

1. MỞ ĐẦU

1.1. Lí do chọn đề tài

Bài toán tính khoảng cách là bài toán quan trọng của chương trình Hình học không gian, do đó tính khoảng cách thường xuyên xuất hiện trong đề thi Đại học trước đây và nay là thi THPT Quốc gia môn Toán.

Việc xác định được khoảng cách cần tìm sau đó tính khoảng cách luôn là bài toán khó đối với học sinh bởi muốn giải quyết được bài toán học sinh phải có kiến thức tổng hợp về hình học. Khó khăn vướng mắc của học sinh chính là bước xác định khoảng cách, học sinh không thể chỉ ra khoảng cách cần tìm là đoạn thẳng nào và do đó không thể giải quyết được bài toán.

Làm thế nào để những em có nguyện vọng thi Đại học có thể giải quyết được trọn vẹn bài toán tính khoảng cách? Đó là câu hỏi tôi luôn trăn trở, nghiên cứu để tìm ra hướng giải và tôi đã thành công khi hướng dẫn các em so sánh khoảng cách từ điểm cần tìm với khoảng cách của một điểm khác để nhận biết, để xác định và dễ tính toán hơn.

Thực hiện nhiệm vụ công tác chuyên môn năm học 2015 - 2016 tôi đã nghiên cứu, tổng hợp những sáng kiến từ thực tiễn giảng dạy của mình thành sáng kiến kinh nghiệm với đề tài ***“Hướng dẫn học sinh giải bài toán tính khoảng cách bằng phương pháp so sánh”*** với mong muốn kinh nghiệm của mình được phổ biến tới đồng nghiệp để nâng cao chất lượng bài giảng, phổ biến tới học sinh giúp các em giải quyết được bài toán quan trọng trong đề thi THPT Quốc gia môn Toán.

1.2. Mục đích nghiên cứu

Chương trình Hình học không gian trong đề thi thường được kiểm tra, đánh giá bằng bài toán kết hợp giữa tính thể tích khối đa diện và bài toán tính khoảng cách từ một điểm tới mặt phẳng, khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song, khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau. Để giải quyết bài toán trên nhất thiết phải thực hiện qua 2 bước cụ thể như sau:

+ Xác định khoảng cách: chỉ ra khoảng cách cần tìm là đoạn thẳng nào

+ Tính khoảng cách: vận dụng các kiến thức hình học phẳng để tính khoảng cách vừa xác định được.

Vấn đề khó nhất đối với học sinh là thực hiện được bước 1, học sinh không biết bắt đầu từ đâu, vẽ hình như thế nào, xác

định hình chiếu ra sao để có thể chỉ ra được khoảng cách cần tìm.

Mục đích của sáng kiến kinh nghiệm là hướng dẫn học sinh có thể giải quyết được tất cả các bài toán tính khoảng cách bằng cách quy về khoảng cách từ một điểm tới mặt phẳng sau đó tìm cách so sánh khoảng cách cần tìm với khoảng cách từ một điểm khác mà việc xác định hình chiếu, xác định khoảng cách được thực hiện một cách dễ dàng với những kiến thức cơ bản trong sách giáo khoa.

1.3. Đối tượng nghiên cứu

- Đề tài nghiên cứu, tổng kết về các dạng toán tính khoảng cách thường gặp trong quá trình học Chương trình Hình học không gian bậc THPT.

- Mức độ của các bài toán tương ứng là mức độ vận dụng thấp và vận dụng cao trong nội dung chương trình thi THPT Quốc gia do Bộ Giáo dục và Đào tạo ban hành.

- Đề tài được áp dụng thực nghiệm và đối chứng tại 2 lớp 12 Ban KHTN Trường THPT Triệu Sơn 1 năm học 2014 - 2015 và năm học 2015 - 2016.

1.4. Phương pháp nghiên cứu

- Xây dựng hệ thống các khái niệm về khoảng cách của Hình học không gian.

- Xây dựng cơ sở lí thuyết để xác định khoảng cách từ điểm tới mặt phẳng, khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song, khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song, khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.

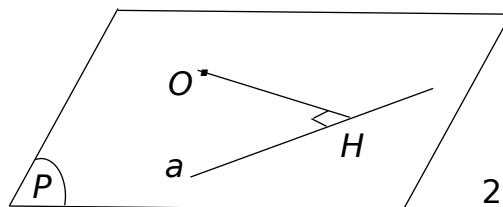
- Tổng hợp tất cả các bài toán tính khoảng cách để quy về bài toán cơ bản nhất đó là: khoảng cách từ một điểm và tới mặt phẳng và cuối cùng là khoảng cách từ một điểm tới đường thẳng.

- Trên cơ sở xây dựng hệ thống lí thuyết giáo viên hướng dẫn học sinh phương pháp so sánh khoảng cách cần tìm với khoảng cách từ một điểm khác mà việc xác định hình chiếu, xác định khoảng cách được thực hiện một cách dễ dàng.

2. NỘI DUNG SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

2.1. Cơ sở lí luận của sáng kiến kinh nghiệm

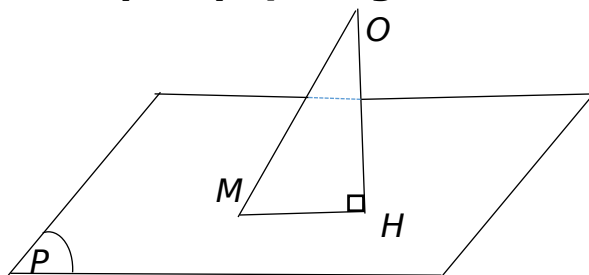
- **Khoảng cách từ điểm tới đường thẳng.**



Cho điểm O và đường thẳng a . Trong mặt phẳng (O,a) gọi H là hình chiếu của O trên a . Khi đó khoảng cách giữa hai điểm O và H được gọi là khoảng cách từ điểm O tới đường thẳng a , kí hiệu là $d(O,a)$.

- Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.

Cho điểm O và mặt phẳng (P) . Gọi H là hình chiếu của O trên mặt phẳng (P) . Khi đó khoảng cách giữa hai điểm O và H được gọi là khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (P) và được kí hiệu là $d(O,(P))$.



- Cách xác định khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng (P)

+ Chọn mặt phẳng (Q) đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (P) sao cho (Q) cắt (P) theo giao tuyến a .

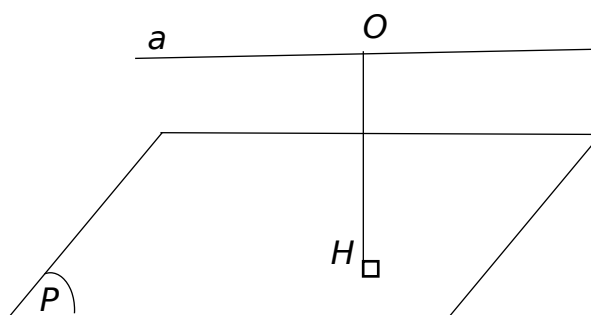
+ Gọi H là hình chiếu của A trên giao tuyến a , khi đó H cũng là hình chiếu của A trên (P) .

+ Kết luận: khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng (P) là độ dài đoạn thẳng AH .

+ **Lưu ý:** Ta thường chọn (Q) đi qua đường thẳng b nào đó mà theo giả thiết ta đã biết b vuông góc với (P) .

- Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song

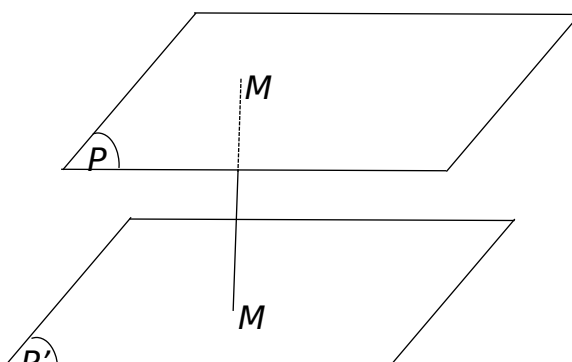
Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) là khoảng cách từ một điểm bất kì của a đến mặt phẳng (P) . Kí hiệu là $d(a,(P))$.



+ **Nhận xét:** khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song được quy về khoảng cách từ một điểm tới mặt phẳng.

- Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kì của mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.



Ta kí hiệu khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) , (Q) song song là $d((P), (Q))$.

Khi đó ta có

$d((P), (Q)) = d(M, (Q))$ với $M \in (P)$ và

$d((P), (Q)) = d(M', (P))$ với $M' \in (Q)$

+ **Nhận xét:** khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song được quy về khoảng cách từ một điểm tới mặt phẳng.

- **Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau**

+ Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó và mặt phẳng song song với nó chứa đường thẳng còn lại

+ Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.

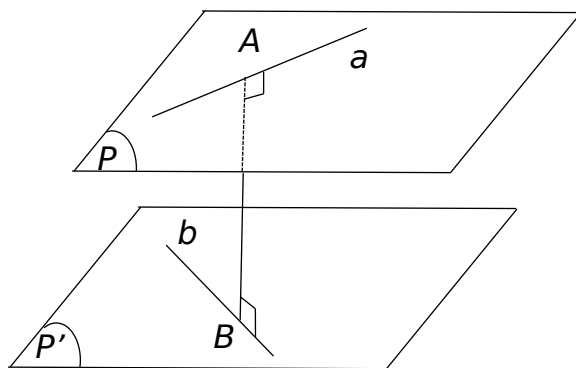
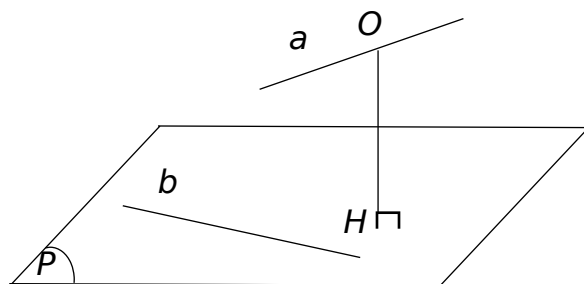
+ Trong trường hợp hai đường thẳng chéo nhau và vuông góc với nhau ta tìm khoảng cách theo định nghĩa bằng cách dựng đoạn thẳng vuông góc chung giữa hai đường thẳng đó.

Như vậy cơ sở lí thuyết cho chúng ta thấy tất cả các bài toán tính khoảng cách đều quy về bài toán cơ bản đó là: tính khoảng cách từ một điểm tới một mặt phẳng và cuối cùng là khoảng cách từ một điểm tới một đường thẳng.

2.2. Thực trạng của vấn đề trước khi áp dụng Sáng kiến kinh nghiệm

Bài toán tính khoảng cách thường được kết hợp với bài toán tính thể tích khối đa diện trong các đề thi. Thông thường học sinh khá rất dễ dàng tính được thể tích khối đa diện bởi ý này đề ra chỉ ở mức độ thông hiểu nhưng ý thứ hai là tính khoảng cách học sinh gặp những khó khăn sau:

- Không xác định khoảng cách cần tìm do không thể xác định được hình chiếu của một điểm trên mặt phẳng.



- Không biết cách quy bài toán về dạng cơ bản đó là tìm khoảng cách từ một điểm tới mặt phẳng.

- Không biết cách so sánh khoảng cách từ điểm cần tìm với khoảng cách của một điểm khác mà việc xác định khoảng cách dễ dàng hơn.

Với những khó khăn trên học sinh không thể thực hiện trọn vẹn bài toán hình học không gian có trong đề thi hoặc học sinh phải lựa chọn giải bài toán bằng phương pháp tọa độ, lời giải dài, tiềm ẩn rất nhiều sai sót trong quá trình tính toán, xác định tọa độ các điểm và trình bày lời giải.

