

PHẦN MỘT: MỞ ĐẦU

I. LÍ DO CHỌN ĐỀ TÀI

1. Với mục tiêu “*Nâng cao dân trí, đào tạo nhân lực, bồi dưỡng nhân tài, hình thành đội ngũ lao động có tri thức và tay nghề, có năng lực thực hành, năng động, sáng tạo, có đạo đức cách mạng, tinh thần yêu nước, yêu chủ nghĩa xã hội*” (**Trích văn kiện Đại hội Đảng toàn quốc lần thứ VII**). Tại Hội nghị Ban Chấp hành Trung ương Đảng (khóa XI), ngày 29/10/2012 cũng đã ban hành Kết luận số 51 KL/TW về Đề án “*Đổi mới căn bản, toàn diện giáo dục và đào tạo, đáp ứng yêu cầu công nghiệp hóa, hiện đại hóa trong điều kiện kinh tế thị trường định hướng xã hội chủ nghĩa và hội nhập quốc tế*”. Trong những năm qua giáo dục nước ta đã và đang có những đổi mới mạnh mẽ cả về nội dung, phương pháp và đã thu được những kết quả khả quan.

2. Việc đổi mới phương pháp dạy học là vấn đề cấp bách, thiết thực nhằm đào tạo những con người có năng lực hoạt động trí tuệ tốt. Đổi mới phương pháp dạy học không chỉ trong các bài giảng lý thuyết, mà ngay cả trong quá trình luyện tập. Luyện tập ngoài việc rèn luyện kỹ năng tính toán, kỹ năng suy luận mà thông qua qua đó còn giúp học sinh biết tổng hợp, khái quát các kiến thức đã học, sắp xếp các kiến thức một cách hệ thống, giúp học sinh vận dụng các kiến thức đã học vào giải bài tập một cách năng động sáng tạo.

3. Về mặt phương pháp, từ các phương pháp dạy truyền thống như phương pháp dùng lời (thuyết trình, đàm thoại ...), các phương pháp trực quan, các phương pháp thực hành, luyện tập.... đến các xu hướng dạy học hiện đại như: dạy học giải quyết vấn đề, lý thuyết tình huống, dạy học phân hóa, dạy học có sự hỗ trợ của công nghệ thông tin, có sử dụng máy tính đã tạo ra một không khí học tập hoàn toàn mới.

4. Với tinh thần đó, tôi cũng đã có những đổi mới về mặt phương pháp giảng dạy để phù hợp với giáo dục trong giai đoạn hiện nay. Trong công tác giảng dạy, tôi đã luôn trau dồi, tích lũy kinh nghiệm qua từng bài học, qua từng tiết dạy cũng như đã dự nhiều tiết dạy của đồng nghiệp giúp tôi ngày càng hoàn thiện từ đó giúp các em học sinh hăng say trong tìm tòi nghiên cứu và học tập, các em đã linh hoạt và sáng tạo hơn trong con đường chiếm lĩnh tri thức của mình.

II. MỤC ĐÍCH, NHIỆM VỤ NGHIÊN CỨU

Qua đề tài này, tác giả cố gắng làm sáng tỏ hệ thống kiến thức về phương trình, bất phương trình vô tỉ ở trường phổ thông để hình thành cho học sinh phương pháp giải các dạng toán này một cách chủ động, tự tin và khoa học.

III. ĐỐI TƯỢNG NGHIÊN CỨU

Các bài toán về phương trình, bất phương trình vô tỉ ở trường THPT thường gặp trong các kỳ thi THPT Quốc Gia và thi HSG.

IV. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

1. Phương pháp nghiên cứu lý luận: Nghiên cứu Sách giáo khoa, Sách bài tập, Sách tham khảo, đề thi THPT, đề thi HSG và các tài liệu liên quan.

2. Phương pháp điều tra thực tiễn: Dự giờ của đồng nghiệp, quan sát việc dạy và học phần bài tập này.

3. Phương pháp thực nghiệm sư phạm: Tiến hành trên các tập thể lớp.

PHẦN HAI: NỘI DUNG

A. CỞ SỞ LÝ LUẬN: *Muốn giải một bài toán ta thường thực hiện 2 bước:*

Bước 1: Huy động kiến thức: Là một thao tác tư duy nhằm tái hiện các kiến thức có liên quan với bài toán, từ lý thuyết, phương pháp giải, các bài toán đã gặp, do đó người làm toán phải biết và cần biết ý tưởng kiểu như: ta đã gặp bài toán nào gần gũi với bài toán này hay chưa? Nhà bác học Polia đã viết ra một quyển sách kinh điển với nội dung: **"Giải bài toán như thế nào trong đó ông có đề cập đến nội dung trên như một điều kiện thiết yếu"**.

Bước 2: Tổ chức kiến thức: Là một tổ hợp các hành động, thao tác để sắp xếp các kiến thức đã biết và các yêu cầu của bài toán lên hệ với nhau như thế nào để từ đó trình bày bài toán theo một thể thống nhất. Có nhiều cách lựa chọn cho việc tổ chức kiến thức mà trong đó phương pháp tương tự hay tổng quát hóa là những thao tác tư duy cần thiết cho người làm toán.

B. THỰC TRẠNG CỦA VẤN ĐỀ NGHIÊN CỨU

1. Trong chương trình Toán cấp THCS và THPT học sinh thường gặp nhiều bài toán về phương trình và bất phương trình vô tỉ (có ẩn trong dấu căn thức). Như vậy vấn đề đặt ra là làm thế nào để có thể giải tốt được loại toán này? Để trả lời được câu hỏi đó bản thân học sinh cần có kiến thức và nắm vững kỹ năng giải toán. Song hiểu theo cách nói là một lẽ, nhưng để giải quyết tốt loại toán này lại là một vấn đề không dễ. Khi làm các bài tập dạng này đa số học sinh còn gặp nhiều khó khăn, lời giải thường thiếu chặt chẽ dẫn đến không có kết quả tốt, hoặc nếu có thì kết quả cũng không cao.

2. Với những đặc điểm như vừa nêu, tôi cũng đã nghiên cứu, tìm tòi qua nhiều tài liệu, suy nghĩ nhiều giải pháp với mong muốn giúp các em học sinh có thể tiếp cận các bài toán về phương trình, bất phương trình vô tỉ một cách đơn giản, nhẹ nhàng nhưng vẫn đảm bảo các yêu cầu cần thiết của đối với nội dung này, giúp học sinh có cái nhìn cụ thể, rõ ràng hơn đối với một trong những vấn đề khó ở trường phổ thông, bởi vậy tôi chọn đề tài **"*Hướng dẫn học sinh giải phương trình, bất phương trình vô tỉ trong thi tốt nghiệp THPT Quốc Gia và thi học sinh Giỏi*"**. Tôi mong rằng qua đề tài này có thể góp phần làm tăng thêm khả năng tư duy khoa học, khả năng thực hành, kỹ năng giải toán... về phương trình và bất phương trình vô tỉ của phần đa các em học sinh.

C. CÁC GIẢI PHÁP ĐỂ GIẢI QUYẾT VẤN ĐỀ

I. HƯỚNG DẪN HỌC SINH TIẾP THU KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Những định lý về dấu thường được sử dụng:

1.1. Định lý về dấu nhị thức bậc nhất:

Cho nhị thức $f(x) = a.x + b$ ($a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$) có nghiệm $x_0 = -\frac{b}{a}$. Khi đó dấu của $f(x)$ được thể hiện tóm tắt qua bảng sau:

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
Dấu của $f(x)$	trái dấu hệ số a	0	cùng dấu hệ số a

1.2: Định lý về dấu tam thức bậc hai:

Cho tam thức $f(x) = a.x^2 + b.x + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0$).

