

BÀI 33. ĐẠO HÀM CẤP HAI

CHƯƠNG 9. ĐẠO HÀM

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN (PHÂN DẠNG)

Dạng 1. Tính đạo hàm cấp hai

Câu 1. (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

- a) $y = xe^{2x}$;
b) $y = \ln(2x+3)$.

Lời giải

a) Ta có: $y' = x'e^{2x} + x(e^{2x})' = e^{2x} + xe^{2x}(2x)' = (1+2x)e^{2x}$
 $y'' = (1+2x)'e^{2x} + (1+2x)(e^{2x})' = 2e^{2x} + (1+2x)e^{2x}(2x)' = (4+4x)e^{2x}$

Vậy hàm số $y = xe^{2x}$ có đạo hàm cấp hai là $y'' = 4(1+x)e^{2x}$.

b) Ta có: $y' = \frac{(2x+3)'}{2x+3} = \frac{2}{2x+3}$.

$y'' = \left(\frac{2}{2x+3}\right)' = -\frac{2}{(2x+3)^2}(2x+3)' = -\frac{4}{(2x+3)^2}$. Vậy hàm số $y = \ln(2x+3)$ có đạo hàm cấp hai là:

$y'' = -\frac{4}{(2x+3)^2}$.

Câu 2. (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Cho hàm số $f(x) = x^2e^x$. Tính $f''(0)$.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = (x^2)'e^x + x^2(e^x)' = (2x+x^2)e^x$ và

$f''(x) = (2x+x^2)'e^x + (2x+x^2)(e^x)' = (2+2x)e^x + (2x+x^2)e^x = (x^2+4x+2)e^x$. Thay $x=0$ ta được

$f''(0) = 2$.

Câu 3. (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

- a) $y = \ln(x+1)$;
b) $y = \tan 2x$.

Lời giải

a) Ta có: $y' = \frac{(x+1)'}{x+1} = \frac{1}{x+1}$ và $y'' = -\frac{(x+1)'}{(x+1)^2} = -\frac{1}{(x+1)^2}$.

b) Ta có: $y' = \frac{(2x)'}{\cos^2 2x} = \frac{2}{\cos^2 2x} = 2(1+\tan^2 2x)$ và
 $y'' = 4 \tan 2x(\tan 2x)' = 8 \tan 2x(1+\tan^2 2x)$.

Câu 4. (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Cho hàm số $P(x) = ax^2 + bx + 3$ (a, b là hằng số). Tìm a, b biết $P'(1) = 0$ và $P''(1) = -2$.

Lời giải

Ta có: $P'(x) = 2ax + b$ và $P''(x) = 2a$. Do $P'(1) = 0$ và $P''(1) = -2$ nên $2a + b = 0$ và $2a = -2$. Từ đó, ta tìm được $a = -1, b = 2$.

Câu 5. (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Cho hàm số $f(x) = 2 \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$. Chứng minh rằng $|f''(x)| \leq 4$ với mọi x .

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4 \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \left(\sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right)' = 4 \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \left(x + \frac{\pi}{4} \right)' \\ &= 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{2} \right) = 2 \cos 2x \text{ và } f''(x) = -2(2x)' \sin 2x = -4 \sin 2x. \end{aligned}$$

Từ đó, ta có: $|f''(x)| = 4 |\sin 2x| \leq 4$ với mọi x .

Câu 6. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{2} \cos \left(4\pi t + \frac{\pi}{3} \right)$

b) $y = x^2 e^{-x}$

Giải

a) Ta có:

$$y' = -\sqrt{2} \sin \left(4\pi t + \frac{\pi}{3} \right) \left(4\pi t + \frac{\pi}{3} \right)' = -4\pi \sqrt{2} \sin \left(4\pi t + \frac{\pi}{3} \right)$$

$$y'' = -4\pi \sqrt{2} \cos \left(4\pi t + \frac{\pi}{3} \right) \left(4\pi t + \frac{\pi}{3} \right)' = -16\pi^2 \sqrt{2} \cos \left(4\pi t + \frac{\pi}{3} \right)$$

b) Ta có:

$$y' = (x^2)' e^{-x} + x^2 (e^{-x})' = 2x e^{-x} - x^2 e^{-x}$$

$$y'' = (2x - x^2)' e^{-x} + (2x - x^2)(e^{-x})'$$

$$= (2 - 2x) e^{-x} - (2x - x^2) e^{-x}$$

$$= (x^2 - 4x + 2) e^{-x}$$

Câu 7. Cho hàm số $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$. Tính $f''(0)$.

Giải

Ta có:

$$f'(x) = \frac{(x + \sqrt{1+x^2})'}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1 + \frac{(1+x^2)'}{2\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{(x + \sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$f''(x) = -\frac{(\sqrt{1+x^2})'}{(\sqrt{1+x^2})^2} = -\frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{(1+x^2)'}{2\sqrt{1+x^2}} = -\frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

Thay $x = 0$ vào biểu thức trên ta được $f''(0) = 0$.