Cụ thể, năm học 2014-2015, khi chưa áp dụng sáng kiến vào giảng dạy. Tôi đã kiểm tra học sinh lớp 12B1 (lớp Ban KHTN) Trường THPT Triệu Sơn 1 thực hiện bài toán hình học không gian kết hợp giữa bài toán tính thể tích khối đa diện và tính khoảng cách ở mức độ thi Đại học kết quả thống kê như sau

Số HS	Điểm 9- 10		Điểm 7 -8		Điểm 5- 6		Điểm dưới 5	
	SL	TL(%)	SL	TL(%)	SL	TL(%)	SL	TL(%)
50	3	6	12	24	30	52	5	10

Chủ yếu học sinh đạt mức độ 5 – 6 điểm vì học sinh chỉ thực hiện được một nửa bài toán đó là tính thể tích khối đa diện.

Xuất phát từ thực tế đó, tôi đã tiến hành đổi mới phương pháp hướng dẫn học sinh giải bài toán hình học không gian tại lớp 12C2 (lớp Ban KHTN) Trường THPT Triệu Sơn 1 năm học 2015 – 2016 với nội dung định hướng phương pháp giải như sau:

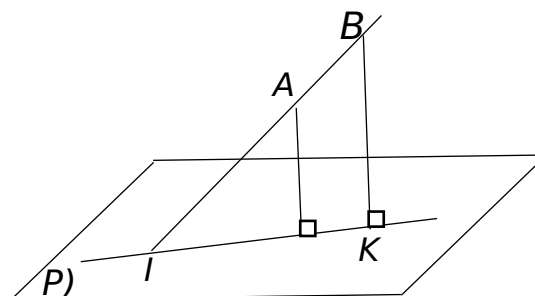
2.3. Kinh nghiệm hướng dẫn học sinh giải bài toán tính khoảng cách bằng phương pháp so sánh.

2.3.1. Bài toán cơ sở so sánh khoảng cách.

Giả sử đường thẳng a cắt mặt phẳng (P) tại điểm I .

Gọi A, B là hai điểm cho trước trên đường thẳng a ,

H, K lần lượt là hình chiếu của A, B trên mặt phẳng (P) .



$$\frac{d(A,(P))}{d(B,(P))} = \frac{AH}{BK} = \frac{IA}{IB}$$

Khi đó ta có

Áp dụng nội dung trên giáo viên hướng dẫn học sinh so sánh khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng (P) với khoảng cách từ B tới mặt phẳng (P) trong đó B là điểm cho trước, khoảng cách từ B đến mặt phẳng (P) có thể thực hiện dễ dàng.

2.3.2. Những lưu ý khi chọn điểm để so sánh khoảng cách

- Điểm B được chọn là điểm cho trước của bài toán
- Dễ dàng dựng được mặt phẳng (Q) đi qua điểm B và vuông góc với mặt phẳng (P) .
- Hình chiếu của B trên mặt phẳng (P) được xác định bằng hình chiếu của B trên giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) .

$$\frac{IA}{IB}$$

- Tỷ số $\frac{IA}{IB}$ là dễ dàng tính được.

2.3.3. Những lưu ý đối với giáo viên khi thực hiện đề tài

- Giáo viên phải củng cố cho học sinh các phương pháp xác định khoảng cách ; cách dựng hình chiếu của một điểm trên mặt phẳng.
- Hệ thống bài toán đưa ra phải phù hợp với đối tượng học sinh, thực hiện từ dễ đến khó.
- Giáo viên hướng dẫn học sinh bằng hệ thống câu hỏi, không áp đặt cho học sinh.
- Sau mỗi bài làm giáo viên cần cho học sinh thảo luận, trao đổi để học sinh tự rút ra kinh nghiệm cho bản thân.
- Ngoài phương pháp so sánh giáo viên nên hướng dẫn học sinh thực hiện các phương pháp khác để tính khoảng cách như: phương pháp thể tích, phương pháp tọa độ ...

2.3.4. Hướng dẫn học sinh giải bài toán tính khoảng cách bằng phương pháp so sánh.

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, mặt bên SAD là tam giác vuông tại S , hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc cạnh AD sao cho $HA=3HD$. Gọi M là trung điểm AB . Biết rằng $SA=2\sqrt{3}a$ và đường thẳng SC tạo với đáy một góc 30° . Tính theo a khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SBC) .

Giáo viên hướng dẫn học sinh tìm lời giải bằng cách yêu cầu học sinh trả lời các câu hỏi sau:

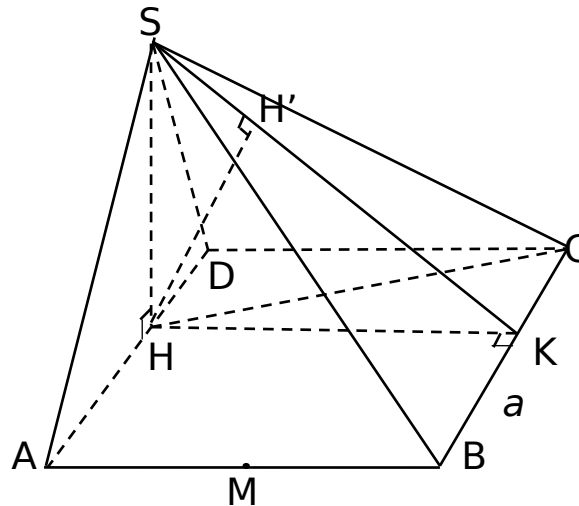
CH1: Dựng mặt phẳng đi qua điểm H và vuông góc với mặt phẳng (SBC) ?

CH2: Tìm hình chiếu của điểm H trên mặt phẳng (SBC) ?

CH3: Xác định khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (SBC) ?
 Tính khoảng cách vừa xác định được?