Kí hiệu $\Delta = b^2 - 4ac$ (hoặc $\Delta' = b'^2 - ac$). Khi đó:

+ Nếu $\Delta < 0$ thì tam thức cùng dấu hệ số a với $\forall x \in \mathbb{R}$ (có nghĩa là $a.f(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$)

+ Nếu $\Delta = 0$ thì tam thức cùng dấu hệ số a với $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq -\frac{b}{2a}$ (nghĩa là $a.f(x) > 0 \forall x \neq -\frac{b}{2a}$)

+ Nếu $\Delta > 0$ thì tam thức có hai nghiệm phân biệt $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Khi đó dấu của tam thức được thể hiện tóm tắt qua bảng sau

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
Dấu của f(x)	cùng dấu a	0	trái dấu a	0	cùng dấu a

2. Các bước thực hiện giải một phương trình, bất phương trình vô tỉ

Bước 1: Nêu điều kiện xác định hoặc điều kiện nghiệm (nếu có)

Bước 2: Dùng các phép biến đổi tương đương để khử dần các căn thức

Bước 3: Đưa về một hệ gồm các phương trình, bất phương trình đơn giản và giải hệ thu được đó

Bước 4: Lấy giao các tập nghiệm vừa tìm được để xác định tập nghiệm cho bài toán ban đầu (có thể sử dụng trục số để lấy nghiệm).

3. Các phương trình, bất phương trình vô tỉ cơ bản:

Dạng 1. Phương trình $\sqrt{f(x)} = g(x)$ (1).

Đối với phương trình dạng (1) ta đưa về giải hệ sau
$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = [g(x)]^2 \end{cases}$$

Ví dụ 1: Giải phương trình $\sqrt{3x^2 - 4x + 1} = 2x - 2$

Lời giải: Phương trình tương đương với hệ

$$\begin{cases} 2x - 2 \geq 0 \\ 3x^2 - 4x + 1 = (2x - 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = 1 \vee x = 3 \end{cases}. \text{Vậy, tập nghiệm của PT là } S = \{1; 3\}.$$

Ví dụ 2: Giải phương trình $\sqrt{-x^2 + 4x - 3} = 2x - 5$

Lời giải: Phương trình tương đương với hệ

$$\begin{cases} 2x - 5 \geq 0 \\ -x^2 + 4x - 3 = 4x^2 - 20x + 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{5}{2} \\ 5x^2 - 24x + 28 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{5}{2} \\ x = \frac{14}{5} \vee x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{14}{5}. \text{Vậy } S = \left\{ \frac{14}{5} \right\}$$

Dạng 2. Bất phương trình $\sqrt{f(x)} \leq g(x)$ (2).

Đối với bất phương trình dạng (2) ta đưa về giải hệ
$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \\ f(x) \leq [g(x)]^2 \end{cases}$$

Ví dụ 3: Giải bất phương trình $\sqrt{x^2 - 4x + 3} < x + 1$. (3)

Lời giải: Bất phương trình (3) $\Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 > 0 \\ x^2 - 4x + 3 \geq 0 \\ x^2 - 4x + 3 < (x + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x \leq 1 \vee x \geq 3 \\ 6x - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} < x \leq 1 \\ x \geq 3 \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = \left(\frac{1}{3}; 1 \right] \cup [3; +\infty)$.

Ví dụ 4: Giải bất phương trình $\sqrt{2(x^2 - 1)} \leq x + 1$.

Lời giải: Bất phương trình tương đương hệ sau

$$\begin{cases} 2(x^2 - 1) \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \\ 2(x^2 - 1) \leq (x + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ x \geq -1 \\ x^2 - 2x - 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \vee x \geq 1 \\ -1 \leq x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ 1 \leq x \leq 3 \end{cases}.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = [-1; 3] \cup \{-1\}$.

Dạng 3. Bất phương trình $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$ (III).

Đối với bất phương trình dạng (3) được ta đưa về giải hai hệ

$$\text{là } \begin{cases} g(x) \leq 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \text{ (A) và hệ } \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq [g(x)]^2 \end{cases} \text{ (B)}$$

Ví dụ 5: Giải bất phương trình $\sqrt{x^2 - 4x} > x - 3$.

Lời giải: Bất phương trình tương đương với hai hệ sau:

$$\begin{cases} x^2 - 4x \geq 0 \\ x - 3 < 0 \end{cases} \quad (\text{A}) \quad \text{và} \quad \begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ x^2 - 4x > (x - 3)^2 \end{cases} \quad (\text{B})$$

*) Hệ (A) ta có $\begin{cases} x \leq 0 \vee x \geq 4 \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq 0$. *) Hệ (B) ta có $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ 2x > 9 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{9}{2}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = (-\infty; 0] \cup \left(\frac{9}{2}; +\infty\right)$.

Ví dụ 6: Giải bất phương trình $\sqrt{x^2 - 4x + 5} + 2x \geq 3$.

Lời giải: Bất phương trình đã cho được viết lại $\sqrt{x^2 - 4x + 5} \geq 3 - 2x$ (6)

Bất phương trình (6) tương đương với hai hệ sau:

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 5 \geq 0 \\ 3 - 2x < 0 \end{cases} \quad (\text{A}) \quad \text{và} \quad \begin{cases} 3 - 2x \geq 0 \\ x^2 - 4x + 5 \geq (3 - 2x)^2 \end{cases} \quad (\text{B})$$

* Giải hệ (A) ta được $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ x > \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$. * Giải hệ (B) ta được $\begin{cases} x \leq \frac{3}{2} \\ 3x^2 - 8x + 4 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq x \leq \frac{3}{2}$.

Vậy tập nghiệm của BPT đã cho là $S = \left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

II. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP THƯỜNG VẬN DỤNG ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ TRONG THI THPT QUỐC GIA VÀ THI HỌC SINH GIỎI

Phương pháp 1: *Nâng lũy thừa và các phép biến đổi tương đương để đưa các phương trình, bất phương trình về một hệ.*

1. Thuật toán chung:

Bước 1: Nhận dạng đặc điểm bài toán, nêu điều kiện xác định (ĐKXD).

Bước 2: Biến đổi để hai vế cùng không âm, nếu cần.

Bước 3: Nâng lũy thừa (thường là bậc hai) hai vế để khử dần các căn thức.

Bước 4: Gộp các điều kiện lại để được một hệ gồm các PT, BPT cơ bản.

Bước 5: Giải hệ thu được để từ đó xác định tập nghiệm của bài toán.

2. Một số ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Giải phương trình $\sqrt{2(x+4)} - \sqrt{2x} = \sqrt{2x+3}$ (1)

Lời giải: Điều kiện xác định: $x \geq 0$

Ta có (1) $\Leftrightarrow \sqrt{2(x+4)} = \sqrt{2x+3} + \sqrt{2x} \Leftrightarrow 2(x+4) = 2x+3 + 2\sqrt{(2x+3)(2x)} + 2x$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(2x+3)(2x)} = 5 - 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - 2x \geq 0 \\ 4(2x+3)(2x) = (5 - 2x)^2 \end{cases} \quad (1')$$

Ta có (1') $\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{5}{2} \\ 12x^2 + 44x - 25 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{5}{2} \\ x = \frac{1}{2} \vee x = -\frac{25}{6} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$. Vậy, tập nghiệm là $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Ví dụ 2: Giải bất phương trình $\sqrt{5x+1} - \sqrt{4x-1} \leq 3\sqrt{x}$ (2)

Lời giải: Điều kiện xác định: $x \geq \frac{1}{4}$

Ta có (2) $\Leftrightarrow \sqrt{5x+1} \leq \sqrt{4x-1} + 3\sqrt{x} \Leftrightarrow 6\sqrt{4x^2-x} \geq 2-8x$ (2'), vì $x \geq \frac{1}{4} \Rightarrow 2-8x \leq 0$, do đó BPT

(2') luôn thỏa mãn. Vậy, tập nghiệm cần tìm là $S = [\frac{1}{4}; +\infty)$.