Câu 8. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 1$

b) $y = \frac{2x+1}{x-1}$

Lời giải

a) $y' = 3x^2 - 4$

b) $y'' = \frac{6}{(x-1)^3}$

Câu 9. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y = \ln|2x-1|;$

b) $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

Lời giải

a) $y' = -\frac{4}{(2x-1)^2};$

$$y' = \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)} = 1 + \tan^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

b)

$$y'' = 2 \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \left(\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right)' = \frac{2 \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}{\cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}$$

Câu 10. Cho hàm số $f(x) = xe^{x^2} + \ln(x+1)$.

Tính $f'(0)$ và $f''(0)$.

Lời giải

Ta có:

$$f'(x) = (1+2x^2)e^{x^2} + \frac{1}{x+1}$$

$$f''(x) = (6x+4x^3)e^{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2}$$

Thay $x=0$ ta được $f'(0) = 2$ và $f''(0) = -1$.

Câu 11. Cho $f(x) = (x^2 + a)^2 + b$ (a, b là tham số). Biết $f(0) = 2$ và $f''(1) = 8$, tìm a và b .

Lời giải

Tính đạo hàm cấp hai ta được $f''(x) = 12x^2 + 4a$. Từ đó có $f''(1) = 12 + 4a = 8$ nên $a = -1$. Mặt khác, $f(0) = a^2 + b = 2$. Thay $a = -1$ ta được $b = 1$. Vậy $a = -1$, $b = 1$ là các giá trị cần tìm.

Câu 12. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y = 3x^3 - x^2 + 3x - 1;$

b) $y = \cos^2 x$.

Giải

a) $y' = 3.3x^2 - 2x + 3 = 9x^2 - 2x + 3, y'' = 9.2x - 2 = 18x - 2$.

b) Đặt $u = \cos x$ thì $y = u^2$.

Ta có $u'_x = -\sin x$ và $y'_u = 2u$.

Suy ra $y'_x = y'_u \cdot u'_x = 2u \cdot (-\sin x) = -2\cos x \cdot \sin x = -\sin 2x$, $y'' = -(2x)' \cdot \cos 2x = -2\cos 2x$.

Câu 13. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y = x \sin 2x$;

b) $y = \cos^2 x$;

c) $y = x^4 - 3x^3 + x^2 - 1$.

Lời giải

a) $y'' = 4\cos 2x - 4x \sin 2x$;

b) $y'' = -2\cos 2x$;

c) $y'' = 12x^2 - 18x + 2$.

Câu 14. Cho hàm số $f(x) = x^2 + 2x - 1$.

a) Tìm đạo hàm cấp hai của hàm số.

b) Tính đạo hàm cấp hai của hàm số tại điểm $x_0 = 0, x_0 = 1$.

Giải

a) Ta có: $f'(x) = 2x + 2$ và $f''(x) = (2x + 2)' = 2$.

b) Vì $f''(x) = 2$ nên $f''(0) = f''(1) = 2$.

Câu 15. Cho hàm số $g(x) = \cos x$.

a) Tìm đạo hàm cấp hai của hàm số.

b) Tính đạo hàm cấp hai của hàm số tại $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

Giải

a) Ta có: $g'(x) = -\sin x, g''(x) = (-\sin x)' = -\cos x$.

b) Vì $g''(x) = -\cos x$ nên $g''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 16. Cho hàm số $h(x) = \ln x, x > 0$.

a) Tìm đạo hàm cấp hai của hàm số.

b) Tính đạo hàm cấp hai của hàm số tại $x_0 = \sqrt{2}$.

Giải

a) Ta có: $h'(x) = \frac{1}{x}, h''(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

b) Vì $h''(x) = -\frac{1}{x^2}$ nên $h''(\sqrt{2}) = -\frac{1}{(\sqrt{2})^2} = -\frac{1}{2}$.

Câu 17. Cho hàm số $k(x) = \sin x \cdot \cos x$.

a) Tìm đạo hàm cấp hai của hàm số.

b) Tính đạo hàm cấp hai của hàm số tại $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

Giải

a) Ta có: $k(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$, suy ra $k'(x) = \cos 2x, k''(x) = (\cos 2x)' = -2 \sin 2x$.

b) Vì $k''(x) = -2 \sin 2x$ nên $k''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2 \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$.

Câu 18. Cho hàm số $f(x) = x^2 - 4x$. Giải phương trình $f'(x) = f''(x)$.

Giải

Ta có: $f'(x) = 2x - 4, f''(x) = 2$.

