PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THANH THUỶ

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 THCS

Đề chính thức

NĂM HỌC: 2021-2022

MÔN: TOÁN

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề.

Đề thi có 03 trang

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN (8,0 điểm)

Câu 1. Cho biểu thức $M=\dfrac{3a+\sqrt{9a}-3}{a+\sqrt{a}-2}-\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+2}+\dfrac{\sqrt{a}-2}{1-\sqrt{a}}$ $(a\ge 0, a\ne 1)$. Kết quả rút gọn của biểu thức M là

A. $\dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}$. **C.** $\dfrac{1-\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}$.

Câu 2. Cho $a=\sqrt[3]{38+17\sqrt{5}}+\sqrt[3]{38-17\sqrt{5}}$ và đa thức $f(x)=\left(x^3+3x+1945\right)^{2022}$. Giá trị của $f(a)$ là

A. 1 **B.** $2021^{2022}-76$ **C.** $2022^{2021}-76$ **D.** 2021^{2022}

Câu 3: Cho $a\sqrt{5}+b=\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-2}$, giá trị biểu thức $Q=a^2+b$ là

A. 6. **B**. 10. **C**. 12. **D**. 16.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)=ax^5+bx^3+cx-5$ (a, b, c là các hằng số). Cho biết $f(-3)=208$. Khi đó giá trị của $f(3)$ là

A. -218. **B.** -98. **C.** 98. **D.** 218.

Câu 5. Cho các điểm A(1; 4) và B(3; 1). Xác định đường thẳng (d): y = ax sao cho A và B nằm về hai phía của đường thẳng (d) và cách đều đường thẳng (d). Đường thẳng (d) đó là

A. $y=\dfrac{-3}{2}x$. **B.** $y=\dfrac{5}{4}x$. **C.** $y=\dfrac{x}{2}$. **D.** $y=-\dfrac{5}{4}x$.

Câu 6. Giá trị của x để ba điểm A(x; 14), B(-5; 20), C(7; -16) thẳng hàng là

A. -5 **B.** - 4 **C.** -3 **D.** -2

Câu 7. Cho các đường thẳng y = ax – 1, y = 1, y = 5. Giá trị của a để ba đường thẳng đã cho cùng với trục tung tạo thành một hình thang có diện tích bằng 8 là

A. -1 **B.** - 2 **C.** 2 **D.** 1

Câu 8. Cho biểu thức $P=\sqrt{2x-\sqrt{8x-4}}-\sqrt{2x+\sqrt{8x-4}}$, với $x\ge 1$, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $P=-2$ với mọi $x\ge\dfrac{1}{2}$. **B**. $P=-2$ với mọi $x\ge 1$.

C. $P=-2\sqrt{2x-1}$ với mọi $x\le 1$. **D.** $P=-2\sqrt{2x-1}$ với mọi $\frac{1}{2}\le x\le 1$.

Câu 9. Cho tam giác ABC vuông cân tại C. Từ C kẻ một tia vuông góc với đường trung tuyến AM cắt AB ở D. Khi đó tỉ số $\frac{BD}{AD}$ là

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{4}{5}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Câu 10. Cho ΔABC có đường trung tuyến AD, trọng tâm G. Qua G kẻ đường thẳng cắt AB và AC lần lượt tại E và F. Tổng tỷ số $\frac{AB}{AE}+\frac{AC}{AF}$ là

A. 2. **B.** 2,5. **C.** 3. **D.** 3,5.

Câu 11. Một hình hộp chữ nhật có diện tích xung quanh là 224 cm^2, chiều cao 7cm. Một trong các kích thước của đáy để hình hộp chữ nhật có thể tích lớn nhất là

A. 16. **B.** 64. **C.** 4. **D.** 8.

Câu 12. Cho tam giác nhọn ABC, đường cao CK, H là trực tâm của tam giác. Gọi M là một điểm trên CK sao cho $AMB=90^0$. Cho biết diện tích tam giác ABC và ABH lần lượt là 8 và 5. Khi đó diện tích tam giác AMB là

A. $2\sqrt{13}$. **B.** $2\sqrt{10}$. **C.** $4\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt{89}$.

Câu 13. Cho tam giác ABC biết $AB=11cm$, $AC=15cm$ và $BC=20cm$. Độ dài đường cao AH của tam giác ABC là