Ví dụ 3: Giải bất phương trình $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} \geq \sqrt{2x-3}$ (3)

Lời giải: Điều kiện xác định: $x \geq \frac{3}{2}$

Ta có (3) $\Leftrightarrow \sqrt{x+2} \geq \sqrt{2x-3} + \sqrt{x-1} \Leftrightarrow x+2 \geq 3x-4+2\sqrt{2x-3}\sqrt{x-1} \Leftrightarrow \sqrt{x^2-5x+3} \leq 3-x$ (3')

$$(3') \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x \geq 0 \\ 2x^2-5x+3 \geq 0 \\ 2x^2-5x+3 \leq (3-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2} \leq x \leq 3 \\ x^2+x-6 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2} \leq x \leq 3 \\ -3 \leq x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq x \leq 2.$$

Tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left[\frac{3}{2}; 2\right]$.

Ví dụ 4: Giải phương trình $\sqrt{x^2-x} + \sqrt{x^2-2x} = \sqrt{x^2+3x}$ (4)

Lời giải: Điều kiện: $\begin{cases} x^2-x \geq 0 \\ x^2-2x \geq 0 \\ x^2+3x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x = 0 \\ x \leq -3 \end{cases}$

Bình phương cả hai vế phương trình đã cho ta được

$$(x^2-x) + (x^2-2x) + 2\sqrt{x^2-x}\sqrt{x^2-2x} = x^2+3x \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-x}\sqrt{x^2-2x} = 6x-x^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x-x^2 \geq 0 \\ 4(x^2-x)(x^2-2x) = (6x-x^2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 6 \\ x^2=0 \\ 3x^2=28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{2\sqrt{21}}{3} \end{cases}$$

Vậy, tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{0; \frac{2\sqrt{21}}{3}\right\}$

Ví dụ 5: Giải bất phương trình $\frac{\sqrt{2(x^2 - 16)}}{\sqrt{x - 3}} + \sqrt{x - 3} > \frac{7 - x}{\sqrt{x - 3}}$ (5)

Lời giải: Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - 16 \geq 0 \\ x - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 4$

Biến đổi bất phương trình về dạng $\sqrt{2(x^2 - 16)} + x - 3 > 7 - x \Leftrightarrow \sqrt{2(x^2 - 16)} > 10 - 2x$ (5')

Bất phương trình (5') $\Leftrightarrow \begin{cases} 10 - 2x < 0 \\ 10 - 2x \geq 0 \\ 2(x^2 - 16) > (10 - 2x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 5 \\ 10 - \sqrt{34} < x \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow x > 10 - \sqrt{34}$

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình đã cho là: $S = (10 - \sqrt{34}; +\infty)$.

Ví dụ 6: Giải bất phương trình $\frac{\sqrt{-3x^2 + x + 4} + 2}{x} < 2$ (6)

Lời giải: Điều kiện: $\begin{cases} 3x^2 + x + 4 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq \frac{4}{3}, x \neq 0$.

Ta xét theo hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: $0 < x \leq \frac{4}{3}$, khi đó (6) $\Leftrightarrow \sqrt{-3x^2 + x + 4} < 2x - 2$ (6.1)

Ta có (6.1) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 > 0 \\ -3x^2 + x + 4 \geq 0 \\ -3x^2 + x + 4 < (2x - 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ -1 \leq x \leq \frac{4}{3} \\ 7x^2 - 9x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{9}{7} < x \leq \frac{4}{3}$.

Trường hợp 2: $-1 \leq x < 0$, bất phương trình (6) $\Leftrightarrow \sqrt{-3x^2 + x + 4} > 2x - 2$ (6.2)

Bất phương trình (6.2) luôn luôn đúng (vì $2x - 2 < 0 \quad \forall x < 0$).

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là: $S = [-1; 0) \cup (0; \frac{4}{3}]$.

Nhận xét: Đối với các bất phương trình có chứa cả ẩn ở mẫu thức, ta có thể chia miền xác định của bài toán để xét.

Phương pháp 2: Dùng ẩn phụ để đưa về một phương trình, hệ phương trình hoặc một bất phương trình đơn giản.

1. Thuật toán chung:

Bước 1. Đặt $t = \sqrt{f(x)}$ (hoặc $t = a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{g(x)} + \dots$), với $f(x), g(x), \dots$ là các biểu thức của x và $a, b, \dots$ là các hằng số. Nêu điều kiện cho t (nếu cần).

Bước 2. Đưa bài toán về phương trình, bất phương trình ẩn t . Giải bài toán theo t .

Bước 3. Với mỗi giá trị nghiệm thỏa mãn, thay trở lại để tìm x . Kết luận tập nghiệm.

2. Các trường hợp thường gặp trong đối với cách đặt ẩn phụ:

Loại 1: Trong phương trình, bất phương trình có chứa: $f(x)$, $\sqrt{f(x)}$

** Trong trường hợp này ta thường đặt $t = \sqrt{f(x)}$*

Ví dụ 1: Giải phương trình $\sqrt{2x^2 + 4x + 1} = 1 - 2x - x^2$.

Lời giải: Đặt $t = \sqrt{2x^2 + 4x + 1}$ ($t \geq 0$) $\Rightarrow t^2 = 2x^2 + 4x + 1$. Phương trình trở thành

$$\frac{1}{2}t^2 + t - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow t = 1 \vee t = -3. \text{ Vì } t \geq 0 \text{ nên ta chọn } t = 1 \Rightarrow 2x^2 + 4x + 1 = 1 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x = 0$$

Giải phương trình ta được $x = 0, x = -2$.

Ví dụ 2: Giải bất phương trình $(x+1)(x+4) < 5\sqrt{x^2 + 5x + 28}$.

Lời giải: Đặt $t = \sqrt{x^2 + 5x + 28}$ ($t \geq 0$) $\Rightarrow t^2 = x^2 + 5x + 28$. Bất phương trình trở thành

$$t^2 - 5t - 24 < 0 \Leftrightarrow -3 < t < 8. \text{ Vì } t \geq 0 \text{ nên ta có } t < 8 \Rightarrow x^2 + 5x - 36 < 0 \Leftrightarrow -9 < x < 4.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-9; 4)$.

Loại 2: Phương trình, bất phương trình đã cho hoặc biến đổi về dạng

$$A(\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)}) + B\sqrt{f(x).g(x)} + C.h(x) = 0 \text{ (hoặc } A(\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)}) + B\sqrt{f(x).g(x)} + C.h(x) \geq 0$$

Trong đó: A, B, C là các hằng số, $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ là các biểu thức của x.

** Trong trường hợp này ta thường đặt $t = \sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)}$ rồi biến đổi đưa phương trình, bất phương trình về ẩn t.*

Ví dụ 3: Giải phương trình $2(x-1)(x+2) + 2 = (3-x-x^2)\sqrt{x^2 + x + 2}$.

Lời giải: Điều kiện xác định: $x \in \mathbb{R}$

Phương trình tương đương với $2(x^2 + x + 2) - 6 = [5 - (x^2 + x + 2)]\sqrt{x^2 + x + 2}$.