CH4: Ta có thể so sánh khoảng cách từ điểm M tới mặt phẳng (SBC) với khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (SBC) được không?

Giải:



Vì M là trung điểm AB và $AH \parallel (SBC)$ nên

$$d(M, (SBC)) = \frac{1}{2} d(A, (SBC)) = \frac{1}{2} d(H, (SBC))$$

Kẻ $HK \perp BC$ tại K , $HH' \perp SK$ tại H' .

Vì $BC \perp (SHK)$ nên $BC \perp HH' \Rightarrow HH' \perp (SBC) \Rightarrow d(H, (SBC)) = HH'$

Do đó
$$d(M, (SBC)) = \frac{1}{2} d(H, (SBC)) = \frac{1}{2} HH'$$

Vì $SH \perp (ABCD)$ nên $\angle SCH = \angle SC, (ABCD) = 30^\circ$

$$\Rightarrow SH = \sqrt{HA \cdot HD} = a\sqrt{3} \Rightarrow HC = SH \cdot \cot 30^\circ = 3a$$

$$\Rightarrow CD = \sqrt{HC^2 - HD^2} = 2\sqrt{2}a \Rightarrow HK = CD = 2\sqrt{2}a$$

Trong tam giác vuông SAD có: $SA^2 = AH \cdot AD \Leftrightarrow 12a^2 = \frac{3}{4} AD^2$
 $\Rightarrow AD = 4a; HA = 3a; HD = a$

Trong tam giác vuông SHK có:

$$\frac{1}{HH'^2} = \frac{1}{HK^2} + \frac{1}{HS^2} = \frac{11}{24a^2} \Rightarrow HH' = \frac{2\sqrt{6}a}{\sqrt{11}} = \frac{2\sqrt{66}}{11}a$$

Từ đó suy ra
$$d(M, (SBC)) = \frac{\sqrt{66}}{11}a$$

Đặt vấn đề mở , cho học sinh thảo luận sau khi thực hiện lời giải: Các em suy nghĩ và rút ra kết luận xem căn cứ vào những giả thiết nào để chúng ta có ý tưởng so sánh khoảng cách từ điểm điểm M tới mặt phẳng (SBC) với khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (SBC) ?

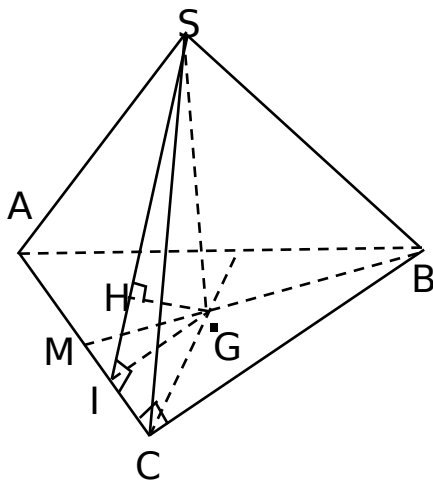
Sau khi học sinh nêu ý kiến (thông thường học sinh thảo luận và đưa ra nhiều ý kiến), giáo viên kết luận về tính đúng, sai của các ý tưởng học sinh trình bày.

Kết luận của giáo viên: Trước hết các em phải nhận thấy việc xác định khoảng cách và tính khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (SBC) là dễ dàng thực hiện, sau đó mới nghĩ đến ý tưởng so sánh khoảng cách từ M với khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (SBC) ?

Các bài toán sau đây giáo viên thực hiện hướng dẫn học sinh tìm lời giải tương tự bài toán 1.

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại C , cạnh huyền bằng $3a$. G là trọng tâm của tam giác ABC , $SG \perp (ABC)$, $SB = \frac{a\sqrt{14}}{2}$. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) theo a .

Giải:



Vì $\triangle ABC$ vuông cân tại C và $AB = 3a \Rightarrow AC = BC = \frac{3a}{\sqrt{2}}$

Gọi M là trung điểm $AC \Rightarrow MC = \frac{3a}{2\sqrt{2}} \Rightarrow MB = \sqrt{MC^2 + BC^2} = \frac{3a\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow BG = \frac{2}{3}BM = \frac{a\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \Rightarrow SG = \sqrt{SB^2 - BG^2} = a$$

$$\text{Kẻ } GI \perp AC (I \in AC) \Rightarrow AC \perp (SGI) \text{ và } GI = \frac{1}{3}BC = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Kẻ } GH \perp SI (H \in SI) \Rightarrow GH \perp (SAC) \Rightarrow d(G, (SAC)) = GH$$

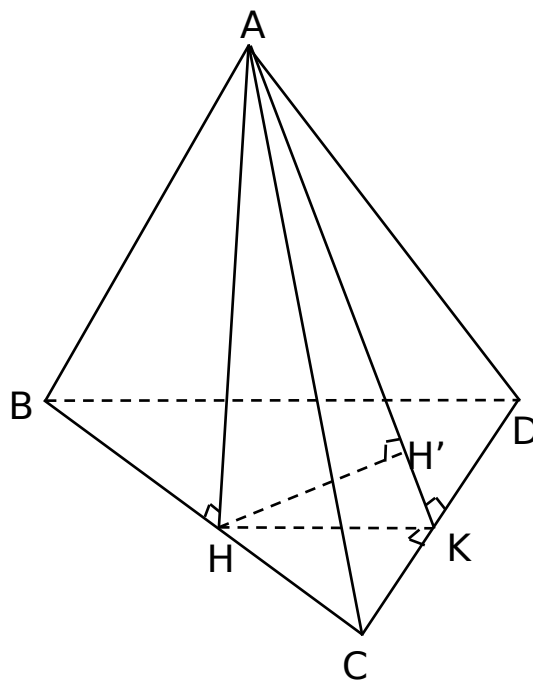
$$\text{Trong tam giác vuông } SGI, \text{ có } \frac{1}{GH^2} = \frac{1}{GS^2} + \frac{1}{GI^2} \Rightarrow GH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow d(B, (SAC)) = 3d(G, (SAC)) = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Vậy } d(B, (SAC)) = a\sqrt{3}$$

Bài 3: Cho tứ diện $ABCD$ có mặt phẳng (ABC) vuông góc với mặt phẳng (BCD) , tam giác BCD vuông tại D . Biết rằng $AB = a\sqrt{15}$, $BC = 3a\sqrt{3}$, $AC = a\sqrt{6}$, góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) bằng 60° . Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (ACD) theo a .

