ĐỀ 02

ĐỀ HSG TOÁN 9 23-24 HUYỆN KINH MÔN

Câu 1. (2 điểm)

1) Giải phương trình: $x^4-3x^2-4=0$

2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} -4x+y=-5 \\ (x-1)(y+2)=xy-1 \end{cases}$

Câu 2. (2 điểm)

1) Rút gọn biểu thức sau:

$$A=\left(\frac{x\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}-\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\right)\left(\frac{x\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1}+\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right);\ (x\geq 0\ và\ x\neq 1)$$

2) Cho hàm số bậc nhất y = $(m^2-1)x+m+3(d)$. Tìm m để đồ thị hàm số (d) song song với đường thẳng y = 3x + 5.

Câu 3. (2 điểm)

1) Hai tỉnh A và B cách nhau 90km. Lúc 6 giờ 30 phút sáng, một xe tải đi từ tỉnh A đến tỉnh B. Đến 7 giờ 15 phút sáng cùng ngày, một xe con cũng đi từ tỉnh A đến tỉnh B đuổi theo xe tải với vận tốc lớn hơn vận tốc xe tải 20km/h. Hai xe gặp nhau tại tỉnh B. Tính vận tốc của xe tải.

2) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho đường thẳng (d): y=4x - m + 2 và Parabol (P): y= x^2. Tìm số nguyên m để đường thẳng (d) cắt parbol (P) tại hai điểm phân biệt có tọa độ A($x_1;y_1$) và B($x_2;y_2$) sao cho y $-2x_1x_2$ +2 x_2 = 1

Câu 4. (3 điểm)

Cho đường tròn (O; R) và điểm M nằm ngoài đường tròn. Vẽ các tiếp tuyến MA, MB với đường tròn(A, B là các tiếp điểm) và cát tuyến MCD không qua tâm O (điểm C nằm giữa M và D, tia MC nằm giữa 2 tia MA và MO). Gọi I là trung điểm của CD.

a) Chứng minh tứ giác AMBI nội tiếp một đường tròn

b) Đường thẳng qua C vuông góc với OA cắt AB, AD lần lượt ở N và K. Chứng minh tứ giác BCNI nội tiếp và N là trung điểm của CK.

c) Gọi Q là giao điểm của AB và MD. Chứng minh QC. MD=QD.MC

Câu 5. (1 điểm)

Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn x + y $\le z$. Chứng minh rằng:

$$A = \left(x^2+y^2+z^2\right)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right) \ge \frac{27}{2}$$

--- Hết ---

LỜI GIẢI

Câu 3.

1) Thời gian xe con đi từ A đến B là: $\frac{90}{x+20}$ (h)

Xe con đi sau xe tải: 7 giờ 15 phút - 6 giờ 30 phút = 45 phút $=\frac{3}{4}giờ$, ta có phương trình

$$\frac{90}{x}-\frac{90}{x+20}=\frac{3}{4}$$

Suy ra pt: x^2+20x - 2400 = 0

Giải phương trình tìm được $x_1=40;x_2=-60$

Có: x = 40 (thỏa mãn) và x = -60 (loại)

Vận tốc xe tải là 40km/h

2) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là:

$x^2=4x-m+2$

<=> x^2 - 4x + m - 2 = 0 (*)

Có $\Delta'=6-m$

Để (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$

=> 6 - m > 0 <=> m < 6

Theo định lí Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=4(1) \\ x_1x_2=m-2(2) \end{cases}$

Vì A($x_1;y_1$) thuộc (P) nên $y_1=x_1^2$

Theo bài ra ta có: $y_1-2x_1x_2+2x_2=1=¿x_1^2-2x_1x_2+2x_2=1$

Từ (1) => x_2 = 4 - x_1

=> $x_1^2-2x_1(4-x_1)+2(4-x_1)=1$

<=> 3x_1^2 - 10x_1 + 7 = 0

x_1 = 1; x_1 = $\frac{7}{3}$

+ Với $x_1=1=¿x_2=3$

Thay vào (2) ta có: 1.3 = m - 2 <=> m = 5 (thỏa mãn)

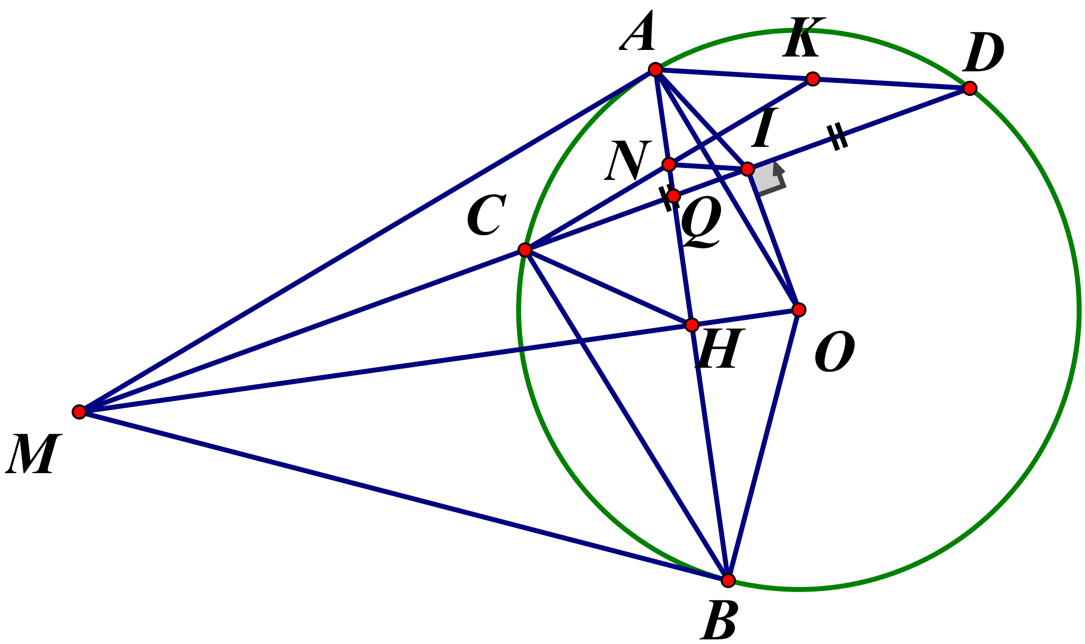
+ Với $x_1 = \frac{7}{3}$ => $x_2 = \frac{5}{3}$