Đặt $t = \sqrt{x^2 + x + 2}$ ($t \geq 0$). Phương trình trở thành $2t^2 - 6 = (5 - t^2)t \Leftrightarrow t^3 + 2t^2 - 5t - 6 = 0$

$$\Leftrightarrow (t-2)(t+1)(t+3) = 0 \Leftrightarrow t = 2 \text{ (vì } t \geq 0) \text{ từ đó ta được } x^2 + x + 2 = 4 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \\ \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1. \text{ Vậy, tập nghiệm của phương trình là } S = \{-2; 1\}.$$

Ví dụ 4: Giải phương trình $\sqrt{2-x} + \sqrt{x} + 5\sqrt{2x-x^2} = 7$.

Lời giải: Điều kiện xác định: $0 \leq x \leq 2$.

Đặt $t = \sqrt{2-x} + \sqrt{x} \Rightarrow t^2 = 2 + 2\sqrt{2x-x^2}$ (với $t \geq 0$), phương trình trở thành

$$t + \frac{5}{2}(t^2 - 2) = 7 \Leftrightarrow \frac{5}{2}t^2 + t - 12 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \text{ hoặc } t = -\frac{12}{5}$$

Do $t \geq 0$ nên ta chọn $t = 2 \Rightarrow \sqrt{2x-x^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Ví dụ 5: Giải phương trình $3\sqrt{2+x} - 6\sqrt{2-x} + 4\sqrt{4-x^2} = 10 - 3x$.

Lời giải: Điều kiện xác định $-2 \leq x \leq 2$.

$$\text{Đặt } t = \sqrt{2+x} - 2\sqrt{2-x} \Rightarrow t^2 = 2+x - 4\sqrt{4-x^2} + 8 - 4x$$

$$\text{phương trình trở thành } 3t + 10 - t^2 = 10 \Leftrightarrow t^2 - 3t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=3 \end{cases}$$

$$* t=0 \Rightarrow \sqrt{2+x} - 2\sqrt{2-x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2+x} = 2\sqrt{2-x} \Leftrightarrow x = \frac{6}{5} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

$$* t=3 \Rightarrow \sqrt{2+x} - 2\sqrt{2-x} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{2+x} = 3 + 2\sqrt{2-x} \Leftrightarrow 2+x = 9 + 12\sqrt{2-x} + 4(2-x) \\ \Leftrightarrow 12\sqrt{2-x} = 5x - 15 \text{ (PT này vô nghiệm do } x \leq 2 \Rightarrow VP = 5x - 15 < 0 \leq VT).$$

$$\text{Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là } S = \left\{ \frac{6}{5} \right\}.$$

Loại 3: Sử dụng kỹ thuật nhân, chia cho một đại lượng (khác 0) để xuất hiện ẩn phụ

Ví dụ 6: Giải phương trình $\sqrt{x^2 - x + 4} + \sqrt{x^2 + 11x + 4} = 6\sqrt{x}$

Lời giải: Điều kiện $x \geq 0$. * Xét $x=0$ không thỏa mãn phương trình.

* Xét $x \neq 0$, chia hai vế của phương trình cho $\sqrt{x}$ ta được phương trình

$$\sqrt{x - 1 + \frac{4}{x}} + \sqrt{x + 11 + \frac{4}{x}} = 6 \Leftrightarrow \sqrt{x + \frac{4}{x} - 1} + \sqrt{x + \frac{4}{x} + 11} = 6.$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x + \frac{4}{x} - 1} \text{ (} t \geq 0 \text{), phương trình trở thành } t + \sqrt{12 + t^2} = 6 \Leftrightarrow \sqrt{t^2 + 12} = 6 - t$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6 - t \geq 0 \\ t^2 + 12 = (6 - t)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 6 \\ t = 2 \end{cases} \Rightarrow t = 2. \text{ Với } t = 2 \Rightarrow \sqrt{x + \frac{4}{x} - 1} = 2 \Leftrightarrow x + \frac{4}{x} - 1 = 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=4 \end{cases}. \text{ Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là } S = \{1; 4\}.$$

Ví dụ 7: Giải bất phương trình $x + 1 + \sqrt{x^2 - 4x + 1} \geq 3\sqrt{x}$

Lời giải: Điều kiện $x \geq 0$. * Xét $x=0$: thỏa mãn bất phương trình.

* Xét $x \neq 0$, chia hai vế của bất phương trình cho $\sqrt{x}$ ta được

$$\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x + \frac{1}{x} - 4} \geq 3. \text{ Đặt } t = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ (} t > 0 \text{), bất phương trình trở thành}$$

$$t + \sqrt{t^2 - 6} \geq 3 \Leftrightarrow \sqrt{t^2 - 6} \geq 3 - t \Leftrightarrow 3 - t < 0 \text{ hoặc } \begin{cases} 3 - t \geq 0 \\ t^2 - 6 \geq (3 - t)^2 \end{cases}. \text{ Giải ra ta được } t \geq \frac{5}{2}$$

Với $t \geq \frac{5}{2} \Rightarrow \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq \frac{5}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 2$ hoặc $\sqrt{x} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < x \leq \frac{1}{4} \vee x \geq 4$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = [0; \frac{1}{4}] \cup [4; +\infty)$.

Ví dụ 8: Giải phương trình $2x^2 - 6x + 4 = 3\sqrt{x^3 + 8}$

Lời giải: Điều kiện $x \geq -2$.

Phương trình được biến đổi thành $2(x^2 - 2x + 4) - 2(x + 2) - 3\sqrt{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)} = 0$

Chia hai vế của phương trình cho $x^2 - 2x + 4 > 0$ ta được

$2 - \frac{2(x + 2)}{(x^2 - 2x + 4)} - 3\sqrt{\frac{2(x + 2)}{(x^2 - 2x + 4)}} = 0$. Đặt $t = \sqrt{\frac{x + 2}{x^2 - 2x + 4}}$ ($t \geq 0$), khi đó phương trình trở thành $2t^2 + 3t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \vee t = -2$. Do $t \geq 0$ nên ta chọn $t = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{x + 2}{x^2 - 2x + 4}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x + 2}{x^2 - 2x + 4} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2 - 6x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - \sqrt{13} \\ x = 3 + \sqrt{13} \end{cases}$$

Ví dụ 9: Giải bất phương trình $(x - 1)^2 + 3 \leq 2\sqrt{x^3 - 1}$

Lời giải: Điều kiện $x \geq 1$. Bất phương trình được biến đổi thành

$$(x^2 + x + 1) - 2(x - 1) - 2\sqrt{(x - 1)(x^2 + x + 1)} \leq 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{3(x - 1)}{(x^2 + x + 1)} - 2\sqrt{\frac{x - 1}{x^2 + x + 1}} \leq 0.$$

Đặt $t = \sqrt{\frac{x - 1}{x^2 + x + 1}}$ ($t \geq 0$), khi đó bất phương trình trở thành $3t^2 + 2t - 1 \geq 0 \Leftrightarrow t \geq \frac{1}{3} \vee t \leq -1$.

Do $t \geq 0$ nên ta chọn $t \geq \frac{1}{3} \Rightarrow \sqrt{\frac{x - 1}{x^2 + x + 1}} \geq \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{x - 1}{x^2 + x + 1} \geq \frac{1}{9} \Leftrightarrow x^2 - 8x + 10 \leq 0$

$\Leftrightarrow 4 - \sqrt{6} \leq x \leq 4 + \sqrt{6}$. Vậy, tập nghiệm của BPT là $S = [4 - \sqrt{6}; 4 + \sqrt{6}]$.