Khi đó, ta có phương trình

$$f'(x) = f''(x) \Leftrightarrow 2x - 4 = 2 \Leftrightarrow x = 3.$$

Câu 19. Tìm đạo hàm cấp hai của mỗi hàm số sau:

a) $f(x) = \frac{1}{3x+5}$

b) $g(x) = 2^{x+3x^2}$

Lời giải

a) Ta có: $f'(x) = -\frac{(3+5)'}{(3x+5)^2} = \frac{-3}{(3x+5)^2}$,

$$f''(x) = \frac{(-3)'(3x+5)^2 - [(3x+5)^2]'(-3)}{(3x+5)^4} = \frac{18}{(3x+5)^3}.$$

b) Ta có: $g'(x) = (x+3x^2)' \ln 2 \cdot 2^{x+3x^2} = (6x+1) \ln 2 \cdot 2^{x+3x^2}$,

$$g''(x) = \ln 2 \left[(6x+1)' \cdot 2^{x+3x^2} + (6x+1) \cdot (2^{x+3x^2})' \right]$$

$$= 6 \ln 2 \cdot 2^{x+3x^2} + [(6x+1) \ln 2]^2 \cdot 2^{x+3x^2}.$$

Câu 20. Cho hàm số $f(x) = \sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x$.

a) Tìm đạo hàm cấp hai của hàm số.

b) Tính đạo hàm cấp hai của hàm số tại $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

Lời giải

a) Ta có: $f(x) = \sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x = \frac{1}{2} \sin 2x \cdot \cos 2x = \frac{1}{4} \sin 4x$

Khi đó, $f'(x) = \frac{1}{4} (4x)' \cos 4x = \cos 4x, f''(x) = (4x)' (-\sin 4x) = -4 \sin 4x$

b) Vì $f''(x) = -4 \sin 4x$ nên $f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -4 \sin\left(4 \cdot \frac{\pi}{6}\right) = -2\sqrt{3}$

Câu 21. Cho hàm số $f(x) = x^3 + 4x^2 + 5$. Giải bất phương trình $f'(x) - f''(x) \geq 0$.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = 3x^2 + 8x, f''(x) = 6x + 8$.

$$f'(x) - f''(x) = 3x^2 + 8x - 6x - 8 \geq 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 8 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \\ x \geq \frac{4}{3} \end{cases}$$

Khi đó,

Dạng 2. Ứng dụng

Câu 22. Chuyển động của một vật gắn trên con lắc lò xo (khi bỏ qua ma sát và sức cản không khí)

$$x(t) = 4 \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right),$$

được cho bởi phương trình sau: ở đó x tính bằng centimét và thời gian t tính bằng giây. Tìm gia tốc tức thời của vật tại thời điểm $t = 5$ giây (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



Hình 9.9

Giải

$$v(t) = x'(t) = -\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right)' \cdot 4 \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right) = -8\pi \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right).$$

Vận tốc của vật tại thời điểm t là

Gia tốc tức thời của vật tại thời điểm t là

$$a(t) = v'(t) = -8\pi \left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right)' \cdot \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right) = -16\pi^2 \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right).$$

Tại thời điểm $t = 5$ giây, gia tốc của vật là

$$a(5) = -16\pi^2 \cos\left(10\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -16\pi^2 \cos\frac{\pi}{3} \approx -79 \text{ (cm/s}^2\text{)}.$$

Câu 23. (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Một vật chuyển động thẳng có phương trình $s = 2t^2 + \frac{1}{2}t^4$ (s) tính bằng mét, t tính bằng giây). Tìm gia tốc của vật tại thời điểm $t = 4$ giây.

Lời giải

Ta có: $s'(t) = 4t + 2t^3$. Gia tốc của vật tại thời điểm t giây là: $a(t) = s''(t) = 4 + 6t^2$.

Tại thời điểm $t = 4$ giây, gia tốc của vật là: $a(4) = 4 + 6 \cdot 4^2 = 100 \text{ (m/s}^2\text{)}$.

Câu 24. (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Phương trình chuyển động của một hạt được cho bởi

$s(t) = 10 + 0,5 \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{5}\right)$, trong đó s tính bằng centimét và t tính bằng giây. Tính gia tốc của hạt tại thời điểm $t = 5$ giây (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Lời giải

Ta có: $s'(t) = 0,5 \left(2\pi t + \frac{\pi}{5}\right)' \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{5}\right) = \pi \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{5}\right)$. Gia tốc của hạt tại thời điểm t giây là:

$$a(t) = s''(t) = -\pi \left(2\pi t + \frac{\pi}{5}\right)' \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{5}\right) = -2\pi^2 \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{5}\right)$$

Tại thời điểm $t = 5$ giây, gia tốc của hạt là: $a(5) = -2\pi^2 \sin\left(10\pi + \frac{\pi}{5}\right) \approx -11,6 \text{ (cm/s}^2\text{)}$.