A. $\sqrt{66,24}cm.$ **B.** $8,25cm.$ **C.** $\sqrt{93,24}cm.$ **D.** $12cm.$

Câu 14. Cho đường tròn $(O;R)$ ngoại tiếp đa giác đều 12 cạnh. Độ dài cạnh của đa giác theo R là:

A. $R\sqrt{1+\sqrt{3}}$ **B.** $R\sqrt{1-\sqrt{3}}$ **C.** $R\sqrt{2+\sqrt{3}}$ **D.** $R\sqrt{2-\sqrt{3}}$

Câu 15. Cho đường tròn $(O;R)$. Điểm A nằm ngoài (O) sao cho $OA=2R$, qua A kẻ cát tuyến ABC (B nằm giữa A và C), biết $COB=90^0$ thì độ dài AC là

A. $\frac{R\sqrt{2}\left(\sqrt{7}-1\right)}{2}$. **B.** $\frac{R\sqrt{2}\left(\sqrt{7}+1\right)}{2}$. **C.** $\frac{R\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\right)}{2}$. **D.** $\frac{R\left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)}{2}$.

Câu 16. Bốn bạn A, B, C, D có tất cả 76 viên kẹo. Bốn bạn đồng thời chia số kẹo của mình cho các bạn như sau:

- A giữ lại một viên kẹo và chia đều phần còn lại cho 3 bạn kia
- B giữ lại hai viên kẹo và chia đều phần còn lại cho 3 bạn kia
- C giữ lại ba viên kẹo và chia đều phần còn lại cho 3 bạn kia
- D giữ lại bốn viên kẹo và chia đều phần còn lại cho 3 bạn kia

Cuối cùng số kẹo của các bạn bằng nhau. Hỏi ban đầu A có bao nhiêu viên kẹo?

A. 13 **B.** 19 **C.** 25 **D.** 33

II. PHẦN TỰ LUẬN (12,0 điểm)

Câu 1 *(3,0 điểm).*

a) Giải phương trình nghiệm nguyên: $5x^4+y^2-4x^2y-85=0$

b) Cho x ; y ; z là các số nguyên và $\begin{cases} P=(x+2020)^5+(2y-2021)^5+(3z+2022)^5 \\ S=x+2y+3z+2021 \end{cases}$

Chứng minh rằng P chia hết cho 30 khi và chỉ khi S chia hết cho 30.

Câu 2 (*4,0 điểm*).

a) Cho hai đa thức với hệ số thực $f(x)=2x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ và $g(x)=x^2+x+2021$. Biết phương trình $f(x)=0$ có 5 nghiệm thực phân biệt còn phương trình $f(g(x))=0$ vô nghiệm. Chứng minh rằng $\sqrt[3]{f(2021)}>\frac{1}{8}$

b) Cho ba số x, y, z khác 0 và thoả mãn: $\begin{cases} x+y+z=\frac{1}{2} \\ \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{xyz}=4 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}>0 \end{cases}$.

Tính giá trị của biểu thức: $P=\left(y^{2019}+z^{2019}\right)\left(z^{2021}+x^{2021}\right)\left(x^{2023}+y^{2023}\right)$

c) Giải phương trình sau: $x^2-3x-2+4\sqrt{x-1}=0$

Câu 3 *(4,0 điểm)*

1) Cho hình vuông ABCD, hai đường chéo cắt nhau tại O. Trên AB lấy điểm M bất kì khác A và B, đường thẳng qua M song song với BD cắt AC tại N, DN và CM cắt nhau tại E.

a) Chứng minh rằng $\Delta OND \backsim \Delta BMC$

b) Tính số đo góc DEC

2) Cho ΔABC nhọn. Xác định vị trí điểm M nằm trong ΔABC sao cho:

AM.BC + BM.CA + CM.AB đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 4 (*1,0 điểm*). Cho a,b,c là các số thực dương khác 0 thỏa mãn $a+b+c+2=abc$. Chứng minh rằng: $P=\frac{a+3}{\sqrt{6a^2+12}}+\frac{b+3}{\sqrt{6b^2+12}}+\frac{c+3}{\sqrt{6c^2+12}}\le\frac{5}{2}$

.....Hết.....