Ví dụ 10: Giải bất phương trình $\sqrt{x^2 - x - 20} + 3\sqrt{x} \leq \sqrt{5x^2 - 4x - 6}$

Lời giải: Điều kiện $x \geq 2$. Bình phương hai vế ta được

$$x^2 - x - 20 + 9x + 6\sqrt{x(x^2 - x - 20)} \leq 5x^2 - 4x - 6 \Leftrightarrow 3\sqrt{x(x^2 - x - 20)} \leq 2x(x - 2) - 2(x + 1).$$

Chia hai vế bất phương trình cho $x + 1 > 0$ ta được $2\sqrt{\frac{x(x - 2)}{x + 1}} \leq 2\frac{x(x - 2)}{x + 1} - 2$

Đặt $t = \sqrt{\frac{x(x - 2)}{x + 1}}$ ($t \geq 0$), khi đó bất phương trình trở thành $2t^2 - 3t - 2 \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 2 \vee t \leq -\frac{1}{2}$.

Do $t \geq 0$ nên ta chọn $t \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x(x - 2)}{x + 1} \geq 4 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3 - \sqrt{13} \vee x \geq 3 + \sqrt{13}$.

Kết hợp điều kiện xác định ta suy ra tập nghiệm của BPT là $S = [3 + \sqrt{13}; +\infty)$.

Loại 4: Sử dụng hai ẩn phụ để chuyển về một hệ đơn giản

Ví dụ 11: Giải phương trình $2\sqrt{3x-2} - \sqrt{2x-1} = 1$

Lời giải: Điều kiện $x \geq \frac{2}{3}$. Đặt $\sqrt{3x-2} = u, \sqrt{2x-1} = v$ với $u \geq 0, v \geq 0$

$\Rightarrow u^2 = 3x-2, v^2 = 2x-1 \Rightarrow 2u^2 - 3v^2 = -1$. Khi đó ta thu được hệ

$$\begin{cases} 2u - v = 1 \\ 2u^2 - 3v^2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 2u - 1 \\ 10u^2 - 12u + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u = 1/5 \\ v = -3/5 \end{cases}$$

Do điều kiện đối với u, v nên ta chọn $\begin{cases} u = 1 \\ v = 1 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{3x-2} = \sqrt{2x-1} = 1 \Leftrightarrow x = 1$.

Ví dụ 12: Giải phương trình $\sqrt{4x+5} + 4\sqrt{(1-x)(4x+5)} = 3 - 2\sqrt{1-x}$

Lời giải: Điều kiện $-\frac{5}{4} \leq x \leq 1$. Đặt $\sqrt{4x+5} = u, 2\sqrt{1-x} = v$ với $u \geq 0, v \geq 0 \Rightarrow u^2 + v^2 = 9$.

Khi đó ta thu được hệ $\begin{cases} (u+v)^2 - uv = 9 \\ u+v+2uv = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3-2uv)^2 - uv = 9 \\ u+v = 3-2uv \end{cases} \Rightarrow 4u^2v^2 - 12uv = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} uv = 0 \\ uv = 3 \end{cases}$

* $uv = 0 \Rightarrow (4x+5)(1-x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -5/4$.

* $uv = 3 \Rightarrow 4(4x+5)(1-x) = 9 \Leftrightarrow 16x^2 - 16x + 11 = 0$ (VN). Vậy, tập nghiệm là $S = \{1; -5/4\}$

Ví dụ 13: Giải phương trình $5x^2 + 2 = 4\sqrt{\frac{4x-2}{5}}$.

Lời giải: Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$. Đặt $\sqrt{\frac{4x-2}{5}} = y$ ($y \geq 0$) $\Rightarrow 5y^2 + 2 = 4x$.

Ta được hệ $\begin{cases} 5x^2 + 2 = 4y \\ 5y^2 + 2 = 4x \end{cases} \Rightarrow (x-y)(5x+5y+4) = 0 \Leftrightarrow x = y \vee 5x+5y+4 = 0$.

Vì $x \geq 0, y \geq 0 \Rightarrow 5x+5y+4 > 0$, do đó $x = y \Rightarrow 5x^2 - 4x + 2 = 0$ (VN).

Vậy, bài toán vô nghiệm.

Phương pháp 3: Nhóm nhân tử chung để đưa về dạng tích.

1. Thuật toán chung:

- 1) Nêu điều kiện xác định và điều kiện nghiệm, nếu có.
- 2) Nhận dạng các biểu thức xuất hiện trong bài toán để ghép thành các cặp sao cho xuất hiện nhân tử chung.

3) Biến đổi để đưa về phương trình, bất phương trình có dạng tích.

4) Giải các phương trình, bất phương trình thu được từ kết quả trên. Lấy nghiệm bài toán

2. Một số ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Giải bất phương trình $\sqrt{x^2+10x+21} \geq 3\sqrt{x+3} + 2\sqrt{x+7} - 6$

Lời giải: Điều kiện $x \geq -3$.

BPT tương đương với $\sqrt{(x+3)(x+7)} - 3\sqrt{x+3} - 2\sqrt{x+7} + 6 \geq 0$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+3} - 2)(\sqrt{x+7} - 3) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} \geq 2 \\ \sqrt{x+7} \geq 3 \end{cases} \text{ (A) hoặc } \begin{cases} \sqrt{x+3} \leq 2 \\ \sqrt{x+7} \leq 3 \end{cases} \text{ (B)}$$

$$\text{Hệ (A)} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 \geq 4 \\ x+7 \geq 9 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2. \quad \text{Hệ (B)} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 \leq 4 \\ x+7 \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq 1.$$

Tập nghiệm của bất phương trình là $S = [-3; 1] \cup [2; +\infty)$.

Ví dụ 2: Giải phương trình $\sqrt{x^3+x^2+3x+3} + \sqrt{2x} = \sqrt{x^2+3} + \sqrt{2x^2+2x}$

Lời giải: Điều kiện $x \geq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{(3+x^2)(x+1)} + \sqrt{2x} = \sqrt{x^2+3} + \sqrt{2x(x+1)}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}(\sqrt{x^2+3} - \sqrt{2x}) - (\sqrt{x^2+3} - \sqrt{2x}) = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x^2+3} - \sqrt{2x})(\sqrt{x+1} - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+3} = \sqrt{2x} \\ \sqrt{x+1} = 1 \end{cases}$$

Từ đó suy ra nghiệm của phương trình là $x=0$.

Ví dụ 3: Giải phương trình $4x^2 + \sqrt{2x+3} = 8x+1$

Lời giải: Điều kiện $x \geq -3/2$.

Phương trình tương đương với $4x^2 - 6x + \frac{9}{4} = (\sqrt{2x+3})^2 - \sqrt{2x+3} + \frac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow \left(2x - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{2x+3} - \frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow (2x - \sqrt{2x+3} - 1)(2x + \sqrt{2x+3} - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = \sqrt{2x+3} \\ 2x - 2 = \sqrt{2x+3} \end{cases}$$

Giải các phương trình dạng cơ bản trên ta tìm được $x = \frac{5 - \sqrt{21}}{4}$, $x = \frac{3 + \sqrt{17}}{4}$.

Phương pháp 4: Nhân chia với biểu thức liên hợp

1. Thuật toán chung:

Bước 1. Nhận dạng đặc điểm bài toán. Nêu điều kiện xác định và điều kiện nghiệm, nếu có.

Bước 2. Nhân hai vế của phương trình, bất phương trình với biểu thức liên hợp tương ứng, từ đó biến đổi làm xuất hiện các nhân tử chung của chúng.

Bước 3. Đưa phương trình, bất phương trình về dạng đơn giản. Giải các phương trình, bất phương trình đó. Lấy nghiệm của bài toán.