Giải:



Vì $AB^2 + AC^2 < BC^2$ nên $\angle BAC > 90^\circ$, do đó kẻ $AH \perp BC$ tại H thì H thuộc đoạn BC .

Theo giả thiết $(ABC) \perp (BCD)$ nên $AH \perp (BCD)$.

Kẻ $HK \perp CD$ tại K $\Rightarrow$ đường xiên $AK \perp CD$ do đó từ giả thiết $\Rightarrow \angle AKH = 60^\circ$ và $CD \perp (AKH)$.

Sử dụng định lí côsin cho $\triangle ABC \Rightarrow \cos \angle ACB = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \angle ACB = 45^\circ$

$\Rightarrow \triangle AHC$ vuông cân tại H $\Rightarrow AH = HC = a\sqrt{3}$ và $HK = AH \cdot \cot 60^\circ = a$

Kẻ $HH' \perp AK$ tại H', do $CD \perp (AKH)$ nên $CD \perp HH' \Rightarrow HH' \perp (ACD)$
 $\Rightarrow d(H; (ACD)) = HH'$

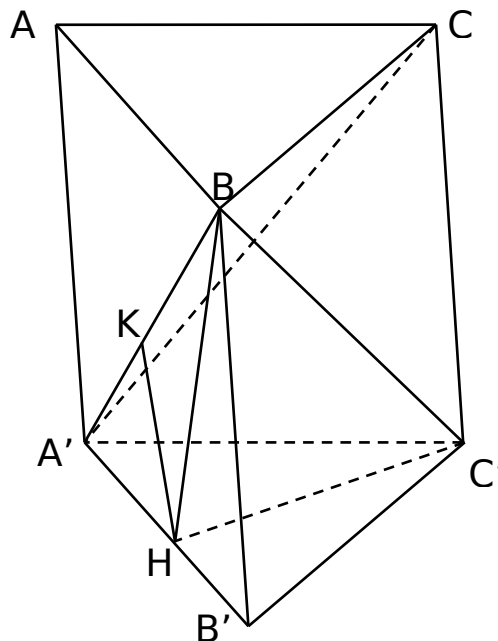
Trong tam giác vuông AHK , ta có: $\frac{1}{HH'^2} = \frac{1}{HK^2} + \frac{1}{HA^2} \Rightarrow HH' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Do $\frac{BC}{HC} = \frac{3a\sqrt{3}}{a\sqrt{3}} = 3$ nên $d(B, (ACD)) = 3d(H, (ACD)) = 3HH' = \frac{3a\sqrt{3}}{2}$

Vậy $d(B, (ACD)) = \frac{3\sqrt{3}a}{2}$

Bài 4. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với $AB = 2a$. Hình chiếu vuông góc của B xuống mặt đáy $(A'B'C')$ là trung điểm H của cạnh $A'B'$. Tính theo a khoảng cách từ C' đến mặt phẳng $(A'BC)$ biết góc giữa đường thẳng BC' và mặt phẳng $(A'B'C')$ bằng 45° .

Giải:



Do $BH \perp (A'B'C')$ nên góc giữa BC' và $mp(A'B'C')$ là góc $\angle BC'H = 45^\circ$ do đó tam giác $BC'H$ vuông cân tại H .

Ta có $HC' = \sqrt{HB^2 + B'C'^2} = a\sqrt{5} \Rightarrow BH = HC' = a\sqrt{5}$.

Vì $BC \parallel B'C' \Rightarrow B'C' \parallel (A'BC) \Rightarrow d(C'; (A'BC)) = d(B'; (A'BC))$

Mà H là trung điểm $A'B'$ nên $d(C'; (A'BC)) = d(B'; (A'BC)) = 2d(H; (A'BC))$

Kẻ HK vuông góc với $A'B$ tại K . Ta dễ thấy BC vuông góc với mặt phẳng $(ABA'B')$ nên BC vuông góc HK , do đó HK vuông góc với mặt phẳng $(A'BC)$

$\Rightarrow d(H; (A'BC)) = HK$

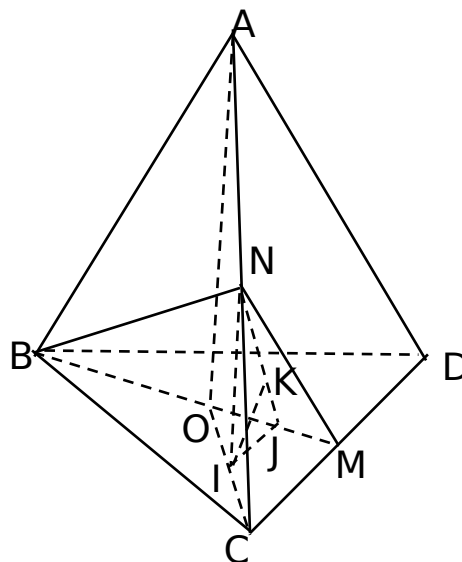
Xét tam giác vuông $A'HB$ có $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HA'^2} + \frac{1}{HB^2} = \frac{6}{5a^2}$

$$\Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{30}}{6}$$

Vậy $d(C'; (A'BC)) = 2HK = \frac{a\sqrt{30}}{3}$

Bài 5. Cho hình chóp đều $A.BCD$ có $AB = a\sqrt{3}; BC = a$. Gọi M là trung điểm của CD . Tính theo a và khoảng cách giữa hai đường thẳng BM, AD .