Họ và tên thí sinh:...SBD:.................

Cán bộ coi thi không cần giải thích gì thêm

PHÒNG GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO THANH THỦY

HƯỚNG DẪN CHẤM
ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 THCS
NĂM HỌC: 2021-2022
MÔN:TOÁN

(Hướng dẫn chấm có: 05 trang)

A. Một số chú ý khi chấm bài.

Đáp án dưới đây dựa vào lời giải sơ lược của một cách giải. Thí sinh giải cách khác mà đúng thì tổ chấm cho điểm từng phần ứng với thang điểm của hướng dẫn chấm.

B. Đáp án và thang điểm.

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN (8,0 điểm)

Mỗi câu trả lời đúng cho 0,5 điểm

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Đ. án	B	D	D	A	B	C	C	B	A	C	D	B	A	D	B	A

II. PHẦN TỰ LUẬN (12,0 điểm)

Câu 1 *(3,0 điểm).*

a) Giải phương trình nghiệm nguyên: $5x^4+y^2-4x^2y-85=0$

b) Cho x ; y ; z là các số nguyên và $\begin{cases} P=(x+2020)^5+(2y-2021)^5+(3z+2022)^5 \\ S=x+2y+3z+2021 \end{cases}$

Chứng minh rằng P chia hết cho 30 khi và chỉ khi S chia hết cho 30.

Nội dung	**Điểm**
a) Phương trình đã cho tương đương với $x^4=85-\left(y-2x^2\right)^2$	0,25
Lập luận $x^4\le 85<4^4$ Mà $x\in Z$ Suy ra $x^4\in\{0^4;1^4;2^4;3^4\}$	0,25
$x^4=0^4$ thì $y^2=85$ (loại) $x^4=1^4$ thì $(y-2)^2=84$ (loại) $x^4=2^4$ thì $(y-8)^2=71$ (loại)	0,25
$x^4=3^4$ thì $(y-18)^2=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y-18=2 \\ y-18=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=20 \\ y=16 \end{array}\right.$ Khi đó $\left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-3 \end{array}\right.$	0,25 0,25
Vậy phương trình có 4 nghiệm nguyên $(x;y)$ là: (3 ; 20); (-3 ; 20); (3 ; 16); (-3 ; 16)	0,25
b) Đặt $a=x+2020; b=2y-2021; c=3z+2022$ với $a,b,c\in Z$ Ta có: $\begin{cases} P=a^5+b^5+c^5 \\ S=a+b+c \end{cases}$ Xét $P-S=\left(a^5-a\right)+\left(b^5-b\right)+\left(c^5-c\right)$	0,25 0,5

HS chứng minh được với mọi số nguyên m thì $m^5 - m$ chia hết cho 30	
Do đó $P - S = (a^5 - a) + (b^5 - b) + (c^5 - c)$ chia hết cho 30 với a; b; c là các số nguyên	0,25
Vậy $P \vdots 30 \Leftrightarrow S \vdots 30$	0,25

Câu 2 (*4,0 điểm*).

a) Cho hai đa thức với hệ số thực $f(x) = 2x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ và $g(x) = x^2 + x + 2021$. Biết phương trình $f(x) = 0$ có 5 nghiệm thực phân biệt còn phương trình $f(g(x)) = 0$ vô nghiệm. Chứng minh rằng $\sqrt[3]{f(2021)} > \frac{1}{8}$

b) Cho ba số x, y, z khác 0 và thoả mãn: $\begin{cases} x + y + z = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{xyz} = 4 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > 0 \end{cases}$.