2. Một số ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Giải phương trình $\sqrt{x+1} + 1 = 4x^2 + \sqrt{3x}$

Lời giải: Điều kiện $x \geq 0$.

Phương trình tương đương với $(4x^2 - 1) + \sqrt{3x} - \sqrt{x+1} = 0 \Leftrightarrow (2x-1)(2x+1) + \frac{2x-1}{\sqrt{3x} + \sqrt{x+1}} = 0$

$$\Leftrightarrow (2x-1)\left(2x+1 + \frac{1}{\sqrt{3x} + \sqrt{x+1}}\right) = 0 \Rightarrow 2x-1=0 \text{ (do } 2x+1 + \frac{1}{\sqrt{3x} + \sqrt{x+1}} > 0 \forall x \geq 0)$$

Vậy, nghiệm của phương trình là $x = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 2: Giải phương trình $\sqrt{2x-3} + \sqrt{x} = 2x-6$

Lời giải: Điều kiện $x \geq \frac{3}{2}$.

Phương trình tương đương với $\frac{x-3}{\sqrt{2x-3} + \sqrt{x}} - 2(x-3) = 0 \Leftrightarrow (x-3)\left(\frac{1}{\sqrt{2x-3} + \sqrt{x}} - 2\right) = 0$
 $\Leftrightarrow x=3 \quad (1)$

hoặc $\frac{1}{\sqrt{2x-3}} = 2 \quad (2)$. Do $x \geq \frac{3}{2} \Rightarrow \sqrt{2x-3} + \sqrt{x} \geq \sqrt{\frac{3}{2}} > 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2x-3} + \sqrt{x}} < 1 \Rightarrow (2)$ vô nghiệm

Vậy, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 3$.

Ví dụ 3: Giải bất phương trình $\frac{2x^2}{(3 - \sqrt{2x+9})^2} < x+21$

Lời giải: Điều kiện $x \geq -\frac{9}{2}, x \neq 0$. Nhân, chia vế trái của BPT với $(3 + \sqrt{9+2x})^2$ ta được

$$2 \left(\frac{x(3 + \sqrt{2x+9})}{(9 - (2x+9))} \right)^2 < x+21 \Leftrightarrow 2 \left(\frac{3 + \sqrt{9+2x}}{2} \right)^2 < x+21 \Leftrightarrow \sqrt{9+2x} < 4 \Leftrightarrow x < \frac{7}{2}$$

Kết hợp điều kiện xác định ta suy ra tập nghiệm của BPT là $S = \left[-\frac{9}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{7}{2}\right)$

Ví dụ 4: Giải bất phương trình $4(x+1)^2 < (2x+10)(1 - \sqrt{3+2x})^2$

Lời giải: Điều kiện $x \geq -\frac{3}{2}$. Nhân hai vế của BPT với $(1 + \sqrt{3+2x})^2$ ta được

$$4(x+1)^2(1 + \sqrt{3+2x})^2 < (2x+10)(1 - \sqrt{3+2x})^2(1 + \sqrt{3+2x})^2$$

$$\Leftrightarrow 4(x+1)^2(1+\sqrt{3+2x})^2 < (2x+10)(-2-2x)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ (1+\sqrt{3+2x})^2 < (2x+10) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ \sqrt{3+2x} < 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x < 3 \end{cases}. \text{ Kết hợp điều kiện xác định ta suy ra tập nghiệm là } S = \left[-\frac{3}{2}; -1\right) \cup (-1; 3).$$

Ví dụ 5: Giải phương trình $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = 2x^2 - 5x - 1$

Lời giải: Điều kiện $2 \leq x \leq 4$.

Phương trình tương đương với $(\sqrt{x-2} - 1) + (\sqrt{4-x} - 1) - (x-3)(2x+1) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{\sqrt{x-2}+1} + \frac{3-x}{\sqrt{4-x}+1} - (x-3)(2x+1) = 0 \Leftrightarrow (x-3) \left(\frac{1}{\sqrt{x-2}+1} - \frac{1}{\sqrt{4-x}+1} - (2x+1) \right) = 0 \quad (*)$$

Xét hàm $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}+1} - \frac{1}{\sqrt{4-x}+1}$ có $f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{x-2}(\sqrt{x-2}+1)} - \frac{1}{2\sqrt{4-x}(\sqrt{4-x}+2)} < 0$

$\Rightarrow f(x) \leq f(2) = 1 - \frac{1}{1+\sqrt{2}}$. Mặt khác $g(x) = 2x+1$ là hàm đồng biến nên $g(x) \geq g(2) = 5$

Do vậy phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x = 3$.

Phương pháp 5: Dùng tính chất đơn điệu của hàm số để rút ra một phương trình hay một bất phương trình đơn giản hơn từ phương trình, bất phương trình đã cho

1. Cơ sở lý thuyết:

Định lý 1: Nếu hàm số f luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) và liên tục trên tập D thì phương trình $f(x) = c$ (c là hằng số) có không quá một nghiệm trên tập hợp D .

Định lý 2: Nếu hàm số f luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) và liên tục trên tập D thì phương trình $f(u(x)) = f(v(x))$ tương đương với phương trình $u(x) = v(x)$ trên D .

Định lý 3: Nếu hàm số f luôn đồng biến và liên tục trên tập D thì bất phương trình $f(u(x)) \geq f(v(x))$ tương đương với phương trình $u(x) \geq v(x)$ trên D .

Định lý 4: Nếu hàm số f luôn nghịch biến và liên tục trên tập D thì bất phương trình $f(u(x)) \geq f(v(x))$ tương đương với phương trình $u(x) \leq v(x)$ trên D .

2. Thuật toán chung:

Bước 1: Nhận dạng bài toán, nêu điều kiện xác định và điều kiện nghiệm, nếu có.

Bước 2: Biến đổi phương trình (hoặc bất phương trình) về dạng $f(u) = f(v)$ (hoặc $f(u) \geq f(v)$) với $u = u(x)$, $v = v(x)$ là các biểu thức của x .

Bước 3: Xét tính chất của hàm $y = f(t)$ trên miền xác định của nó.

Bước 4: Từ tính chất của hàm f ta suy ra một phương trình (hoặc bất phương trình) tương đương.

Bước 5: Giải phương trình, bất phương trình thu được để xác định tập nghiệm.

3. Một số ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Giải phương trình $x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = (3x + 2)\sqrt{3x + 1}$ (1)

Lời giải: Điều kiện $x \geq -1/3$.

Phương trình tương đương với $(x+1)^3 + (x+1) = (\sqrt{3x+1})^3 + \sqrt{3x+1}$ (1')

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$ với $t \in \mathbb{R}$, ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ nên suy ra hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$, do đó phương trình (1') tương đương với $f(x+1) = f(\sqrt{3x+1})$

$$\Leftrightarrow x+1 = \sqrt{3x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 3x+1 = (x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Ví dụ 2: Giải bất phương trình $8x^3 + 2x > (x+2)\sqrt{x+1}$ (2)

Lời giải: Điều kiện $x \geq -1$. Khi đó (2) $\Leftrightarrow (2x)^3 + 2x > (\sqrt{(x+1)^3} + \sqrt{x+1})$ (2')

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$ với $t \in \mathbb{R}$, ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

BPT đã cho có dạng $f(2x) = f(\sqrt{x+1}) \Leftrightarrow \sqrt{x+1} < 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 0 \\ x+1 < 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x^2 - x - 1 > 0 \end{cases}$

Giải hệ trên kết hợp điều kiện xác định ta suy ra tập nghiệm là $S = \left(\frac{1 + \sqrt{17}}{8}; +\infty \right)$