Giải:



Gọi O là tâm tam giác đều BCD cạnh a . Do $A.BCD$ là chóp đều

nên $AO \perp (BCD) \Rightarrow AO$ là đường cao của hình chóp và $OB = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$$\Rightarrow AO = \sqrt{AB^2 - BO^2} = \frac{2a\sqrt{6}}{3}$$

Gọi N, I, J lần lượt là trung điểm AC, CO, OM .

Ta có $AD \parallel MN \Rightarrow AD \parallel (BMN)$

$$\Rightarrow d(BM; AD) = d(AD; (BMN)) = d(D; (BMN)) = d(C; (BMN)) = 2d(I; (BMN))$$

$$\left. \begin{array}{l} BM \perp IJ \\ BM \perp NI \end{array} \right\} \Rightarrow BM \perp (IJN) \Rightarrow (BMN) \perp (IJN)$$

Lại có: $IK \perp NJ \Rightarrow IK \perp (BMN) \Rightarrow d(I; (BMN)) = IK$ theo giao tuyến NJ

Trong mp(IJN) kẻ $IK \perp NJ \Rightarrow IK \perp (BMN) \Rightarrow d(I; (BMN)) = IK$

$$\text{Ta có: } IJ = \frac{1}{4}CD = \frac{a}{4} \text{ và } IN = \frac{1}{2}AO = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

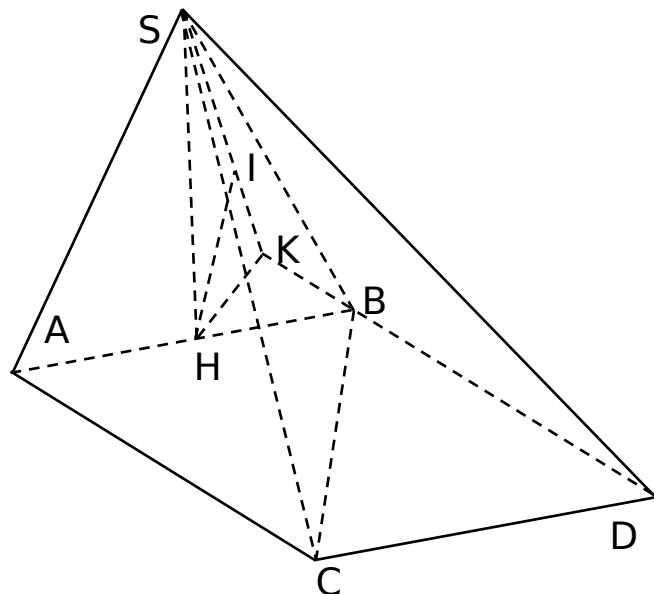
$$\text{Trong tam giác vuông } IJN \text{ có: } \frac{1}{IK^2} = \frac{1}{IJ^2} + \frac{1}{IN^2} = \frac{35}{2a^2}$$

$$\Rightarrow IK = \frac{a\sqrt{70}}{35} \Rightarrow d(I; (BMN)) = \frac{a\sqrt{70}}{35}$$

$$\text{Vậy } d(BM; AD) = 2d(I; (BMN)) = \frac{2a\sqrt{70}}{35}$$

Bài 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a , tam giác SAB vuông cân tại đỉnh S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC theo a .

Giải:



Gọi H là trung điểm của AB . Kẻ $HK \perp BD$ tại K , $HI \perp SK$ tại I .
Dựng hình bình hành $ABDC$.

Ta có: $AC \parallel (SBD)$

$$\Rightarrow d(AC; SB) = d(AC; (SBD)) = d(A; (SBD)) = 2d(H; (SBD))$$

Do $BD \perp (SHK) \Rightarrow BD \perp HI$

Mà $HI \perp (SBD)$ nên $d(H; (SBD)) = HI$

Xét tam giác vuông BHK có $\angle HBK = 60^\circ \Rightarrow HK = HB \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

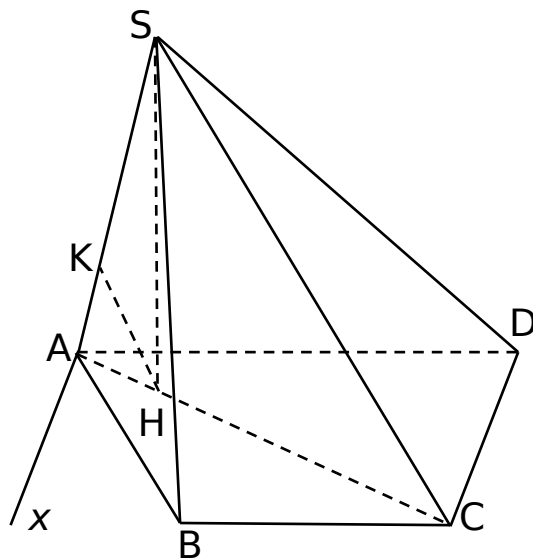
Xét tam giác vuông SHK có $\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HK^2} \Rightarrow HI = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{21}}{7}$

$$\Rightarrow d(AC, SB) = 2HI = \frac{\sqrt{21}}{7}a$$

Vậy $d(AC, SB) = \frac{\sqrt{21}}{7}a$

Bài 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân, AD là đáy lớn, $AD = 2a$, $AB = BC = CD = a$. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc đoạn thẳng AC sao cho $HC = 2HA$. Góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ bằng 60° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CD theo a .

Giải:



Theo bài ra thì $ABCD$ là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính AD nên $AC \perp CD$. Do $SH \perp (ABCD)$ nên $SH \perp CD$ từ đó ta có $CD \perp (SAC)$.

Do đó góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ là $\angle SCH \Rightarrow \angle SCH = 60^\circ$.

Ta có: $AC = \sqrt{AD^2 - CD^2} = a\sqrt{3} \Rightarrow HC = \frac{2}{3}AC = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow SH = HC \cdot \tan 60^\circ = 2a$

Kẻ tia $Ax \parallel CD$, gọi (P) là mặt phẳng chứa SA và Ax .