Tính giá trị của biểu thức: $P = (y^{2019} + z^{2019})(z^{2021} + x^{2021})(x^{2023} + y^{2023})$

c) Giải phương trình sau: $x^2 - 3x - 2 + 4\sqrt{x-1} = 0$

Nội dung	Điểm
a) Giả sử pt $f(x) = 0$ có 5 nghiệm thực là x_i $(i = \overline{1,5})$, khi đó ta có $f(x) = 2(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_5)$, suy ra $f(g(x)) = (x^2 + x + 2021 - x_1)...(x^2 + x + 2021 - x_5)$	0,25
Vì phương trình $f(g(x)) = 0$ vô nghiệm nên cả năm phương trình $x^2 + x + 2021 - x_i = 0$ $(i = \overline{1,5})$ đều vô nghiệm	0,25
Ta có $x^2 + x + 2021 - x_i = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = x_i - 2021 + \frac{1}{4}$ Để $x^2 + x + 2021 - x_i = 0$ $(i = \overline{1,5})$ vô nghiệm thì $x_i - 2021 + \frac{1}{4} < 0 \Leftrightarrow 2021 - x_i > \frac{1}{4}$	0,25
Ta có $f(2021) = 2(2021 - x_1).(2021 - x_2)....(2021 - x_5) > 2.\frac{1}{4^5} = \frac{1}{512}$ $\Rightarrow \sqrt[3]{f(2021)} > \frac{1}{8}$	0,25

b) Từ giả thiết suy ra: $4=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{xyz}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+\frac{2(x+y+z)}{xyz}$ $=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+2\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2$	0,25
Mà $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}>0$ suy ra $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$ (1) Mặt khác $x+y+z=\frac{1}{2}$ suy ra $\frac{1}{x+y+z}=2$ (2) Từ (1) và (2) suy ra $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x+y+z}$ (3)	0,5
Biến đổi (3) $\Leftrightarrow (x+y)(y+z)(z+x)=0$	0,5
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=0 \\ z+y=0 \\ x+z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-y \\ y=-z \\ z=-x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^{2023}=-y^{2023} \\ y^{2019}=-z^{2019} \\ z^{2021}=-x^{2021} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^{2023}+y^{2023}=0 \\ y^{2019}+z^{2019}=0 \\ z^{2021}+x^{2021}=0 \end{array}\right.$ nên P = 0	0,25
c) ĐKXĐ: $x\ge 1$	0,25
Pt $(2)\Leftrightarrow$ $x^2-2x+1=x-1-4\sqrt{x-1}+4$	0,25
$\Leftrightarrow$ $(x-1)^2=(\sqrt{x-1}-2)^2$	0,25
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=\sqrt{x-1}-2 \\ x-1=2-\sqrt{x-1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=\sqrt{x-1} \\ \sqrt{x-1}=3-x \end{array}\right.$	0,25
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+2x+1=x-1 (x\ge -1) \\ x-1=9-6x+x^2 (x\le 3) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+x+2=0 (x\ge -1) \\ x^2-7x+10=0 (x\le 3) \end{array}\right. \Leftrightarrow x=2$ (t/m)	0,25
Vậy phương trình (2) có tập nghiệm $S=\{2\}$	0,25

Câu 3 *(4,0 điểm)*

1) Cho hình vuông ABCD, hai đường chéo cắt nhau tại O. Trên AB lấy điểm M bất kì khác A và B, đường thẳng qua M song song với BD cắt AC tại N, DN và CM cắt nhau tại E.

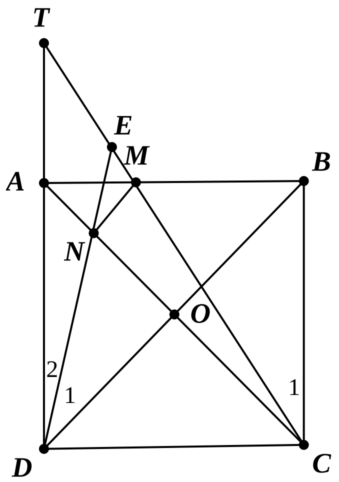
a) Chứng minh rằng $\Delta OND \backsim \Delta BMC$

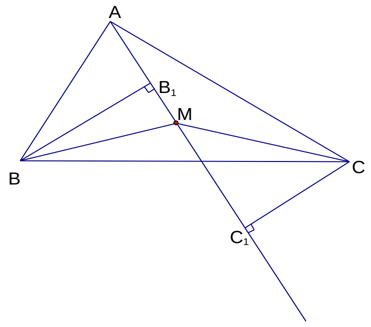
b) Tính số đo DEC

2) Cho ΔABC nhọn. Xác định vị trí điểm M nằm trong ΔABC sao cho

AM.BC + BM.CA + CM.AB đạt giá trị nhỏ nhất.