Thay vào (2) ta có: $\frac{7}{3} \cdot \frac{5}{3}$ = m - 2 <=> m = $\frac{53}{9}$ (không thỏa mãn)

Vậy m = 5 đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có tọa độ $(x_1; y_1)$ và $(x_2; y_2)$ thỏa mãn:

$$y_1 - 2x_1x_2 + 2x_2 = 1$$

Câu 4.



a) Chứng minh tứ giác AMBI nội tiếp một đường tròn.

Vì MA, MB là các tiếp tuyến của (O) tại A và B

=> MA ⊥ AO tại A và MB ⊥ BO tại B

=> MAO = MBO = 90°

=> A, B thuộc đường tròn đường kính MO (1)

Mặt khác ta có I là trung điểm của dây CD không đi qua tâm nên MI ⊥ OI tại I hay MIO = 90° => I thuộc đường tròn đường kính MO (2)

Từ (1) và (2) => A, B, I thuộc đường tròn đường kính MO

=> 5 điểm A, M, I, O, B cùng thuộc một đường tròn

=> Tứ giác AMBI nội tiếp một đường tròn.

b) Theo câu a, 5 điểm M, A, I, O, B nằm trên một đường tròn

=> MAB = MIB (hai góc nội tiếp cùng chắn MB) (3)

Theo bài ra ta có:

$$\left.\begin{matrix} MA \perp OA \\ CN \perp OA \end{matrix}\right\} = \text{¿} MA \parallel CN$$

=> CNB = MAB (2 góc đồng vị) (4)

Từ (3) và (4) => MIB = CNB hay => CIB = CNB

=> Tứ giác BCNI nội tiếp

=> NIC = NBC (hai góc nội tiếp cùng chắn CN) hay NIC = ABC

Mà ADC = ABC (hai góc nội tiếp cùng chắn AC)

=> NIC = ADC mà chúng ở vị trí đồng vị => NI $\parallel KD$

Xét ΔCKD có I là trung điểm của CD (gt), NI $\parallel KD$ (cmt)

=> N là trung điểm của CK

c) Ta chứng minh được: $\Delta MCA \quad \Delta MAD (g.g)$

=> MC.MD = MA^2

Mà trong tam giác vuông MAO có: MA^2 = MH.MO

….

Nên: CDO = CHM => Tứ giác CHOD nội tiếp (có góc trong bằng góc ngoài ở đỉnh đối diện)

Do đó: OHD = OCD (2 góc nội tiếp cùng chắn OD) (5)

Lại có $\Delta COD\, cân\, tại\, O$ => OCD = ODC (6)

Mà ODC = CHM (7)

Từ (5), (6), (7) => OHD = CHM

Lại có AHM = AHO = 90° nên QHC = QHD

Hay HQ là phân giác trong của tam giác CHD

=> $\frac{QC}{QD} = \frac{HC}{HD}$ (*) (T/c đường phân giác của tam giác)

Mặt khác HQ $\perp HM$

=> HM là phân giác ngoài của tam giác CHD

=> $\frac{MC}{MD} = \frac{HC}{HD}$ (**)

Kết hợp (*) và (**) ta có: $\frac{QC}{QD} = \frac{MC}{MD}$

=> QC.MD = QD.MC (đpcm)

Câu 5.

$$A = \left(x^2+y^2+z^2\right)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right) = 3 + \frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{y^2}+\frac{z^2}{x^2}+\frac{x^2}{z^2}$$

Theo bất đẳng thức Co-si cho hai số dương ta có:

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2} \geq 2\sqrt{\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}} = 2 \text{ nên}$$

$$A \geq 5 + \frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{y^2}+\frac{z^2}{x^2}+\frac{x^2}{z^2} = 5 + \left(\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{16y^2}\right) + \left(\frac{x^2}{z^2}+\frac{z^2}{16x^2}\right) + \frac{15z^2}{16}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)$$

Theo bất đẳng thức Co-si cho hai số dương ta có:

$$\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{16y^2} \geq 2.\sqrt{\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{16y^2}} = \frac{1}{2};\ \frac{x^2}{z^2}+\frac{z^2}{16x^2} \geq 2.\sqrt{\frac{x^2}{z^2}+\frac{z^2}{16x^2}}\ ¿\ \frac{1}{2}$$

Ta có $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2} \geq 2.\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}} = \frac{2}{xy} \geq \frac{2}{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2} = \frac{8}{(x+y)^2}$

Nên $\frac{15z^2}{16}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right) \geq \frac{15z^2}{16} . \frac{8}{(x+y)^2} = \frac{15}{2}\left(\frac{z}{x+y}\right)^2 \geq \frac{15}{2}$ (do x + y $\leq z$)

Suy ra $A \geq 5+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{15}{2} = \frac{27}{2}$

Vậy $\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right) \geq \frac{27}{2}$. Dấu "=" xảy ra khi x = y =