Ví dụ 3: Giải bất phương trình $(x-1)\sqrt{x^2 - 2x + 5} - 4x\sqrt{x^2 + 1} \geq x + 1$

Lời giải: Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Bất phương trình tương đương với

$$(x-1)(\sqrt{x^2 - 2x + 5} + 1) \geq 4x\sqrt{x^2 + 1} + 2x \Leftrightarrow (x-1)(\sqrt{(x-1)^2 + 4} + (x-1)) \geq 2x\sqrt{4x^2 + 4} + 2x$$

Xét hàm số $f(t) = t + t\sqrt{t^2 + 4}$ với $t \in \mathbb{R}$, ta có $f'(t) = 1 + \sqrt{t^2 + 4} + \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 4}} > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ là hàm đồng biến, do đó BPT tương đương với $f(x-1) \geq f(2x) \Leftrightarrow x-1 \geq 2x \Leftrightarrow x \leq -1$

Vậy, tập nghiệm của BPT là $S = (-\infty; -1]$

Ví dụ 4: Giải phương trình $8x^3 - 36x^2 + 53x - 25 = \sqrt[3]{3x-5}$ (3)

Lời giải: Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình tương đương với $(2x-3)^3 + (2x-3) = (\sqrt[3]{3x-5})^3 + \sqrt[3]{3x-5}$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$ với $t \in \mathbb{R}$. Ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ suy ra hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$, do đó phương trình (3) tương đương với $f(2x-3) = f(\sqrt[3]{3x-5})$

$$\Leftrightarrow 2x-3 = \sqrt[3]{3x-5} \Leftrightarrow 8x^3 - 36x^2 + 51x - 22 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(8x^2 - 20x + 11) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 8x^2 - 20x + 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{5 \pm \sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

Ví dụ 5: Giải phương trình $2\sqrt{2x+4} + 4\sqrt{2-x} = \sqrt{9x^2+16}$ (4)

Lời giải: Điều kiện $-2 \leq x \leq 2$.

Bình phương hai vế của phương trình ta được $16\sqrt{-2x^2+8} = 9x^2 + 8x - 32$

$$\Leftrightarrow 4(-2x^2+8) + 16\sqrt{-2x^2+8} = 4\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 16\left(\frac{x}{2}\right) \text{ do } -2 \leq x \leq 2 \Rightarrow \frac{x}{2} \geq -1 \text{ và } \sqrt{-2x^2+8} \geq 0$$

Xét hàm số $f(t) = 4t^2 + 16t$ với $t \geq -1$ ta có $f'(t) = 8t + 16 > 0 \quad \forall t \geq -1$ do đó hàm f đồng biến trên miền đang xét, suy ra phương trình (1) tương đương với $\sqrt{-2x^2+8} = \frac{x}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ -2x^2 + 8 = \frac{x^2}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 9x^2 = 32 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

Ví dụ 6: Giải phương trình $\frac{x^2+2x-8}{x^2-2x+3} = (x+1)(\sqrt{x+2}-2)$

Lời giải: Điều kiện $x \geq -2$. Phương trình tương đương với

$$\frac{(x-2)(x+4)}{x^2-2x+3} = (x+1)\frac{(x-2)}{\sqrt{x+2}-2} \Leftrightarrow x=2 \text{ hoặc } \frac{x+4}{x^2-2x+3} = \frac{x+1}{\sqrt{x+2}+2} \quad (*)$$

Phương trình (*) tương đương $(x+4)\sqrt{x+2}+2 = (x+1)(x^2-2x+3)$

$$\Leftrightarrow ((x+2)+2)\sqrt{x+2}+2 = ((x-1)+2)((x-1)^2+2)$$

Xét hàm số $f(t) = (t+2)(t^2+2)$ với $t \in \mathbb{R}$, ta có $f'(t) = 3t^2 + 4t + 2 > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$$\text{do đó PT tương đương với } \sqrt{x+2} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x+2 = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 3x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{3+\sqrt{13}}{2}.$$

$$\text{Vậy, tập nghiệm của PT là } S = \left\{ 2; \frac{3+\sqrt{13}}{2} \right\}$$

Ví dụ 7: Giải bất phương trình $x - \sqrt{3x-2} \leq \sqrt{9x^2-6x} - x\sqrt{x^2+2}$ (6)

Lời giải: Điều kiện $x \geq 2/3$. Ta có (6) $\Leftrightarrow x + x\sqrt{x^2+2} \leq \sqrt{3x-2} + \sqrt{(3x-2).3x}$

$$\Leftrightarrow x + x\sqrt{x^2+2} \leq \sqrt{3x-2} + \sqrt{3x-2}\sqrt{\sqrt{(3x-2)^2+2}}$$

Xét hàm số $f(t) = t + t\sqrt{t^2+2}$ với $t \in \mathbb{R}$, ta có $f'(t) = 1 + \sqrt{t^2+2} + \frac{t^2}{\sqrt{t^2+2}} > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ là hàm đồng biến, do đó BPT tương đương với $f(x) \leq f(\sqrt{3x-2}) \Leftrightarrow x < \sqrt{3x-2}$ (*)

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2 \text{ (vì } x \geq 2/3 \text{ nên hai vế của BPT (*) đều dương).}$$

Vậy, tập nghiệm của BPT là $S = [1; 2]$

Phương pháp 6: Sử dụng bảng biến thiên hàm số để biện luận các bài toán có chứa tham số

1. Thuật toán chung:

Bước 1: Nêu điều kiện xác định và điều kiện nghiệm, nếu có.

Bước 2: Cô lập tham số về một vế của phương trình, bất phương trình.

Bước 3: Xét hàm số tương ứng ở vế còn lại. Lập bảng biến thiên của hàm số vừa xét.

Bước 4: Căn cứ vào bảng biến thiên để qua đó xác định các giá trị của tham số cần tìm.

2. Một số ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Tìm m để phương trình sau $4x - 2 + 3\sqrt{21 - 4x - x^2} - m = 0$

a) Có nghiệm. b) Có đúng 1 nghiệm. c) có 2 nghiệm phân biệt.

Giải : Tập xác định $D = [-7; 3]$, Xét hàm số $f(x) = 4x - 2 + 3\sqrt{21 - 4x - x^2}$, ta có

$$f'(x) = 4 - \frac{3(2+x)}{\sqrt{21-4x-x^2}}, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -6 \text{ (Loại)} \vee x = 2.$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$.

x	-7		2		3
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$			15		10
	-30				

a) Phương trình có nghiệm khi $\min_{[-7;3]} f(x) \leq m \leq \max_{[-7;3]} f(x) \Leftrightarrow -30 \leq m \leq 15$

b) Phương trình có đúng 1 nghiệm khi $-30 \leq m < 10$ hoặc $m = 15$.

c) Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $10 \leq m < 15$.

Ví dụ 2: Tìm m để bất phương trình: $mx - \sqrt{x-3} \leq m+1$ có nghiệm.

Lời giải: Điều kiện: $x \geq 3$

Đặt $t = \sqrt{x-3}$ ($t \geq 0$), khi đó bất phương trình trở thành $m(t^2 + 3) - 1 \leq m+1 \Leftrightarrow m \leq \frac{t+1}{t^2+2}$

Xét hàm $f(t) = \frac{t+1}{t^2+2}$ có $f'(t) = \frac{-t^2 - 2t + 2}{(t^2+2)^2}$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -1 \pm \sqrt{3}$. Vì $t \geq 0$ nên $t = -1 + \sqrt{3}$

Bảng biến thiên của hàm $f(t)$

t	0		$-1 + \sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$	$\frac{1}{2}$		$\frac{1+\sqrt{3}}{4}$		0

Qua bảng biến thiên của hàm số ta suy ra bất phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ

khi $m \leq \max_{[0;+\infty)} f(t) = \frac{1+\sqrt{3}}{4}$

Ví dụ 3: Tìm m để phương trình: $x\sqrt{x} + \sqrt{x+12} = m(\sqrt{5-x} + \sqrt{4-x})$ có nghiệm.