Nội dung	**Điểm**

1) Hình vẽ  	
a) Dễ thấy ΔANM vuông cân tại N$\Rightarrow \frac{AN}{AM}=\frac{1}{\sqrt{2}}$	0,25
Do MN // BO nên $\frac{AN}{NO}=\frac{AM}{MB}\Rightarrow\frac{NO}{MB}=\frac{AN}{AM}=\frac{1}{\sqrt{2}}$	0,25
Ta lại có Tam giác OBC vuông cân tại O nên $\frac{OD}{BC}=\frac{OB}{BC}=\frac{1}{\sqrt{2}}$	0,25
Suy ra $\frac{NO}{MB}=\frac{OD}{BC}$	0,25
Xét ΔOND và ΔBMC có $\frac{NO}{MB}=\frac{OD}{BC}$ $NOD=MBC=90^0$ $\Rightarrow \Delta OND \backsim \Delta BMC$ (c.g.c)	0,25 0,25
b) Vì $\Delta OND \backsim \Delta BMC$ nên $D_1=C_1$	0,5
Giả sử CM cắt DA tại T khi đó $T=C_1$ $\Rightarrow T=D_1$ Xét ΔDET có $T+D_2=DEC$ (t/c góc ngoài của tam giác)	0,5
$\Rightarrow D_1+D_2=DEC$ mà $D_1+D_2=ADB=45^0\Rightarrow DEC=45^0$ *(Chú ý: HS có thể dùng tứ giác nội tiếp để cm)*	0,5

2) 	
+ Kẻ BB_1 và CC_1 tương ứng vuông góc với đường thẳng AM + Ta có $S_{AMB} + S_{AMC} = \frac{1}{2}.AM.BB_1 + \frac{1}{2}.AM.CC_1$ $= \frac{1}{2}AM.(BB_1 + CC_1) \le \frac{1}{2}AM.BC$ (Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow AM \perp BC$)	0,25
+ Chứng minh tương tự: $S_{BMC} + S_{BMA} \le \frac{1}{2}BM.AC$ (Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow BM \perp AC$) $S_{CMA} + S_{CMB} \le \frac{1}{2}CM.AB$ (Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow CM \perp AB$)	0,25
+ Cộng từng vế của 3 bất đẳng thức ta có: $2(S_{AMB} + S_{BMC} + S_{CMA}) \le \frac{1}{2}(AM.BC + BM.CA + CM.AB)$ $\Rightarrow AM.BC + BM.CA + CM.AB \ge 4S_{ABC}$	0,25
Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow AM \perp BC; BM \perp CA; CM \perp AB \Rightarrow$ M là trực tâm của ΔABC Vậy $AM.BC + BM.CA + CM.AB$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $4S_{ABC}$ khi M là trực tâm của ΔABC	0,25

Câu 4 *(1,0 điểm).* Cho a,b,c là các số thực dương khác 0 thỏa mãn $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=1$. Chứng minh rằng: $P=\frac{a+3}{\sqrt{6a^2+12}}+\frac{b+3}{\sqrt{6b^2+12}}+\frac{c+3}{\sqrt{6c^2+12}}\le\frac{5}{2}$

Nội dung	Điểm
Ta thấy : $6a^2+12=4a^2+2(a^2+4)+4\ge 4a^2+8a+4=(2a+2)^2$ $\Leftrightarrow \frac{a+3}{\sqrt{6a^2+12}}\le\frac{a+3}{2a+2}=\frac{a+1+2}{2(a+1)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{a+1}$	0,25
Chứng minh tương tự : $\Leftrightarrow \frac{b+3}{\sqrt{6b^2+12}}\le\frac{b+3}{2b+2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{b+1}$;	0,25

$\frac{c+3}{\sqrt{6c^2+12}} \le \frac{c+3}{2c+2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{c+1}$	
Cộng vế với vế ta có : $P = \frac{a+3}{\sqrt{6a^2+12}} + \frac{b+3}{\sqrt{6b^2+12}} + \frac{c+3}{\sqrt{6c^2+12}} \le 3.\frac{1}{2} + \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} = \frac{5}{2}$	0,25
Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=2$	0,25