></tr><tr><td>Số cách chọn b</td><td>0</td><td>1</td><td>…</td><td>1010</td><td>1011</td><td>1010</td><td>…</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>Do đó, số cặp (a,b) thỏa mãn là $$0 + 1 + 2 + \cdots + 1010 + 1011 + 1010 + \cdots + 1 + 0 = 1011^2 = 1022121.$$ Vậy, bạn Mão có 1022121 cách chọn.	1,0
b) Ta để ý rằng việc chọn 3 trong số 2023 đoạn thẳng đã cho của bạn Mão tương ứng với việc chọn bộ số nguyên (a,b,c) thỏa mãn $1 \leq a < b < c \leq 2023$ và $a + b > c$.	1,0

Rõ ràng, với $c=1$, $c=2$, $c=3$, không tồn cặp số nguyên (a,b) nào thỏa mãn. Bây giờ, ta cố định $c\geq 4$ và đếm số cặp số nguyên (a,b) thỏa mãn $1\leq a<b<c$ và $a+b>c$.	
Nếu $c=2k$ (với $k\in\mathbb{N}, k\geq 2$) thì bằng cách thực hiện tương tự câu a, ta được số cặp (a,b) cần đếm là $$2\left(\sum_{i=0}^{k-2} i\right)+(k-1)=(k-1)^2.$$ Nếu $c=2k+1$ (với $k\in\mathbb{N}, k\geq 2$) thì bằng cách thực hiện tương tự câu a, ta được số cặp (a,b) cần đếm là $$2\left(\sum_{i=0}^{k-1} i\right)=(k-1)k.$$ Từ đó, ta có	1,0

c	4	5	6	7	…	2022	2023
Số cặp (a,b) thỏa	1^2	$1\cdot 2$	2^2	$2\cdot 3$	…	1010^2	$1010\cdot 1011$

Số bộ (a,b,c) cần đếm là

$$\left(1^2+2^2+\cdots+1010^2\right)+\left(1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+1010\cdot 1011\right)=\frac{1010\cdot 1011\cdot(4\cdot 1011+1)}{6}=688398325.$$

Vậy, bạn Mão có 688398325 cách chọn.

Giáo viên ra đề

Phan Nguyễn Anh Khoa