Lời giải: Đặt $g(x) = x\sqrt{x} + \sqrt{x+12} > 0 \Rightarrow g'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x+12}} > 0$

$$h(x) = \sqrt{5-x} + \sqrt{4-x} > 0 \Rightarrow h'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{5-x}} - \frac{1}{2\sqrt{4-x}} < 0$$

Suy ra: $g(x) > 0$ và tăng; $h(x) > 0$ và giảm hay $\frac{1}{h(x)} > 0$ và tăng $\Rightarrow f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ tăng.

Suy ra $f(x) = m$ có nghiệm $\Leftrightarrow m \in \left[\min_{[0;4]} f(x); \max_{[0;4]} f(x) \right] = [f(0); f(4)] = [2(\sqrt{15} - \sqrt{12}); 12]$

Phương pháp 7: Sử dụng tính chất bất đẳng thức để đánh giá

Ví dụ 1: Giải phương trình $x^2 + 4x + 5 = 2\sqrt{2x+3}$

Lời giải: Điều kiện $x \geq -3/2$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $(2x+3)+1 \geq 2\sqrt{2x+3}$ kết hợp với phương trình đã cho ta được $2x+4 \geq x^2 + 4x + 5 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất $x = -1$.

Ví dụ 2: Giải bất phương trình: $\frac{x - \sqrt{x}}{1 - \sqrt{2(x^2 - x + 1)}} \geq 1$

Lời giải: Ta có $1 - \sqrt{2(x^2 - x + 1)} < 0$ nên BPT $\Leftrightarrow \sqrt{2(x^2 - x + 1)} \leq 1 - x + \sqrt{x}$ (1)

Mặt khác ta lại có: $\sqrt{2(x^2 - x + 1)} = \sqrt{2(1-x)^2 + 2(\sqrt{x})^2} \geq 1 - x + \sqrt{x}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \sqrt{2(x^2 - x + 1)} = 1 - x + \sqrt{x}$. Dấu bằng khi $1 - x = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ (nhận)

Ví dụ 3: Giải phương trình $\sqrt{x-4} + \sqrt{6-x} = x^2 - 10x + 27$

Lời giải: Điều kiện $4 \leq x \leq 6$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $1 \cdot \sqrt{x-4} \leq \frac{1+x-4}{2}$; $1 \cdot \sqrt{6-x} \leq \frac{1+6-x}{2} \Rightarrow VT \leq 2$

Mặt khác: $VP = x^2 - 10x + 27 = (x-5)^2 + 2 \geq 2$, do đó phương trình xảy ra khi và chỉ khi

$VT = VP = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = x - 4 = 6 - x \\ x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5$. Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất $x = 5$.

Ví dụ 4: Giải phương trình $x = \sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$

Lời giải: Điều kiện $x \geq 1$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $\sqrt{1(x - \frac{1}{x})} \leq \frac{1+x+\frac{1}{x}}{2}$; $\sqrt{\frac{1}{x}(x-1)} \leq \frac{\frac{1}{x}+x-1}{2}$ suy ra

$\sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}} \leq x$, do đó phương trình xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} 1 = x - \frac{1}{x} \\ \frac{1}{x} = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$

Giải ra kết hợp điều kiện xác định ta được $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

PHẦN BA: KẾT LUẬN

1. Kết quả đạt được

Sau một thời gian giảng dạy như trên tôi thấy đã thu được những kết quả hết sức khả quan:

Đa số học sinh tiếp thu được kiến thức cơ bản.

Nhiều kĩ năng về giải quyết bài toán, trình bày bài toán, cách tiến hành một số dạng bài tập cơ bản cũng như bài tập vận dụng nâng cao được học sinh thực hiện thành thạo

Nhiều kĩ năng về giải quyết bài toán, trình bày bài toán, cách tiến hành một số dạng bài cơ bản cũng như các bài vận dụng nâng cao được học sinh thực hiện thành thạo.

Nhiều kĩ năng về giải quyết bài toán, trình bày bài toán, cách tiến hành một số dạng bài cơ bản cũng như các bài vận dụng nâng cao được học sinh thực hiện thành thạo. Tinh thần học tập của các em học sinh khi được nghiên cứu phần này tăng lên đáng kể, các em hứng thú hơn trong việc tìm tòi, khám phá các lời giải, đồng thời tạo ra một động lực để thúc đẩy trong việc nghiên cứu tiếp thu các phần kiến thức khác.

Kết quả học phần này được nâng lên rõ rệt. Trong các bài thi kiểm tra định kỳ, bài thi học kỳ, bài thi THPT có nhiều em đạt điểm 10 môn Toán, có nhiều em đạt kết quả điểm thi vào Đại học, Cao đẳng với điểm số rất cao.

Trên cơ sở của chuyên đề này cùng với sự đồng ý của Ban giám hiệu nhà trường, tổ chuyên môn, tôi đã tiến hành thực hiện nội dung chuyên đề nêu trên của mình trên ba năm liên tục, đó là các lớp 12A3, 12A9, 12A10 (năm học 2013 - 2014), các lớp 12A1, 12A5, 12A7 (năm học 2014 - 2015) và các lớp 12A3, 12A5, 12A9 (năm học 2015 - 2016), (Tổng số học sinh bình quân là 140), kết quả thu được trong các kì thi thử THPT ở trường với bảng số liệu sau:

Số em tham gia làm bài thi	Đạt điểm dưới 5,0	Đạt từ 5,0 đến 6,5	Đạt từ 6,5 đến 7,5	Đạt từ 7,5 đến 8,5	Đạt trên 8,5
Thi lần 1	35	23	32	32	18
Thi lần 2	30	20	36	32	22

Thi lần 3	20	23	37	34	26

2. Bài học kinh nghiệm:

Nắm vững chuyên môn nghiệp vụ, có kiến thức sâu rộng, khả năng bao quát kiến thức, có tinh thần trách nhiệm trong công việc.

Trong công tác giảng dạy cần đổi mới phương pháp dạy học, tìm ra phương pháp phù hợp cho nội dung bài học. Trước khi lên lớp cần có sự nghiên cứu kỹ nội dung chương trình, đặc biệt là tình hình học sinh để đưa ra bài học sát với khả năng của học sinh, chọn lọc hệ thống bài tập phù hợp, có sự hướng dẫn hợp lý, dễ hiểu để học sinh vận dụng được tốt.

Mặc dù tôi đã rất cố gắng hoàn thiện bài viết một cách cẩn thận nhất, song vẫn không tránh khỏi những sai sót, rất mong các cấp chuyên môn đóng góp ý kiến bổ sung để chuyên đề ngày càng hoàn thiện và hữu ích hơn nữa. Cũng rất mong được sự góp ý của quý đồng nghiệp để chúng tôi có dịp được trau dồi và tích lũy kiến thức nhằm hoàn thành tốt nhiệm vụ giáo dục được giao.

XÁC NHẬN CỦA THỦ TRƯỞNG ĐƠN VỊ	<i>Thanh Hóa, ngày 25 tháng 5 năm 2016</i> Tôi xin cam đoan đây là SKKN của mình viết, không sao chép nội dung của người khác. <i>Lê Đức Trung</i>
--	---