Khi đó $AC \parallel (P)$ và $CA = 3HA$ nên

$$d(CD, SA) = d(CD, (P)) = d(C, (P)) = 3d(H, (P))$$

Ta có: $AC \perp CD$ nên $HA \perp Ax$ mà $SH \perp Ax \Rightarrow Ax \perp (SAH)$.

Từ H kẻ $HK \perp SA (K \in SA)$, khi đó $Ax \perp HK \Rightarrow HK \perp (P) \Rightarrow HK = d(H, (P))$

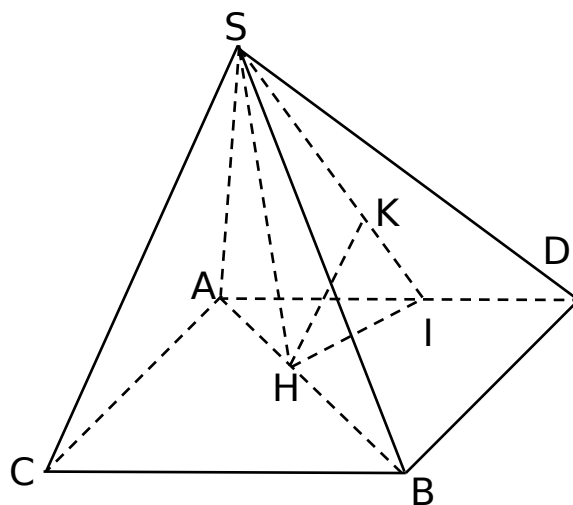
Lại có $AH = \frac{1}{3}AC = \frac{a\sqrt{3}}{3};$

Trong tam giác vuông AHS , có: $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{AH^2} + \frac{1}{SH^2} = \frac{13}{4a^2}$
 $\Rightarrow HK = \frac{2a\sqrt{13}}{13}$

Vậy $d(SA; CD) = 3HK = \frac{6a\sqrt{13}}{13}$.

Bài 8. Cho hình chóp $S.ABC$ có ABC là tam giác đều cạnh $3a$, hình chiếu của S lên (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $AB = 3AH$. Góc tạo bởi SA và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính theo a khoảng cách SA và BC .

Giải



Kẻ $AD \parallel BC$, do $AB = 3AH$ nên

$$d(SA;BC) = d(BC;(SAD)) = d(B;(SAD)) = 3d(H;(SAD))$$

Kẻ $HI \perp AD$, $HK \perp SI$, do $AD \perp SH$ nên $AD \perp (SHI) \Rightarrow AD \perp HK$
 $\Rightarrow d(H;(SAD)) = HK$

Ta có: $HI = AH \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

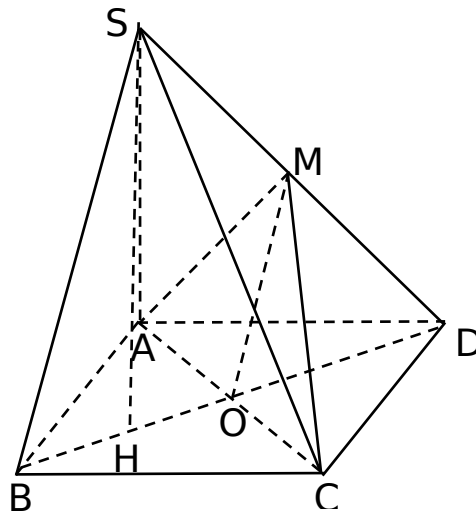
Vì $SH \perp (ABC)$ nên góc tạo bởi SA và (ABC) là: $\angle SAH = 60^\circ$
 $\Rightarrow SH = AH \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$

Trong tam giác vuông SHI , ta có: $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HI^2} + \frac{1}{HS^2} = \frac{5}{3a^2}$
 $\Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{15}}{5} \Rightarrow d(H;(SAD)) = \frac{a\sqrt{15}}{5}$

Vậy $d(SA;BC) = 3d(H;(SAD)) = \frac{3a\sqrt{15}}{5}$.

Bài 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $\angle ABC = 60^\circ$. Cạnh bên $SD = a\sqrt{2}$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc đoạn BD sao cho $HD = 3HB$. Gọi M là trung điểm cạnh SD . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CM và SB .

Giải:



Từ giả thiết có tam giác ABC đều, cạnh a .

Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow BO = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BD = a\sqrt{3}$

Có: $SH^2 = SD^2 - HD^2 = 2a^2 - \frac{27a^2}{16} = \frac{5a^2}{16} \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{5}}{4}$

Ta lại có:

$$S_{ABCD} = AB \cdot BC \cdot \sin \angle ABC = a^2 \cdot \sin 60^\circ = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$$

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{4} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} = \frac{a^3 \sqrt{15}}{24}$$

Ta có: $SB^2 = SH^2 + HB^2 = \frac{5a^2}{16} + \frac{3a^2}{16} \Rightarrow SB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Do $\begin{cases} BD \perp AC \\ AC \perp SH \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD) \Rightarrow AC \perp OM$

$$S_{\Delta MAC} = \frac{1}{2} OM \cdot AC = \frac{1}{4} SB \cdot AC = \frac{1}{4} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a = \frac{a^2 \sqrt{2}}{8}$$

Vì $SB \parallel OM \Rightarrow SB \parallel (MAC)$ nên:

$$d(SB, CM) = d(SB, (MAC)) = d(S, (MAC)) = d(D, (MAC))$$

$$V_{M.ACD} = \frac{1}{3} d(M, (ABCD)) \cdot S_{\Delta ACD}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} d(S, (ABCD)) \cdot \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{4} V_{S.ABCD} = \frac{a^3 \sqrt{15}}{96}$$