Câu 25. Phương trình chuyển động của một hạt được cho bởi công thức $s(t) = 15 + \sqrt{2} \sin\left(4\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$, trong đó s tính bằng centimét và t tính bằng giây. Tính gia tốc của hạt tại thời điểm $t = 3$ giây (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Lời giải

Gia tốc của hạt tại thời điểm t là: $a(t) = s''(t) = -16\pi^2 \sqrt{2} \sin\left(4\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$. Tại thời điểm $t=3$ giây, gia tốc của hạt là:

$$a = -16\pi^2 \sqrt{2} \sin\left(12\pi + \frac{\pi}{6}\right) \approx -111,7 \text{ m/s}^2$$

Câu 26. Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = -2t^2 + 15t + 3$, trong đó s tính bằng mét và t là thời gian tính bằng giây. Tính vận tốc và gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t=2$.

Giải

Ta có $s'(t) = -2 \cdot 2t + 15 = -4t + 15$, suy ra $s''(t) = -4$.

Vận tốc và gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t=2$ lần lượt là $s'(2) = 7 \text{ m/s}$ và $s''(2) = -4 \text{ m/s}^2$.

Câu 27. Một chất điểm chuyển động thẳng có phương trình $s = 100 + 2t - t^2$ trong đó thời gian được tính bằng giây và s được tính bằng mét.

a) Tại thời điểm nào chất điểm có vận tốc bằng 0?

b) Tìm vận tốc và gia tốc của chất điểm tại thời điểm $t=3 \text{ s}$.

Lời giải

a) $s'(t) = 2 - 2t$

$$s'(t) = 0 \Rightarrow 2 - 2t = 0 \Rightarrow t = 1$$

Vận tốc chất điểm bằng 0 khi $t=1 \text{ s}$.

b) Khi $t=3 \text{ s}$.

$$s'(3) = 2 - 2 \cdot 3 = -4 \text{ (m/s)};$$

$$s''(3) = -2 \Rightarrow a(3) = -2 \text{ m/s}^2.$$

Vậy khi $t=3 \text{ s}$ thì vận tốc của vật là -4 m/s . Gia tốc của vật là -2 m/s^2 .

Câu 28. Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = -2t^3 + 75t + 3$, trong đó s tính bằng mét và t là thời gian tính bằng giây. Tính vận tốc và gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t=3$.

Lời giải

Ta có $s'(t) = -6t^2 + 75$ suy ra $s''(t) = -12t$.

Vận tốc và gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t=3$ là $s'(3) = 21$ và $s''(3) = -36$.

Câu 29. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 5t + 4$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây, $s(t)$ tính bằng mét. Tính gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t=3 \text{ (s)}$.

Giải

Ta có: $s'(t) = t^2 - 6t + 5$.

Gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t(s)$ là:

$s''(t) = 2t - 6$. Vậy gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t=3 \text{ (s)}$ là:

$$s''(3) = 2 \cdot 3 - 6 = 0 \text{ (m/s}^2\text{)}.$$

Câu 30. Một chất điểm có phương trình chuyển động $s(t) = 6 \sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)$, trong đó $t > 0, t$ tính bằng giây, $s(t)$ tính bằng centimét. Tính gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = \frac{\pi}{6}$ (s).

Giải

Ta có: $s'(t) = 18 \cos\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)$.

Gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t(s)$ là: $s''(t) = -54 \sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)$.

Vậy gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = \frac{\pi}{6}$ (s) là:

$$s''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -54 \sin\left(3 \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = -27\sqrt{2} \text{ (cm/s}^2\text{)}.$$

Câu 31. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 8t + 2$, trong đó $t > 0, t$ tính bằng giây, $s(t)$ tính bằng mét. Tính gia tốc tức thời của chất điểm:

a) Tại thời điểm $t = 5$ (s).

b) Tại thời điểm mà vận tốc tức thời của chất điểm bằng -1 m/s .

Lời giải

Ta có: $s'(t) = t^2 - 6t + 8, s''(t) = 2t - 6$.

a) Gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = 5$ (s) là: $s''(5) = 4 \text{ (m/s}^2\text{)}$.

b) Theo giả thiết, $s'(t) = t^2 - 6t + 8 = -1 \Leftrightarrow t = 3$ (s).

Gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = 3$ (s) là: $s''(3) = 0 \text{ (m/s}^2\text{)}$.

Câu 32. Một chất điểm có phương trình chuyển động $s(t) = 3 \sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$, trong đó $t > 0, t$ tính bằng giây, $s(t)$ tính bằng centimét. Tính gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = \frac{\pi}{2}$ (s).

Lời giải

Ta có: $s''(t) = -3 \sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$.

Gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = \frac{\pi}{2}$ (s) là:

$$s''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3 \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{3}{2} \text{ (cm/s}^2\text{)}.$$