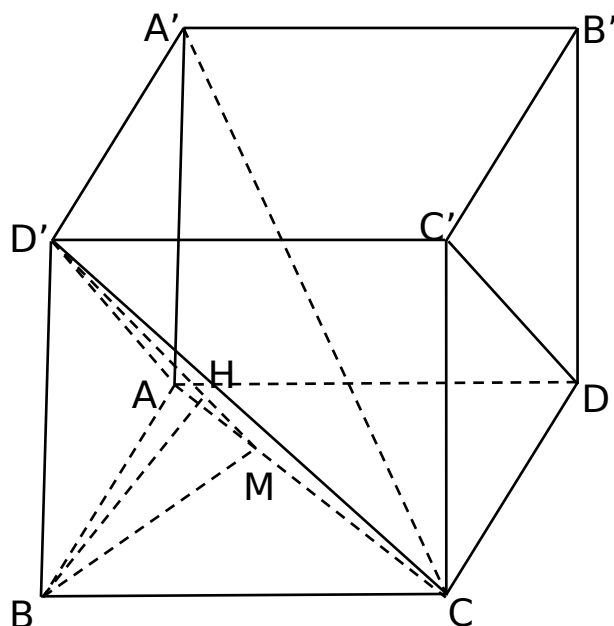
Mặt khác $V_{M.ACD} = \frac{1}{3} d(D, (MAC)) \cdot S_{\Delta MAC}$ nên:

$$d(D, (MAC)) = \frac{3V_{M.ACD}}{S_{\Delta MAC}} = \frac{\frac{a^3 \sqrt{15}}{96}}{\frac{a^2 \sqrt{2}}{8}} = \frac{a\sqrt{30}}{8}$$

Vậy $d(SB, CM) = \frac{a\sqrt{30}}{8}$

Bài 10. Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Biết góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° . Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng $B'C$ và $C'D$.

Giải:



Do $ABCD.A'B'C'D'$ là lăng trụ đứng nên $AA' \perp (ABCD)$.

Suy ra giữa $A'C$ và $(ABCD)$ là $\angle A'CA = 60^\circ$

Có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a \Rightarrow A'A = AC \cdot \tan 60^\circ = 2a\sqrt{3}$

Do $C'D \parallel AB'$ nên $C'D \parallel (AB'C)$

Suy ra $d(C'D; B'C) = d(C'D; (AB'C)) = d(B; (AB'C))$

Do BC' giao với mp($AB'C$) tại trung điểm BC' (vì $BCC'B'$ là hình chữ nhật)

Kẻ $BM \perp AC \Rightarrow AC \perp (BB'M) \Rightarrow (AB'C) \perp (BB'M)$ theo giao tuyến $B'M$.

Kẻ $BH \perp B'M \Rightarrow BH \perp (AB'C)$ hay $d(B; (AB'C)) = BH$

Xét tam giác vuông $B'BM$ và tam giác vuông ABC có

$$\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{B'B^2} + \frac{1}{BM^2} = \frac{1}{B'B^2} + \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{17}{12a^2} \Rightarrow BH = \frac{2a\sqrt{51}}{17}$$

$$d(C'D; B'C) = \frac{2a\sqrt{51}}{17}$$

Vậy

2.4. Hiệu quả của sáng kiến kinh nghiệm

Khi thực hiện theo nội dung của sáng kiến kinh nghiệm, học sinh được đặt vào tình huống có vấn đề trong dạy học qua đó phát huy được tính chủ động, sáng tạo, nâng cao năng lực tư duy của học sinh. Khi thực hiện đề tài tại lớp, các em học sinh hào hứng trao đổi, thảo luận để tìm lời giải, trao đổi học hỏi kinh nghiệm của bạn để nhận biết được cách so sánh trong mỗi bài toán.

Kết quả kiểm tra tại lớp 12C2 Trường THPT Triệu Sơn 1 năm học 2015 – 2016 cho thấy hầu hết các em học sinh đều có thể giải được trọn vẹn bài toán hình học không gian ở mức độ thi THPT Quốc gia, điều đó thể hiện qua Bảng thống kê kết quả sau:

Số HS	Điểm 9- 10		Điểm 7 -8		Điểm 5- 6		Điểm dưới 5	
	SL	TL(%)	SL	TL(%)	SL	TL(%)	SL	TL(%)
40	21	52.5	17	42.5	2	5	0	0

3. KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

3.1. Kết luận

Thực hiện đề tài và có được thành công thể hiện trên kết quả học tập của các em học sinh lớp 12C2 Trường THPT Triệu Sơn 1 bản thân tôi nhận thấy khi người thầy có phương pháp đúng đắn và khoa học, đặt học sinh vào các tình huống có vấn đề trong dạy học, tạo môi trường cho học sinh trao đổi, thảo luận thì sẽ phát huy được tính chủ động, sáng tạo, nâng cao năng lực tư duy cho học sinh đáp ứng được yêu cầu đổi mới giáo dục và đào tạo của Đảng và Nhà nước.

Giáo viên dạy toán của các trường THPT có thể coi sáng kiến kinh nghiệm này là một tài liệu tham khảo để áp dụng giảng dạy cho học sinh nhằm nâng cao chất lượng dạy học môn toán và góp phần nâng cao chất lượng giáo dục toàn diện của nhà trường.

3.2. Kiến nghị

Giáo viên dạy toán cần thêm thời lượng rèn luyện kĩ năng giải toán, khắc phục lỗi trình bày lời giải cho học sinh, làm phong phú thêm tài liệu bằng cách sưu tầm thêm các bài tập tương tự trong hệ thống đề thi Đại học hằng năm hoặc khai thác các đề thi thử THPT Quốc gia trên toàn quốc.

XÁC NHẬN CỦA THỦ TRƯỞNG ĐƠN VỊ	<i>Thanh Hóa, ngày 27 tháng 5 năm 2016</i> Tôi xin cam đoan đây là SKKN của mình viết, không sao chép nội dung của người khác. <i>Lê Thị Ngọc Hà</i>
--	---